ΜΙΑ «ΧΗΡΑ» ΒΟΗΘΕΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

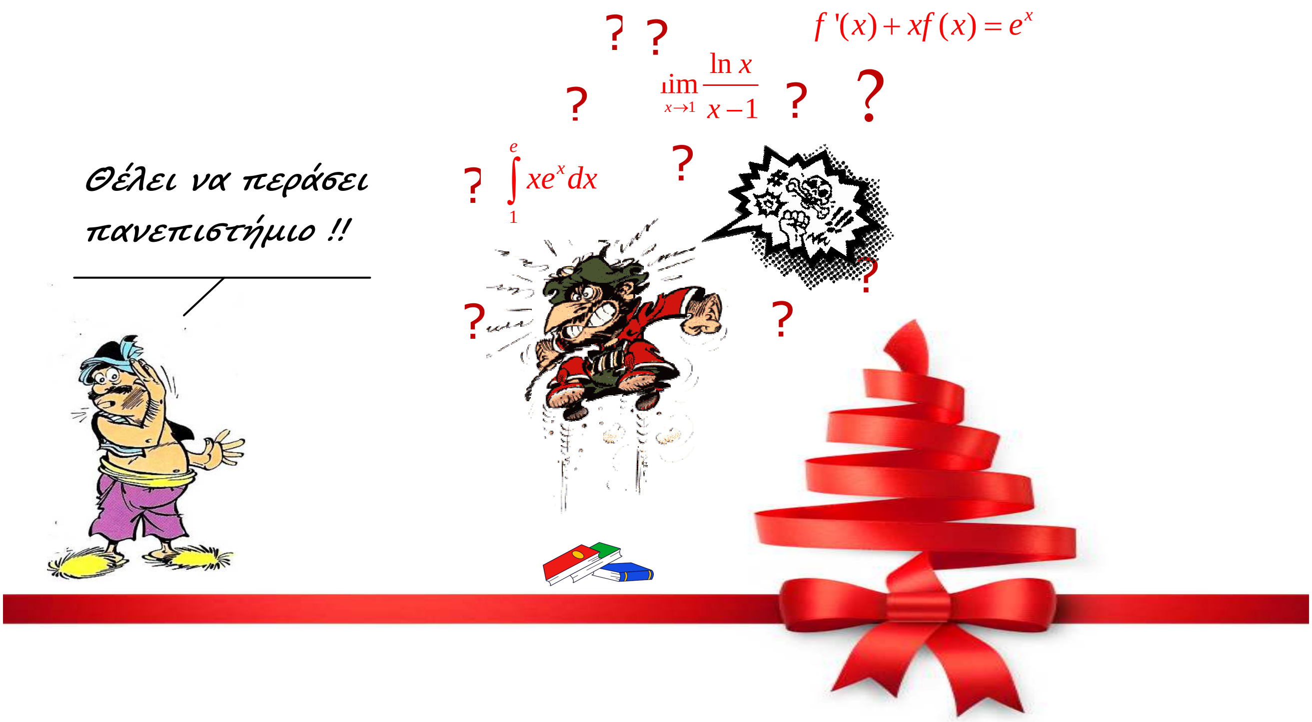
ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γιάννης Μήταλας
Θανάσης Δρούγας
Βαλάντης Χάδος
Ξένος Γερμανός
Σπύρος Πάτσης

εκδόσεις Σ.Ο.Κ.Ο.Ν.

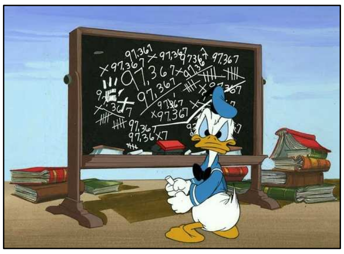
Εδώ είμαστε και φέτος .Οδηγός επανάληψης για το 2017. Έπαψε να έχει τόσα υπαρξιακά (Θ.Μ.Τ,Rolle,συνέπειες…) ,«πατάει» περισσότερο από τον προηγούμενο στο σχολικό εγχειρίδιο και έχει μια πιο *γεωμετρική* ματιά. Συνίσταται από μια μίνι επισκόπηση της θεωρίας με ερωτήσεις κλειστού τύπου και ερωτήσεις ανάπτυξης, προστεθήκαν 20 θέματα στα όρια και την συνέχεια , 40 θέματα στον διαφορικό, 20 θέματα στον ολοκληρωτικό λογισμό και 30 γενικά επαναληπτικά θέματα. Συνολικά 450 θέματα .Ενημερωθήκαν για το 2016,τα θέματα πανελληνίων και της ΟΕΦΕ. Δεν λείπουν, τα γνωστά τερατουργήματα με τα 7 ή 8 ερωτήματα. Όλα με τις λύσεις τους, γιατί ο σκοπός του παρόντος είναι να έχει υλικό ο μαθητής που θέλει να μελετήσει μόνος του. Το παρόν συμπληρώνει και δεν υποκαθιστά στο σχολικό βιβλίο.

