ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right).$$

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}&=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right)\\
&=\left(\frac{(-6)^{16}(-6)^{1}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{15}(-12)}{6^{15}}+2^{0}\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot\left(\frac{-6}{-3}\right)^{16}+(-12)\cdot\left(\frac{-12}{6}\right)^{15}+2^{0}\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot 2^{16}+(-12)\cdot(-2)^{15}+2^{0}\right)\cdot\left((-2)^{31}+2^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)\cdot(-2)^{15}+1\right)\cdot\left(-2^{31}+2^{31}+2020\right)\\
&=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)^{16}+1\right)\cdot(0+2020)=(0+1)\cdot 2020=2020.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Οι ομάδες μπάσκετ δώδεκα Γυμνασίων της Αθήνας παίρνουν μέρος σε ένα σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ. Κάθε μία ομάδα θα παίξει μία μόνο φορά με όλες τις υπόλοιπες ομάδες. Σε κάθε αγωνιστική ημέρα οι ομάδες θα παίζουν την ίδια ώρα ανά ζεύγη και θα έχουμε 6 αγώνες. Μετά το τέλος κάθε αγωνιστικής θα βγαίνει η βαθμολογία σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με τους βαθμούς που θα έχει κάθε ομάδα. Στο σύστημα βαθμολογίας των ομάδων η νίκη παίρνει έναν βαθμό, η ήττα μηδέν βαθμούς και δεν υπάρχει ισοπαλία. Υπάρχει αγωνιστική ημέρα μετά το τέλος της οποίας η βαθμολογία που θα βγει θα δίνει σε κάθε ομάδα διαφορετικούς βαθμούς από όλες τις άλλες ομάδες
Λύση

Για να έχουν οι δώδεκα ομάδες διαφορετικούς βαθμούς στον πίνακα της βαθμολογίας, δεδομένου ότι ο μέγιστος αριθμός παιγνιδιών και βαθμών είναι 11, η μοναδική δυνατή βαθμολογία είναι η παρακάτω:

O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Επομένως, αν υπάρχει τέτοια αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες, αυτή θα είναι η ενδέκατη.
Η απάντηση αυτή θα είναι αποδεκτή, εφόσον αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να προκύψει η παραπάνω βαθμολογία στο τέλος της ενδέκατης αγωνιστικής ημέρας. Πράγματι, η παραπάνω βαθμολογία είναι εφικτή, αν υποθέσουμε ότι κάθε ομάδα έχει κερδίσει όλα τα παιγνίδια με ομάδες που βρίσκονται κάτω από αυτή στη βαθμολογία, δηλαδή η Ο1 θα κερδίσει όλες τις υπόλοιπες ομάδες, η Ο2 θα κερδίσει τις Ο3 , Ο4, …Ο12, κοκ. Επομένως, η αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες είναι η ενδέκατη.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΗΓ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες. Το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΗ τέμνονται στο σημείο Ζ έτσι ώστε να ισχύει:

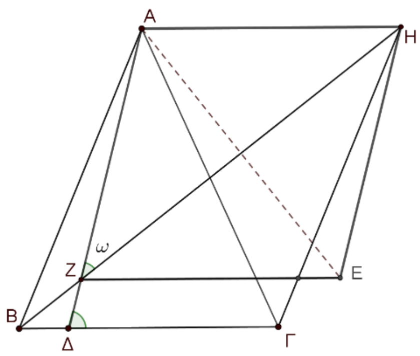
$$\text{ΑΖ} = \text{ΒΓ}.$$

Επίσης οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες.

Αν $\text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = \omega$, τότε:

(α) Να βρείτε τη γωνία $\text{Γ}\hat{\Delta}\text{Ζ}$ συναρτήσει του ω.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΓΗ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή έχουμε $\text{ΒΓ} = \text{ΑΗ}$. Όμως από υπόθεση ΑΖ = ΒΓ, οπότε θα είναι και ΑΖ = ΑΗ. Επομένως το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε θα έχει τις δύο γωνίες της βάσης του ίσες, δηλαδή

$$\text{Α}\hat{\text{Η}}\text{Ζ} = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = \omega. \qquad (1)$$

Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΗ έχουμε ότι:

$$\text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 180^0 - 2 \cdot \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = 180^0 - 2\omega. \qquad (2)$$

Τέλος, επειδή $\text{ΑΗ} \parallel \text{ΒΓ}$ που τέμνονται από την ΑΔ, έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$\text{Γ}\hat{\Delta}\text{Ζ} + \text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 180^0. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι:

$$180^0 - 2\omega + \text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 180^0 \Rightarrow \text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 2\omega.$$

(β) Επειδή οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΖΕΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΗ = ΖΕ και ΑΖ = ΗΕ. Όμως, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α) είναι ΑΖ = ΑΗ, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΕΗ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Άρα οι διαγώνιες του ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}}+\frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}}+20^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}}+\frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}}+2021\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-3)^{-7}}{(-6)^{-6}}+\frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}}+20^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}}+\frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}}+2021\right)$$

$$=\left(\frac{(-6)^{6}}{(-3)^{7}}+\frac{(+12)^{7}}{(-6)^{8}}+1\right)\cdot\left(\frac{(+5)^{35}}{(-10)^{35}}+\frac{(-11)^{35}}{(-22)^{35}}+2021\right)$$

$$=\left(\frac{(-6)^{6}}{(-3)^{6}(-3)}+\frac{12^{7}}{(-6)^{7}\cdot(-6)}+1\right)\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{35}+\left(+\frac{1}{2}\right)^{35}+2021\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-6}{-3}\right)^{6}-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{12}{6}\right)^{7}+1\right)\cdot\left(-\left(+\frac{1}{2}\right)^{35}+\left(+\frac{1}{2}\right)^{35}+2021\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{6}-\frac{1}{6}\cdot(-2)^{7}+1\right)\cdot(0+2021)=\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{6}-\frac{(-2)}{6}\cdot(-2)^{6}+1\right)\cdot 2021$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^{6}+\frac{1}{3}\cdot(-2)^{6}+1\right)\cdot 2021=(0+1)\cdot 2021=1\cdot 2021=2021.$$

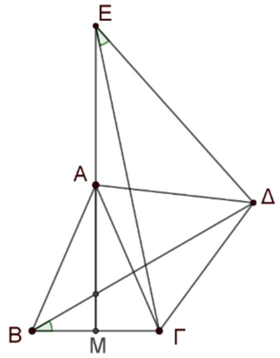
Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ > ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΓΔ$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α κατά τμήμα ΑΕ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

$$\widehat{ΔΒΓ}=\widehat{ΓΕΔ}=30°.$$

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



Λύση

1ος τρόπος

Έστω $\hat{A}=\hat{x}$ και $\widehat{ΑΒΔ}=\hat{B}_2=\hat{y}$. Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΔ$ $(ΑΒ=ΑΔ)$ έχουμε $\widehat{ΑΔΒ}=\hat{Δ}_1=\hat{y}$ και

$$2\hat{y}+\hat{x}+60°=180° \Leftrightarrow \boldsymbol{2\hat{y}+\hat{x}=120°} \quad (\mathbf{1}).$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ έχουμε:

$$2(\hat{y}+\hat{B}_1)+\hat{x}=180° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{2\hat{y}}+2\hat{B}_1+\boldsymbol{\hat{x}}=180° \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{B}_1=60° \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\hat{B}_1=30°}.$$

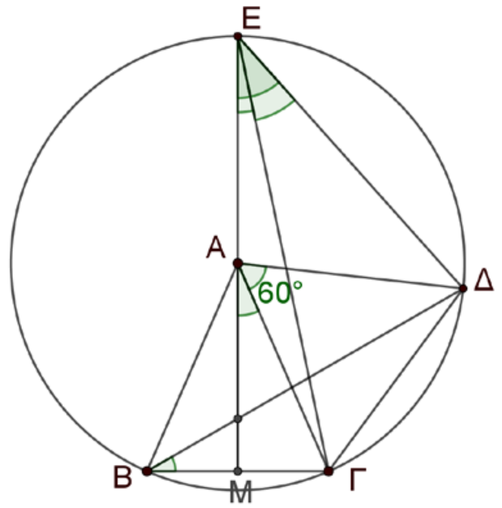
Για τη γωνία $\Gamma\hat{E}\Delta$ παρατηρούμε ότι:

$$\Gamma\hat{E}\Delta = A\hat{E}\Delta - A\hat{E}\Gamma \qquad (2)$$

Έχουμε ότι $M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{x}{2}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = 60^0$. Επιπλέον τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΑΓ είναι ισοσκελή, αφού $EA = AB = A\Gamma = A\Delta$. Για τις εξωτερικές γωνίες τους $M\hat{A}\Delta$ και $M\hat{A}\Gamma$ έχουμε:

$M\hat{A}\Delta = \frac{\hat{x}}{2} + \Gamma\hat{A}\Delta = \frac{\hat{x}}{2} + 60^0$, αφού ΑΓΔ ισόπλευρο τρίγωνο

και $M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{x}{2}$, αφού η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος.