Σ.Ο.Κ.Ο.Ν



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1)Μαθηματικά Θετικού προσανατολισμού, Ανδρεαδάκης,Κατσαργύρης,Μέτης.Ο.Ε.Δ.Β
2) Μαθηματικά Γ Λυκείου, Μπάρλας Α., Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική
3)Μαθηματικά Γ Λυκείου, Κατσαρός Δ.,Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική
4)Μαθηματικά Γ Λυκείου, Στεργίου–Νάκης,Εκδόσεις Σαββάλα
5)Μαθηματικά Γ Λυκείου, Μαυρίδης Γ., Εκδόσεις Μαυρίδη
6)Μαθηματικά Γ Λυκείου, Σκομπρής Γ., Εκδόσεις Σαββάλα
7)Μαθηματικά Γ Λυκείου ,Μιχαηλίδης Γ., Εκδόσεις Μαυρίδη
8)Ανάλυση Μαθηματικά, Αχτσαλωτίδης Χ. ,Εκδόσεις Μεταίχμιο
9)Μαθηματικά Γ Λυκείου ,Παπαδάκης ,Εκδόσεις Σαββάλα
10)Μαθηματικά Γ Λυκείου ,Ξένος. Θ. ,Εκδόσεις Ζήτη
11)Μαθηματικά-Ανάλυση,Μαντάς Γ. ,Εκδόσεις Μαντά
12)Μαθηματικά-Ανάλυση,Ευρυπιώτης Σ.Γ. ,Εκδόσεις Πατάκη
13)Μαθηματικα-Αναλυση,Μπαιλάκης Σ.Γ., Εκδόσεις Σαββάλα
14) Ανάλυση 1,2,3,Γκατζούλη Κ., Εκδόσεις Γκατζούλη
15) 1000+1 ασκήσεις στις παραγώγους, Ξηνταβελώνης Π.,Εκδόσεις Λιβάνη
16)Μαθηματικά Γ Λυκείου, Β &Ρ Σπανδάγου.,Εκδόσεις Αίθρα
17)Μαθηματικά Γ Λυκείου, Αρχείο Σ.Ο.Κ.Ο.Ν,Αρχείο ΕΜΕ, Αρχείο θεμάτων πανελλαδικών
18)ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β
19)Συναρτήσεις,Ποσταντζής Β.
20)Βιβλίο του διδάσκοντος. Για το μάθημα ανάλυση της Γ λυκείου,Γ.Παντελίδη, Εκδόσεις Ζήτη
21)Θεώρημα μέσης τιμής ,Γιαννιτσιώτης-Καραγιώργος, Εκδόσεις Κωστόγιαννος
22)Συναρτήσεις Θ.Ν. Καζαντζής. Εκδόσεις Τυποεκδοτική
23)Ανάλυση,Ντζιώρας.Η, Εκδόσεις Πατάκη
24)Ανάλυση,Μπαραλός Γ. Εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου
25) Απειροστικός λογισμός, Spivak M. ,Παν. Εκδόσεις Κρήτης
26)Μαθηματική ανάλυση Ρασσιάς Μ. ,Εκδόσεις Σαββάλα
24)Problems in Calculus ,I.M.Maron,Mir Publisher
25)Θέματα μαθηματικών κατεύθυνσης,Πανουσάκης Ν.,Εκδοτικός όμιλος Συγγραφέων καθηγητών
26) Το Φ
27) Η διδασκαλία του Απειροστικού λογισμού, μέσω αντιπαραδειγμάτων, Πλάταρος Γιάννης
27)Οδηγός επανάληψης στα μαθηματικά Γ λυκείου, Χ.Πατήλας, εκδόσεις Κωστόγιαννος
28)Γενικά θέματα μαθηματικών, Βλάχος. Β., Κουτσούκος Π. ,Ξηροκώστας Π. ,Πλατής Χ.
29)Problem book:Algebra and Elementary functions, Kutepov A.,Rubanov, MIR Publishers
30) Θέματα για πανελλήνιες εξετάσεις πρώτης δέσμης,Σάκης Λιπορδέζης
31)The theory of functions of a real variable, R.L.Jeffery
32)A Problem book in mathematical analysis,G.N Berman
33) Bad problems in Calculus, A.G .Drolkun
34) Μαθηματικά 1,2,3 Γ.Δεμερτζής,Δ.Γουβίτσας Εκδόσεις Όλυμπος
35)Μεθοδολογία για ασκήσεις και προβλήματα μαθηματικών, Α.Καλομητσίνης, Εκδόσεις Σμίλη
36)Διδακτικη των θετικών επιστημών, Δ.Λ. Καραγεώργος
37)Επαναληψη μαθηματικών Γ λυκείου,Ν.Κουταντζής
38)Επιλογη ασκήσεων από την διεθνή θεματογραφία Γ ενιαίου λυκείου Α.Καλομητσίνης
39)Ασκησεις μαθηματικής ανάλυσης, Στάικου Β
40)Differential Calculus ,N.Ball
41)Calculus,E.Swokowski
42)Problems in Algebra ,T.Andreesku, Z.Feng
43)Ολοκληρώματα , Θ.Ν. Καζαντζής. Εκδόσεις Μαθηματική βιβλιοθήκη
44)Οδηγός προετοιμασίας για τις πανελλαδικές εξετάσεις (Lisari team)
45)Μαθηματικά Γ τάξης Γενικού Λυκείου ,Κανδυλας ,Ζανταριδης…