Σχήμα 2

Επομένως, έχουμε

$$M\hat{A}\Delta = \frac{\hat{x}}{2} + 60^0 = 2 \cdot A\hat{E}\Delta \Rightarrow A\hat{E}\Delta = \frac{\hat{x}}{4} + 30^0$$

$$\text{και } M\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{x}}{2} = 2 \cdot A\hat{E}\Gamma \Rightarrow A\hat{E}\Gamma = \frac{\hat{x}}{4}.$$

Επομένως, έχουμε $\Gamma\hat{E}\Delta = A\hat{E}\Delta - A\hat{E}\Gamma = \frac{\hat{x}}{4} + 30^0 - \frac{\hat{x}}{4} = 30^0.$

2ος τρόπος

Επειδή $EA = AB = A\Gamma = A\Delta$ ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε. Οι γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $\Gamma\hat{E}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο χορδής ΓΔ, οπότε θα είναι

$$\Delta\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{E}\Delta = \frac{\Gamma\hat{A}\Delta}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0.$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Σε μία παρέα κάποια μέλη της αποτελούν την ομάδα Μ που αγαπάει τα Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα μέλη αποτελούν την ομάδα Φ που αγαπάει τη Φυσική. Ο μέσος όρος των ηλικιών των μελών που αγαπούν τα Μαθηματικά είναι 25 χρόνια, ενώ αυτών που αγαπούν τη Φυσική είναι 35 χρόνια. Όμως δύο μέλη της ομάδας Φ δήλωσαν ότι πλέον άλλαξαν προτίμηση και ζήτησαν να ενταχθούν στην ομάδα Μ. Τότε ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Μ έγινε 27, ενώ ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Φ έγινε 37.

Να βρείτε πόσα μέλη είχε συνολικά η παρέα και να δώσετε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας παρέας.

Λύση

Έστω ότι η ομάδα Μ έχει μ μέλη και η ομάδα Φ έχει φ μέλη. Τότε το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι 25μ, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι 35φ και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι

$$25\mu + 35\varphi.$$

Με την αλλαγή προτίμησης των 2 μελών της ομάδας Φ, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Μ είναι $27(\mu+2)$, το άθροισμα των ηλικιών των μελών της ομάδας Φ είναι $37(\varphi-2)$ και το άθροισμα των ηλικιών όλων των μελών της παρέας είναι

$$27(\mu+2)+37(\varphi-2).$$

Επομένως, έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}&25\mu+35\varphi=27(\mu+2)+37(\varphi-2)\\ &\Leftrightarrow 25\mu+35\varphi-27\mu-37\varphi=54-74\\ &\Leftrightarrow -2\mu-2\varphi=-20 \Leftrightarrow \mu+\varphi=10,\end{aligned}$$

οπότε η παρέα είχε συνολικά 10 μέλη.

Ένα παράδειγμα τέτοιας παρέας είναι το εξής:

Ομάδα Μ: 4 μέλη με ηλικίες 25 έτη και μέσο όρο ηλικιών τα 25 έτη.

Ομάδα Φ: 6 μέλη από τα οποία 4 έχουν ηλικία 37 έτη και τα δύο έχουν ηλικία με ηλικίες 31 έτη. Μέσος όρος ηλικιών: $\frac{2\cdot 31+4\cdot 37}{6}=\frac{62+148}{6}=\frac{210}{6}=35$ έτη.

Αν αλλάξουν προτίμηση τα μέλη με την ηλικία των 31 ετών, τότε στην ομάδα Μ έχουμε μέσο όρο ηλικιών $\frac{4\cdot 25+2\cdot 31}{6}=\frac{162}{6}=27$ έτη , ενώ στην ομάδα Φ έχουμε μέσο όρο ηλικιών $\frac{4\cdot 37}{4}=37$ έτη.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος αριθμός $A = 81^{3^n} + 4^{2n+1}$ είναι σύνθετος για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n.