Τα σχήματα επιμελήθηκε ο Ντόναλντ Ντάκ ενώ τους γραμμοκώδικες (qr-code) δημιούργησε ο Οβελίξ σε συνεργασία με τον Κακοφωνίξ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ –ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ**
- **ΟΡΙΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑ:**
- **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**
- **ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**
- **ΓΕΝΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ**

Στο σύνδεσμο:
https://drive.google.com/open?id=0B8YC2ZtENtdoWWQwUHFZTWNKWHc

- **ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΟ 2016 (ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ,ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ,ΟΜΟΓΕΝΩΝ,ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ)**
- **ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε ΜΕΧΡΙ ΤΟ 2016**

Για επανάληψη μόνο στην έννοια της συνάρτησης (σύνθεση, αντίστροφη , γραφικές παραστάσεις κ.τ.λ) μελετήστε το αρχείο με λυμένα επαναληπτικά θέματα στο σύνδεσμο:http://www.slideshare.net/gdoubos/ss-65382442

Η θεωρία συγκεντρωτικά στο αρχείο:
https://drive.google.com/file/d/0B0ncwU5ccdmNb1RfNnVJSEdLSWM/view

ΦΕΤΙΝΗ ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΑΠΟ ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για την λύση των ασκήσεων χωρίς απόδειξη οι προτάσεις:

1.Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

2.Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$$

3.Εστω f,g δυο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

i.Αν ισχύουν

α) $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

ii. Αν ισχύουν

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και β) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

4.Εστω f,g δυο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$

- Αν $f(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε θα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

- Αν, επιπλέον οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[a, \beta]$ (δηλαδή , αν υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$, με $f(\xi) \ne g(\xi)$) τότε θα ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Χρησιμοποιήστε τα άφοβα!!

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

1.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ (ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΕΛ 13)

(ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΣΕΛ 13)

1.Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εξίσωση $y = f(x)$. Σ Λ

2.Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της Cf που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x των τμημάτων της Cf που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. Σ Λ

3.Εστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β). Σ Λ

4.Δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ Λ

5.Η τιμή μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της Cf. Σ Λ

6.Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f,g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof ,ισχύει: $fog = gof$.

Σ Λ

7.Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$ αν και μόνο αν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Σ Λ

8.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$,τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)+f(x)\right] = 0$ Σ Λ

9.Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x. Σ Λ

10.Καθε συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ είναι και συνάρτηση 1-1 στο διάστημα αυτό. Σ Λ

11.Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

Αν $x_1 \ne x_2$ τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$ Σ Λ

12.Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x'x. Σ Λ

13.Ισχυει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - l) = 0$ Σ Λ

14.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Σ Λ

15.Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ Σ Λ

16.Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P(x) ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ Σ Λ

17.Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ ισχύει

$f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ Σ Λ

18.Αν για τις συναρτήσεις f,g,h ισχύει $h(x) < f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Σ Λ

19.Αν για τις συναρτήσεις f,g,h ισχύει $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) \ne \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Σ Λ

20.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Σ Λ

21. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ της γραφικής παράσταση .Αν δεν υπάρχει εφαπτομένη της Cf παράλληλη προς την ευθεία AB, τότε η f ή δεν είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ ή δεν είναι παραγωγίσιμη στο (a,β). Σ Λ

22.Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της Cf . Σ Λ

23.Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,β) και τέτοια, ώστε $f(a)\neq f(\beta)$,ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$. Σ Λ

24.Υπαρχει συνάρτηση f για την οποία κάποιο τοπικό μέγιστο είναι μικρότερο από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Σ Λ

25.Υπαρχει συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a,β) με $f(a)=f(\beta)$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$.

Σ Λ

26.Καθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ με $f(a)=f(\beta)$ και τέτοια, ώστε $f'(\xi)=0$, για κάποιο $\xi\in(a,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη στο (a,β).