Λύση

Ο αριθμός A γράφεται: $A = (3^4)^{3^n} + (2^2)^{2n+1} = (3^{3^n})^4 + (2^n)^4 2^2 =$
$$= (3^{3^n})^4 + 4(2^n)^4.$$
Θέτουμε $x = 3^{3^n}$ και $y = 2^n$ οπότε:
$$A = x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) =$$
$$= ((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2).$$
Επειδή οι αριθμοί $(x + y)^2 + y^2$ και $(x - y)^2 + y^2$ είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, ο A είναι σύνθετος.

2ος τρόπος: Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού Α είναι 5, άρα ο αριθμός διαιρείται με το 5 και επειδή Α>5, έπεται ο Α είναι σύνθετος.

Πράγματι, γράφοντας $A = (3^4)^{3^n} + (4)^{2n+1}$, αρκεί να δούμε το τελευταίο ψηφίο του πρώτου προσθετέου και του δεύτερου.

Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 3:
$$3^1 \text{ λήγει σε } 3,\ 3^2 \text{ λήγει σε } 9,\ 3^3 \text{ λήγει σε } 7,\ 3^4 \text{ λήγει σε } 1, \text{κ.ο.κ}$$
Ο εκθέτης που έχουμε είναι πολλαπλάσιο του 4, άρα ο $(3^4)^{3^n}$ λήγει σε 1.

Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 4:
$$4^1 \text{ λήγει σε } 4,\ 4^2 \text{ λήγει σε } 6,\ 4^3 \text{ λήγει σε } 4,\ 4^4 \text{ λήγει σε } 6,\ \text{κ.ο.κ}$$
Ο εκθέτης που έχουμε είναι περιττός, άρα ο $(4)^{2n+1}$ λήγει σε 4.

Προσθέτοντας έχουμε ότι ο Α λήγει σε 5, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020. Να βρείτε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

Λύση

Ο Ανδρέας θα βρει τον αριθμό $\mathrm{A} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2019$, ενώ ο Βασίλης θα βρει τον αριθμό $\mathrm{B} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2019^2$. Η Γεωργία πρέπει να υπολογίσει τον αριθμό:
$$\Gamma = 3\mathrm{A} + 3\mathrm{B} + 2020 = 3(1 + 2 + 3 + \ldots + 2019) + 3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2019^2\right) + 2020$$
$$= \left(3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1\right) + \left(3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\right) + \left(3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1\right) + \ldots + \left(3\cdot 2019^2 + 3\cdot 2019 + 1\right) + 1$$
$$= (1+1)^3 - 1^3 + (2+1)^3 - 2^3 + (3+1)^3 - 3^3 + \ldots + (2019+1)^3 - 2019^3 + 1$$
$$= 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + 2020^3 - 2019^3 + 1 = -1 + 2020^3 + 1 = 2020^3.$$
Σημείωση: Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει για με n = 2019 τους τύπους
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 30°$ και έστω M, N τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΓΜ$ $(C_{ΑΓΜ})$ τέμνει τη πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο N προς την πλευρά $ΑΒ$ και η κάθετη από σημείο $Γ$ προς την $ΔN$ τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{ΑΓΜ}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΔN$. (Σημείωση: Για ένα τρίγωνο XYZ, ο περιγεγραμμένος κύκλος είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του X, Y, Z. Αν O είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε OX=OY=OZ)

Λύση

Το M είναι μέσο της βάσης $ΒΓ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$, άρα η γωνία $\angle ΑΜΓ$ είναι ορθή (διότι η $ΑΜ$ είναι διάμεσος, μεσοκάθετος και διχοτόμος), οπότε κέντρο του κύκλου $C_{ΑΓΜ}$ είναι το μέσο N της πλευράς $ΑΓ$. Άρα θα ισχύουν οι ισότητες:

$$NA = NΓ = NΔ = \frac{ΑΓ}{2} = \rho \qquad (1)$$

Έστω ότι η κάθετη από το N προς την $ΑΒ$ (που είναι μεσοκάθετος της $ΑΔ$) τέμνει τον κύκλο $C_{ΑΓΜ}$ στο σημείο E και θα ισχύει ότι

$$NA = NE = NΔ = \rho. \qquad (2)$$

Επειδή

$$\widehat{N}_2 = E\widehat{N}A = 90° - \hat{A} = 90° - \hat{A} = 30° = 60°$$

και $NA = NE = \rho$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΑΝΕ$ είναι ισόπλευρο, οπότε:

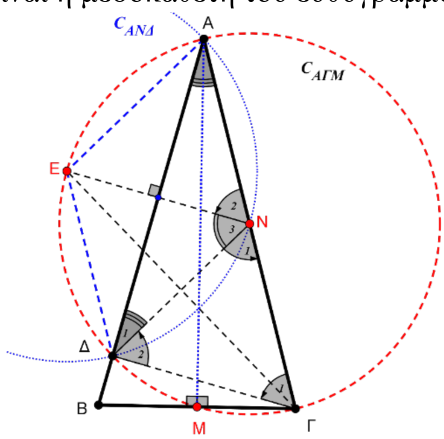
$$NA = NE = EA = \rho \qquad (3).$$

Επιπλέον, το σημείο E είναι το μέσο του τόξου $ΑΔ$ και θα ισχύει ότι:

$$EA = EΔ = \rho. \qquad (4)$$

Επειδή από τις προηγούμενες ισότητες $EΔ = NE = EA = \rho$, το σημείο E είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΔΝ$.

Επίσης, επειδή $NA = NE = EA = \rho$, το τρίγωνο $ΔΕΝ$ είναι ισόπλευρο και επίσης το τρίγωνο $ΔΓΝ$ είναι ισόπλευρο, αφού $NΔ = NΓ = \rho$ και $Δ\widehat{N}Γ = 2\hat{A} = 2 \cdot 30° = 60°$. Επομένως, η ευθεία $ΓE$ είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος $NΔ$.



Σχήμα 1

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Έστω $\Sigma(\nu)$ το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου ν. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ισότητα: $\Sigma(\nu)=2025-\nu$.

Λύση

1ος τρόπος

Επειδή $\Sigma(\nu)=2025-\nu>0 \Rightarrow \nu<2025$, το άθροισμα των ψηφίων του ν μπορεί να πάρει τιμές από το 1, για τους αριθμούς 1,10,100, 1000, μέχρι 28, για τον αριθμό 1999. Επομένως, έχουμε

$$1 \le \Sigma(\nu)=2025-\nu \le 28 \Leftrightarrow -2024 \le -\nu \le -1997 \Leftrightarrow 1997 \le \nu \le 2024,$$

οπότε πρέπει να βρούμε ποιοι από τους ακέραιους από το 1997 μέχρι και το 2024 ικανοποιούν την ισότητα $\Sigma(\nu)=2025-\nu$. Με έλεγχο βρίσκουμε ότι την ισότητα αυτή ικανοποιούν μόνο οι αριθμοί 1998 και 2016.