Σ Λ

27.Εστω συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ με $f(a)=f(\beta)$.Αν υπάρχει εφαπτομένη της Cf παράλληλη προς τον άξονα x'x, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a,\beta]$, ούτε παραγωγίσιμη στο (a,β). Σ Λ

28.Καθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και τέτοια, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{a-\beta}$ για κάποιο $\xi\in(a,\beta)$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ ή παραγωγίσιμη στο (a,β). Σ Λ

29.Υπαρχει συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,β) με

$$f'(x)\neq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \text{ για κάθε } x\in(a,\beta)$$ Σ Λ

30.Εστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,β).Αν $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$,τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB. Σ Λ

31.Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Σ Λ

32.Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και μη σταθερή σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

33.Για όλες τις συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και τέτοιες , ώστε $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια , ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

34.Για όλες τις συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο Α και τέτοιες , ώστε $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in A$,υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in A$. Σ Λ

35.Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

36.Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη , τότε $f''(x_0)=0$. Σ Λ

37.Οι κανόνες De L'Hospital ισχύουν για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{+\infty}{+\infty}$ και $\frac{-\infty}{-\infty}$ όχι όμως και για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$ και $\frac{-\infty}{+\infty}$. Σ Λ

38. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,β) και τέτοια, ώστε $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$ ισχύει: $f(a)\neq f(\beta)$. Σ Λ

39.Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και για κάθε $x_0\in A$, το οποίο είναι θέση τοπικού μεγίστου της f υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο , ώστε $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.
Σ Λ

40.Καθε συνάρτηση f έχει ένα τουλάχιστον τοπικό ακρότατο. Σ Λ

41.Καθε συνάρτηση η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο παρουσιάζει και τοπικό ελάχιστο . Σ Λ

42.Για κάθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, αυτό είναι το μικρότερο από όλα τα τοπικά ελάχιστα. Σ Λ

43.Εστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος είναι ίση με μηδέν. Σ Λ

44. Για κάθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει ολικό μέγιστο, αυτό είναι το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά μέγιστα. Σ Λ

45.Καθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα, παρουσιάζει και ολικό ελάχιστο που είναι το μικρότερο από όλα τα τοπικά ελάχιστα. Σ Λ

46.Καθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και τέτοια ώστε $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. Σ Λ

47.Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$ να είναι σταθερή στο A. Σ Λ

48.Καθε γραφική παράσταση συνάρτησης έχει το πολύ δυο οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες . Σ Λ

49.Το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της Cf. Σ Λ

50.Εστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (a,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. Σ Λ

51.Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ η μεγαλύτερη από τις τιμές της στα κρίσιμα σημεία της και στα σημεία α,β είναι το μέγιστο της f στο $[\alpha,\beta]$. Σ Λ

52.Καθε συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ παρουσιάζει καμπή σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ στο οποίο η f'' μηδενίζεται.
Σ Λ

53.Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) και ένα σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντιστρόφως ,το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της Cf. Σ Λ

54.Εστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$.Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και ορίζεται εφαπτομένη της Cf στο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της Cf. Σ Λ

55.Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ στο οποίο είναι δυο φορές παραγωγίσιμη είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται. Σ Λ

56.Καθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει τοπικά μέγιστα, παρουσιάζει και ολικό μέγιστο που είναι το μεγαλύτερο από όλα τα τοπικά μέγιστα. Σ Λ

57.Η ευθεία $x = x_0$, λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν και τα δυο όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι ίσα με $-\infty$ ή $+\infty$.

Σ Λ

58. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Σ Λ

59.Η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Σ Λ

60.Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = +\infty$. Σ Λ

61.Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ Σ Λ

62.Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δυο του βαθμού του παρονομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες. Σ Λ

63.Κατακορυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε στα άκρα διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται και στα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν είναι συνεχής . Σ Λ

64.Καθε γραφική παράσταση συνάρτησης έχει το πολύ δυο κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Σ Λ

65.Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της Cf σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από την Cf με εξαίρεση το σημείο επαφής. Σ Λ

66.Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Σ Λ

67.Καθε συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ είναι και συνάρτηση 1-1 στο διάστημα αυτό. Σ Λ

68. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ η μικρότερη από τις τιμές της στα κρίσιμα σημεία της είναι το ελάχιστο της f στο $[\alpha,\beta]$.

Σ Λ

69. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Σ Λ

70. Αν για δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει: $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Σ Λ

71.Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων της είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' μηδενίζεται και τα άκρα του Δ που ανήκουν το πεδίο ορισμού της. Σ Λ

72.Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες . Σ Λ

73.Υπαρχει συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε διάστημα Δ και δεν έχει παράγουσα στο Δ. Σ Λ

74.Καθε συνάρτηση f έχει το πολύ μια παράγουσα σε οποιοδήποτε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της. Σ Λ

75.Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι πραγματικός αριθμός που εξαρτάται μόνο από τον τύπο της συνάρτηση f και τα όρια ολοκλήρωσης α ,β. Σ Λ

76.Στην έκφραση $\int_a^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Σ Λ

77.Για κάθε συνάρτηση f συνεχή σε διάστημα $[a,\beta]$ ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx=\int_a^\beta f(t)dt$$ Σ Λ

78. Για κάθε συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τέτοια, ώστε $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την Cg , τον άξονα x'x και τις ευθείες x=α ,x=β είναι $E=\int_a^\beta (g(x))dx$ Σ Λ

79. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής, μη αρνητική και όχι παντού μηδέν σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ ισχύει: $\int_a^\beta f(x)dx>0$ Σ Λ

80.Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $a,\beta\in\Delta$ ισχύει η σχέση

$$\int_a^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$$ Σ Λ

81.Για όλες τις συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες x=α ,x=β είναι

$$E=\int_a^\beta \left(|f(x)|-|g(x)|\right)dx$$ Σ Λ

82.Για όλες τις συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_a^\beta(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int_a^\beta f(x)dx+\mu\int_a^\beta g(x)dx$$ Σ Λ

83.Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $a,\beta,\gamma\in\Delta$

$$\int_a^\beta f(x)dx=\int_a^\gamma f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx$$ Σ Λ

84. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και για κάθε παράγουσα G της f στο $[a,\beta]$ ισχύει

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(a) - G(\beta)$$ Σ Λ

85. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ ισχύει

$$\int_a^\beta f'(x)dt = f(\beta) - f(\alpha)$$ Σ Λ

86.Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται από τον τύπο

$$\int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(\beta)} f(u)du$$ Σ Λ

87.Παράγουσα συνάρτησης μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και ισχύει

$F'(x) = f(x)$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ. Σ Λ

88. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και μη αρνητική σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$$ Σ Λ

89. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και τέτοιο ώστε

$\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$ ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$. Σ Λ

90.Για κάθε $a,\beta,c \in \Delta$ ισχύει η σχέση: $\int_a^\beta c dx = c(a-\beta)$ Σ Λ

91. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής, μη αρνητική σε ένα διάστημα $[a,\beta]$, τα εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την Cf, τον άξονα των x'x και τις ευθείες x=α ,x=β είναι

$$E = \int_a^\beta f(x)dx$$ Σ Λ

92. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x)dx = 0$$ Σ Λ

93. Για όλες τις συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και τέτοιες ώστε $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες x=α ,x=β είναι

$$E = \int_a^\beta \left(f(x) - g(x)\right)dx$$ Σ Λ

94. Για όλες τις συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες με f',g' συνεχείς σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^\beta + \int_a^\beta f'(x)g(x)dx$$ Σ Λ

95. Για κάθε συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$,το $\int_{a}^{\beta}(g(x))dx$ είναι ίσο με το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=α ,x=β . Σ Λ

96. Κάθε συνάρτηση f η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ δεν παίρνει ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή σε αυτό το διάστημα. Σ Λ

97. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Σ Λ

98. Η συνάρτηση $f(x)=a^x, x\in\mathbb{R}, a>0$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)=a^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Σ Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ

1. Σ	2. Σ	3. Σ	4. Σ	5.Σ	6.Λ	7.Σ	8.Λ	9.Σ	10.Σ	11.Σ	12.Λ	13.Σ
14.Σ	15.Λ	16.Σ	17.Λ	18.Σ	19.Λ	20.Σ	21.Σ	22.Σ	23.Λ	24. Σ	25.Σ	26.Λ
27.Λ	28.Λ	29.Σ	30.Σ	31.Σ	32.Λ	33.Σ	34.Λ	35.Λ	36.Σ	37. Λ	38. Σ	39.Λ
40.Λ	41.Σ	42.Σ	43.Σ	44.Σ	45.Λ	46.Λ	47.Λ	48.Σ	49.Σ	50.Σ	51.Σ	52.Λ
53.Σ	54.Σ	55.Σ	56.Λ	57.Λ	58.Σ	59. Σ	60.Λ	61.Σ	62.Σ	63.Σ	64.Λ	65.Σ
66.Σ	67.Σ	68.Λ	69.Λ	70.Λ	71.Σ	72.Σ	73.Λ	74.Λ	75.Σ	76.Σ	77.Σ	78.Λ
79.Σ	80.Σ	81.Λ	82.Σ	83.Λ	84.Λ	85.Σ	86.Σ	87.Λ	88.Σ	89.Λ	90.Λ	91.Σ
92.Λ	93.Σ	94.Λ	95.Λ	96. Λ	97.Λ	98.Λ						

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ (ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ)

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1)(Ημερήσιες 2002)

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,τότε:

$$\int f(x)dx = xf(x)-\int xf'(x)dx .$$

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 .

2)(Ημερήσιες 2003)

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

3)(Ημερήσιες 2004)

β. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l$.

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$.

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha) .$$

4)(Ημερήσιες 2005)

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α) < 0 και υπάρχει ξ $\in$ (α, β) ώστε f(ξ) = 0, τότε κατ' ανάγκη f(β) > 0.

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και f(x) > 0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)-f(\alpha)$ για κάθε $x\in\Delta$.

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

5)(Ημερησιες 2006)

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε f(x)>0 κοντά στο x_0.