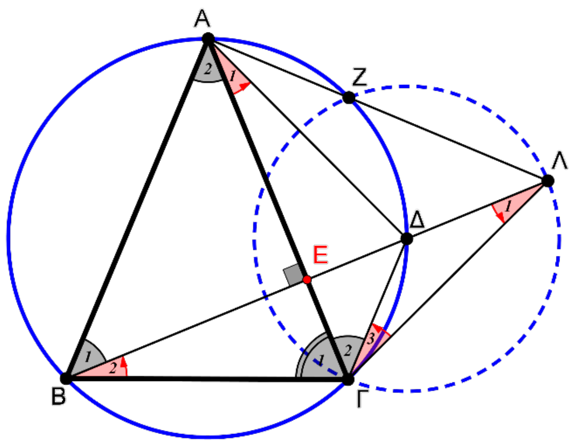
2ος τρόπος

Από το κριτήριο διαιρετότητας με το 9, ξέρουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $9 \mid \nu-\Sigma(\nu)$. Από τη συνθήκη του προβλήματος έχουμε $9 \mid 2025=\nu+\Sigma(\nu)$. Επομένως $9 \mid (\nu-\Sigma(\nu))+(\nu-\Sigma(\nu))=2\nu$, οπότε $9 \mid \nu$. Επομένως από τους αριθμούς $1997 \le \nu \le 2024$, μένει να ελέγξουμε μόνο τα πολλαπλάσια του 9, που είναι οι αριθμοί 1998, 2007 και 2016, από τους οποίους μόνο οι 1998, 2016 ικανοποιούν τη συνθήκη.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 45°$. Θεωρούμε το ύψος $ΒΕ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω $C_{ΑΒΓ}$, στο σημείο $Δ$. Η προέκταση του ύψους $ΒΕ$ τέμνει επίσης στο σημείο $Λ$ την εφαπτόμενη του κύκλου $C_{ΑΒΓ}$ στο σημείο του $Γ$. Η $ΑΛ$ τέμνει τον κύκλο $C_{ΑΒΓ}$ στο σημείο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $Δ$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΓΛ$ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΖΓΛ$.

Λύση



Σχήμα 2

Εφόσον $\hat{A} = \hat{A}_2 = 45°$ και το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{Γ}_1 = \hat{Γ} = 67{,}5° \quad (1) .$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΕΒ$, έχουμε:

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_1 = 45° \qquad (2)$$

και κατά συνέπεια

$$\hat{B}_2 = 22{,}5° \qquad (3).$$

Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_2$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $C_{ΑΒΓ}$ και βαίνουν στο τόξο $ΓΔ$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2 \overset{(3)}{=} 22{,}5° \qquad (4).$$

Οι γωνίες $\hat{Γ}_2$ και $\hat{B}_1$ είναι (επίσης) εγγεγραμμένες στο κύκλο $C_{ΑΒΓ}$ και βαίνουν στο τόξο $ΑΔ$.
Άρα

$$\hat{Γ}_2 = \hat{B}_1 \overset{(2)}{=} 45° \qquad (5).$$

Η γωνία $\hat{Γ}_3$ σχηματίζεται (στο κύκλο $C_{ΑΒΓ}$) από τη χορδή $ΓΔ$ και την εφαπτομένη $ΓΛ$. Άρα

$$\hat{Γ}_3 = \hat{A}_1 = \hat{B}_2 \overset{(4)}{=} 22{,}5° \qquad (6).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες γωνιών, έχουμε:

$$\hat{Γ}_1 = \hat{Γ} \overset{(1)}{=} 67{,}5° = \hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 \overset{(5),(6)}{=} 45° + 22{,}5° .$$

Δηλαδή (στο τρίγωνο $ΒΓΛ$) η $ΓΕ$ είναι ύψος και διχοτόμος οπότε το τρίγωνο $ΒΓΛ$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια $\hat{Γ}_3 = \hat{A}_1 \overset{(6)}{=} 22{,}5°$ (7) και $ΓΒ = ΓΛ$.
Από την ισότητα (7) καθώς και το γεγονός ότι η $ΑΓ$ είναι μεσοκάθετος της $ΒΛ$.
Άρα τα τρίγωνα $ΑΓΛ$ και $ΔΓΛ$ είναι ισοσκελή. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $ΑΔ \perp ΓΛ$, το οποίο σε συνδυασμό με τη καθετότητα $ΛΕ \perp ΑΓ$, μας δίνει ότι το σημείο $Δ$ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΔΛ$.
Προηγουμένως αποδείξαμε ότι η $ΑΔ$ είναι μεσοκάθετος της $ΓΛ$. Άρα η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της $Γ\hat{A}Λ$. Οπότε $ΔΓ = ΔΖ$ και επειδή $ΔΓ = ΔΛ$, το σημείο $Δ$ είναι περίκεντρο του τριγώνου $ΖΓ$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + c$, όπου οι a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $b > 2a$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{a+b+c}{b-2a}.$$

Λύση

Έχουμε ότι $a + b + c = f(1)$ και

$$f(1) - f(-3) = (a+b+c) - (9a - 3b + c) = 4b - 8a = 4(b-2a)$$

Οπότε $A = \dfrac{a+b+c}{b-2a} = \dfrac{f(1)}{\dfrac{f(1)-f(-3)}{4}} = \dfrac{4f(1)}{f(1)-f(-3)}$. Όμως από την εκφώνηση έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, οπότε

$$f(1)-f(-3)\le f(1)\Rightarrow 4\le \frac{4f(1)}{f(1)-f(-3)}\Rightarrow A\ge 4 .$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $f(-3)=0$, και το τριώνυμο $(x+3)^2=x^2+6x+9$ είναι ένα τέτοιο παράδειγμα για το οποίο επιπλέον ισχύει $b>2a$.