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Ισχύει ο τύπος $\left(3^x\right)' = x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx,$$

όπου f ', g ' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

6)(Ημερήσιες 2007)

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε x $\in$ [α, β] ισχύει f(x) ≥ 0 τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx>0$.

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f '(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.

7)(Ημερήσιες 2008)

α. Αν μια συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$f^{-1}(f(x)) = x, \ x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, \ y \in f(A)$.

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ε.Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, $\gamma \in \Delta$ τότε ισχύει
: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

8)(Ημερήσιες 2009).

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα x'x είναι: $E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

9) (Ημερήσιες 2010)

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β), όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x, \ x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

10)(Ημερησιες 2011)

β) Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1–1, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η

συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid συνx = 0\}$ ισχύει: $(εφx)' = -\dfrac{1}{συν^2x}$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημx}{x} = 1$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C ' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

11) (Ημερήσιες 2012)

β) Μία συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ) $(σφx)' = \dfrac{1}{ημ^2x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid ημx = 0\}$.

ε) $\int_α^β f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_α^β + \int_α^β f'(x)g(x)dx$, όπου f ', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

12) (Ημερήσιες 2013)

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

γ) Ισχύει ότι: $|ημx| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{συνx - 1}{x} = 1$.

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

13) (Ημερήσιες 2014)

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $α, β, γ \in Δ$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx .$$

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

14)(Ημερήσιες 2015)

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι fog = gof.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(συνx)' = ημx$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι f(x) ≥ 0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ε) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και f(x) > 0 κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

15)(Επαναληπτικές 2003)

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

γ. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 $\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

16) (Επαναληπτικές 2004)

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

17)(Επαναληπτικές 2005)

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο Α(x_0, f(x_0)) είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog $\neq$ gof.

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx .$$

18)(Επαναληπτικές 2006)

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και g(x_0) ≠ 0, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)\,g'(x_o) - f'(x_o)\,g(x_o)}{\left[g(x_o)\right]^2} .$$

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left[\ln|x|\right]' = \frac{1}{x}$.

δ. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta) .$$

19)(Επαναληπτικές 2007)

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx .$$

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) όπου $A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

20)(Επαναληπτικές 2008)

α.Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β.Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

γ.Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x'x.

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) - l\right) = 0$.

21) (Επαναληπτικές 2009)

β. Η συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

δ. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

22)(Επαναληπτικές 2010)

α) Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$.

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει f(x) ≥ 0 για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

23)(Επαναληπτικές 2011)

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1- 1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

24) (Επαναληπτικές 2012)

α)Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x'x, της γραφικής παράστασης της f.

γ)Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta).$$

25)(Επαναληπτικές 2013)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(-f(x)\right) = +\infty$.

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

26) (Επαναληπτικές 2014)

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$$

γ) Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

27)(Επαναληπτικές 2015)

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε πάντοτε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$

28)(Ημερήσιες 2016)

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο$[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

29)(Επαναληπτικές 2016)

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε x≠0, τότε $f'(x)=\frac{1}{|x|}$ για κάθε x≠0.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο [α,β], ισχύει:

αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ στο [α,β].

30)(Εσπερινά 2016)

α) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει f(x) ≤ g(x) κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f'(x)=0 για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση y=f(x) έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ –ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1)(Ημερήσιες 2002)Απ: α. Λ β. Λ γ. Σ δ .Σ ε .Σ

2) (Ημερήσιες 2003)Απ: β . Σ δ .Λ ε .Λ

3)(Ημερήσιες 2004)Απ:β – *, γ .Λ, δ . Λ, ε . Σ

(*)Η απάντηση στο ερώτημα Γ β μπορεί να χαρακτηρισθεί Σωστό μόνο εφ' όσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Όπως είναι διατυπωμένη, σωστό είναι μόνο το αντίστροφο. Δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, αφού για την περίπτωση του ευθέως μπορεί να θεωρηθούν ως σύνολα ορισμού της f και τα μεμονωμένα σύνολα $(α,x_0)$ ή $(x_0,β)$. Επομένως από αυστηρή μαθηματική άποψη, η απάντηση είναι Λάθος.

4)(Ημερήσιες 2005) Απ:Β. α .Λ, β.Λ γ .Σ δ .Σ ε . Λ στ .Σ

5)(Ημερήσιες 2006)Απ:α. Λ β .Σ γ. Σ δ .Λ ε. Σ

6) (Ημερήσιες 2007)Απ: α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ.

7)(Ημερήσιες 2008) Απ: α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

8)(Ημερήσιες 2009) Απ: β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

9)(Ημερήσιες 2010)Απ: β . Σ γ . Λ δ .Λ ε . Σ

10)(Ημερήσιες 2011)Απ: β .Σ γ . Λ δ .Λ ε . Σ

11)(Ημερήσιες 2012)Απ: β . Σ, γ.Λ, δ.Λ, ε.Λ

12)(Ημερήσιες 2013)Απ: β . Σ, γ . Σ, δ.Λ, ε.Σ.

13)(Ημερήσιες 2014)Απ:β.Σ, γ.Σ, δ . Σ, ε . Λ.

14)(Ημερήσιες 2015)Απ: α) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

15)(Επαναληπτικές 2003) Απ: Λ – Λ – Σ

16) (Επαναληπτικές 2004)Απ: Λ – Λ – Σ – Σ

17)(Επαναληπτικές 2005)Απ: Σ – Λ– Λ– Σ

18)(Επαναληπτικές 2006) Απ: Λ – Σ – Σ – Λ

19)(Επαναληπτικές 2007)Απ: Λ – Λ – Σ – Σ – Λ

20)(Επαναληπτικές 2008)Απ: α – Σ, β – Λ, γ – Σ, ε – Σ

21) (Επαναληπτικές 2009)Απ: β – Σ, γ – Λ,δ – Λ,

22)(Επαναληπτικές 2010)Απ: α – Λ, β – Λ, γ – Σ, δ – Σ,

23)(Επαναληπτικές 2011) Απ: β – Σ, γ – Σ, δ – Σ, ε – Λ

24) (Επαναληπτικές 2012) Απ: α – Σ, γ – Λ,δ – Σ, ε – Λ

25)(Επαναληπτικές 2013) Απ: β – Λ, γ – Σ,δ – Λ,ε – Σ

26) (Επαναληπτικές 2014) Απ: β – Σ, γ – Λ, δ – Λ,

27)(Επαναληπτικές 2015) Απ.:β – Σ, γ – Λ, δ – Λ, ε – Λ

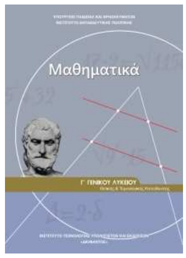
28)(Ημερήσιες 2016) Απ.: ***α)*** Λ, ***β)*** Σ, ***γ)*** Λ, ***δ)*** Σ, ***ε)*** Σ

29)(Επαναληπτικές 2016) Απ.: α. Λ, β. Λ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Λ.

30)(Εσπερινά 2016)Απ.: α – Λ, β – Σ, γ – Λ, δ – Σ, ε – Σ

2.ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ξεκοκαλίζουμε την θεωρία στο σχολικό γιατί οι μονάδες του πρώτου θέματος έχουν την ίδια αξία με τις μονάδες του τέταρτου. Πρέπει να μπορείτε Να απαντήσετε άμεσα σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις θεωρίας.



1.Να δώσετε τον ορισμό μιας πραγματικής συνάρτησης.
2.Τι ορίζουμε ως σύνολο τιμών μιας συνάρτησης.
3.Τι είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;
4.Ποτε δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
(πανελλαδικές 2007,2016,2012)
5.Ποτε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της;
6.Τι ονομάζουμε σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g;
7.Να δώσετε τον ορισμό του ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου μιας συνάρτησης f; *(Πανελλαδικές 2014)*
8.Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται 1-1;
(πανελλαδικές 2015)
9.Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 ποια συνάρτηση ορίζουμε ως αντίστροφη της f;
10.Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις Cf και Cf^{-1} των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$;
11.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_0 την ιδιότητα P;
12.Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P(x) και $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
13.Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
14.Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.
15.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
(Πανελλαδικές 2009,επαν)
16.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής.
17.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της.*(Πανελλαδικές 2008,2012)*
18.Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.*(Πανελλαδικές 2014 επαν.)*
19.Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.*(Πανελλαδικές 2005)*
20.Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.
21.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
22.Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στης παραγωγίσιμης συνάρτησης f το σημείο της Α(x_0, $f(x_0)$).
23.Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής σε αυτό. *(Πανελλαδικές 2004,2009,2013 επαν)*
24.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.
25.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της.
26. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της. *(Πανελλαδικές 2013)*
27.Να αποδείξετε ότι $(x)' = 1$
28.Να αποδείξετε ότι $(c)' = 1$

29. Να αποδείξετε ότι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}^*, \nu \neq 1$

30. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$ *(Πανελλαδικές 2009 επαν)*

31. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

32.Να αποδείξετε ότι $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}^*$

33.Να αποδείξετε ότι $(x^{a})' = a x^{a-1}, x > 0$, όπου $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

34. Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ *(πανελλαδικές εσπερ.2015)*

35. Να αποδείξετε ότι $(a^{x})' = a^{x}\ln a, a > 0$

36. Να αποδείξετε ότι $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ *(Πανελλαδικές 2008)*

37.Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.*(Πανελλαδικές 2012 επαν)*

38.να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. *(Πανελλαδικές 2016,2013)*

39.Εστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και τέτοια, ώστε $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. *(πανελλαδικές 2009, 2014)*

40.Εστω δυο συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και τέτοιες ώστε $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$

41.Ετσω μια συνάρτηση f,η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και τέτοια, ώστε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. (πανελλαδικές 2006,2012)

42.Ποτε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; *(Πανελλαδικές 2012)*

43. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

44.Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.*(Πανελλαδικές 2004,2011,2013 επαν)*

45.Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

46.Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. *(πανελλαδικές 2013 επαν)*

47.Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημεία του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (a,x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0,β) να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f.*(Πανελλαδικές 2016,2012 επαν)*

48.Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημεία του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) < 0$ στο (a,x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0,β) να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.