2^{ος} τρόπος: Αφού $f(x)\ge 0$, η διακρίνουσα του τριωνύμου θα είναι μη θετική, έπεται ότι $b^2\leqslant 4ac$,οπότε $c\ge \frac{b^2}{4a}$. Επομένως

$$A=\frac{a+b+c}{b-2a}\ge \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-2a}=\frac{\lambda^2+4\lambda+4}{4(\lambda-2)},$$

όπου $\lambda=\frac{b}{a}>2$. Όμως

$$\frac{\lambda^2+4\lambda+4}{4(\lambda-2)}=\frac{(\lambda-2)^2+8(\lambda-2)+16}{4(\lambda-2)}=\frac{\lambda-2}{4}+\frac{4}{\lambda-2}+2\ge 2+2=4,$$

με ισότητα για λ=6.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να βρεθούν οι περιττοί πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους ο ακέραιος $3p-8$ ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου αριθμού.

Λύση
Έστω a θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει: $3p-8=a^3$.
Τότε θα ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$3p-8=a^3 \Leftrightarrow 3p=a^3+8 \Leftrightarrow 3p=a^3+2^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3p=(a+2)(a^2-2a+4) \quad (1).$$

Από την εξίσωση (1) (επειδή ο αριθμός p είναι πρώτος) μπορεί να ισχύουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

$$a+2=3 \text{ και } a^2-2a+4=p \quad (\alpha)$$
$$a+2=p \text{ και } a^2-2a+4=3 \quad (\beta)$$
$$a+2=1 \text{ και } a^2-2a+4=3p \quad (\gamma)$$
$$a+2=3p \text{ και } a^2-2a+4=1 \quad (\delta)$$

Από τη περίπτωση (α) έχουμε: $a=1$ και $p=3$
Από τη περίπτωση (β) έχουμε: $a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1$ και $p=3$.
Από τη περίπτωση (γ) έχουμε: $a=-1$ και $3p=7$ (αδύνατο).
Από τη περίπτωση (δ) έχουμε: $a^2-2a+3=0$ με $\Delta=-8<0$ (αδύνατο).
Από όλες τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε: $p=3$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Αν οι x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x,y,z), που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l} x^3+8y-4z=-3 \\ 3x^2+y^2-2z=1 \\ 3x-4y+z^2=68 \end{array}\right\}$$

Λύση
Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$x^3+3x^2+3x+y^2+4y+z^2-6z=66$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^3+(y+2)^2+(z-3)^2=80.$$

Στην τελευταία εξίσωση ο αριθμός 80 είναι το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων και ενός τέλειου κύβου θετικού ακέραιου. Οι κύβοι θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι του 80 δίνουν επιτρεπτές τιμές για το $x+1$ τις 1. 2, 3 και 4.
Για $x+1=1 \Rightarrow x=0,$ που απορρίπτεται γιατί πρέπει $x>0.$
Για $x+1=2 \Leftrightarrow x=1,$ έπεται ότι $(y+2)^2+(z-3)^2=72$, οπότε η μοναδική περίπτωση που το 72 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι

$$(y+2)^2=(z-3)^2=36 \Leftrightarrow y+2=\pm 6 \text{ και } z-3=\pm 6$$
$$\Leftrightarrow y=4 \text{ και } z=9, \text{ αφού } y,z>0,$$

οπότε έχουμε την τριάδα $(x,y,z)=(1,4,9)$, η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι είναι λύση του συστήματος.

Για $x+1=3 \Leftrightarrow x=2,$ έπεται ότι $(y+2)^2+(z-3)^2=53$, οπότε οι περιπτώσεις που το 53 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι:

$$(y+2)^2=4,\ (z-3)^2=49 \text{ ή } (y+2)^2=49,\ (z-3)^2=4$$
$$\Leftrightarrow (y+2=\pm 2 \text{ και } z-3=\pm 7) \text{ ή } (y+2=\pm 7 \text{ και } z-3=\pm 2)$$
$$\Leftrightarrow \{y=0 \text{ και } z=10\} \text{ ή } \{y=5 \text{ και } z=5 \text{ ή } z=1\}, \text{ αφού } y,z>0$$
$$\Leftrightarrow (y,z)\in\{(0,10),\ (5,5),(5,1)\}.$$

Επομένως το σύστημα έχει λύσεις (x,y,z) τα στοιχεία του συνόλου

$$\{(2,0,10),(2,5,5),(2,5,1)\},$$

από τις οποίες καμία δεν είναι λύση του συστήματος.

Για $x+1=4 \Leftrightarrow x=3,$ έπεται ότι $(y+2)^2+(z-3)^2=16$, οπότε οι περιπτώσεις που το 16 είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων είναι:

$$\{(y+2)^2=0 \text{ και } (z-3)^2=16\} \text{ ή } \{(y+2)^2=16 \text{ και } (z-3)^2=0\}$$
$$\Leftrightarrow \{y+2=0 \text{ και } z-3=\pm 4\} \text{ ή } \{y+2=\pm 4 \text{ και } z-3=0\}$$
$$\Leftrightarrow \{y=2 \text{ και } z=3\}, \text{αφού } y,z>0.$$

Επομένως προκύπτει η τριάδα $(x,y,z)=(3,2,3)$, που δεν είναι λύση του συστήματος.

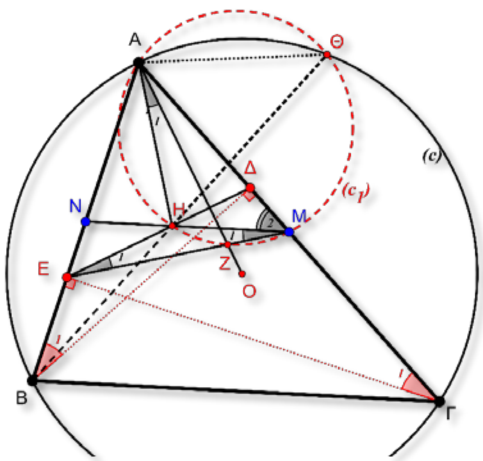
Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο μη ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A}=60°$. Δίνονται επίσης τα ύψη του $B\Delta, \Gamma E$ καθώς και τα μέσα M,N των πλευρών του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των OA, EM και H το σημείο τομής των $MN, \Delta E$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A,H,Z,M ανήκουν σε κύκλο, έστω c_1.

(β) Αν οι κύκλοι c και c_1 τέμνονται στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι τα σημεία B,H,Θ είναι συνευθειακά.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ορθογώνια με $\hat{A} = 60°$, θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 30°$ και κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$A\Delta = \frac{AB}{2} = AN \text{ και } AE = \frac{A\Gamma}{2} = AM.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι τα τρίγωνα $A\Delta N$ και AEM είναι ισοσκελή. Άρα

$$AH \perp EM \qquad (1).$$

Από το τρίγωνο $AO\Gamma$ έχουμε: $A\hat{O}\Gamma = 2\,\hat{B}$ και κατά συνέπεια $\hat{A}_2 = 90° - \hat{B}$ (α).
Το τετράπλευρο $BE\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο, οπότε $A\hat{\Delta}E = \hat{B}$ (β).
Από τις ισότητες (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι:

$$AO \perp E\Delta \qquad (2)\ (**).$$

Από τις καθετότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{E}_1$ είναι ίσες: $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες).
Από τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta N$ και AEM, συμπεραίνουμε ότι και το τρίγωνο HEM είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{E}_1 = \hat{M}_1$ και σε συνδυασμό με την προηγούμενη ισότητα γωνιών $\left(\hat{A}_1 = \hat{E}_1\right)$ καταλήγουμε $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$, δηλαδή το τετράπλευρο $AHZM$ είναι εγγράψιμο.
(β) Επειδή τα σημεία M, N είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ συμπεραίνουμε ότι $MN \mathbin{/\!/} B\Gamma$, οπότε $\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}$. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AHM\Theta$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{M}_2 = A\hat{\Theta}H$. Άρα

$$A\hat{\Theta}H = \hat{\Gamma} \qquad (3).$$

Από το εγγεγραμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Theta$ έχουμε: $A\hat{\Theta}B = \hat{\Gamma}$ (4).
Από τις σχέσεις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία B, H, Θ είναι συνευθειακά.