49.Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημεία του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$,να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a,β).*(Πανελλαδικές 2014 επαν)*

50.Πως υπολογίζουμε το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f, η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$.

51.Εστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; Να δώσετε την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία.

52. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ; Να δώσετε την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία. *(Πανελλαδικές 2006,2010, 2014)*

53.Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f.

54.Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ;

55.Ποτε η ευθεία x=xo λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f; *(πανελλαδικές 2010,2015)*

56.Ποτε η ευθεία y=β λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;*(πανελλαδικές 2007)*

57. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; *(πανελλαδικές 2005,2011)*

58.Να διατυπώσετε τον κανόνα de l'Hospital για την μορφή $\frac{0}{0}$;

59.Να διατυπώσετε τον κανόνα de l'Hospital για την μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$;

60.Εστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ. *(Πανελλαδικές 2011,2014 επαν)*

61.Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι παράγουσα της F στο διάστημα Δ, να
αποδείξετε ότι :
α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ.
β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή
$G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ (Πανελλαδικές 2010,2015)

62.Εστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[a,\beta]$.Αν G είναι μια παράγουσα της f στο$[a,\beta]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta)-G(a)$$

(Πανελλαδικές 2013)

63.Να αποδείξετε ότι αν δυο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ τότε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τις Cf,Cg και τις ευθείες x=α,x=β είναι:

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$$

64. Να αποδείξετε ότι αν δυο συναρτήσεις είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ τότε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τις Cf,Cg και τις ευθείες x=α,x=β είναι:

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)-g(x)]dx$$

65. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση g είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την Cg τον άξονα x'x και τις ευθείες x=α,x=β είναι:

$$E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

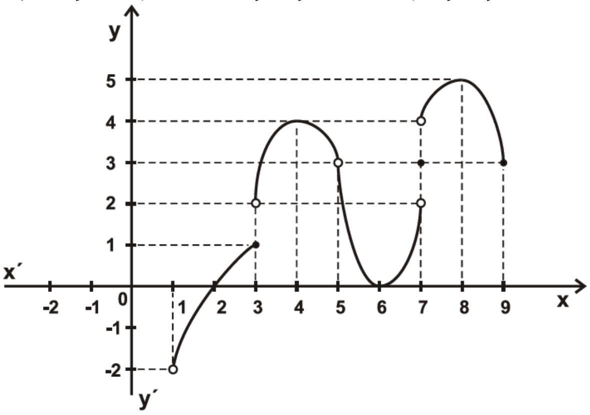
66.Να αποδείξετε ότι αν δυο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[a,\beta]$, τότε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τις Cf,Cg και τις ευθείες x=α,x=β είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1.1 Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (επαναληπτικές 2016)



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

ii. Να βρείτε,αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iv.Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

vi.Αν $\frac{9}{2}<a<\beta<\frac{25}{2}$ **να συγκρίνετε τους αριθμούς** $f(\frac{2a-1}{8}), f(\frac{2\beta-1}{8})$.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Λύση

i. $D_f=(1,5)\cup(5,9]$

$f(A)=(-2,5]$

ii. α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

β) το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=3$

δ) το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2\neq \lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4$

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=\lim\limits_{x\to 9^-} f(x)=3$

iii. α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει διότι:

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$, αφού $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0 \text{ και}\\ f(x)<0 \text{ στο } (1,2)\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, αφού $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0 \text{ και}\\ f(x)>0 \text{ στο } (2,3)\end{cases}$

β) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, διότι $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0 \text{ και}\\ f(x)>0 \text{ στο } (5,6)\cup(6,7)\end{cases}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x)) \underset{\lim\limits_{x\to 8} f(x)=5}{\overset{\text{Θέτω } f(x)=u}{\longrightarrow}} \lim\limits_{u\to 5} f(u)=3$

iv. Στο $x_1=3$ η f δεν είναι συνεχής, διότι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$.

Στο $x_2=7$ η f δεν είναι συνεχής, διότι $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2\neq \lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4$.

<u>*Σημείωση*</u>: Στο $x_3=5$ δεν μιλάμε για συνέχεια της f, διότι $5\notin D_f$

vi. $\dfrac{9}{2}<a<\beta<\dfrac{25}{2}\Leftrightarrow 9<2a<2\beta<25\Leftrightarrow 8<2a-1<2\beta-1<24\Leftrightarrow 1<\dfrac{2a-1}{8}<\dfrac{2\beta-1}{8}<3$

αλλά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,3)$ συνεπώς $f(\dfrac{2a-1}{8})<f(\dfrac{2\beta-1}{8})$

1.2 (Υπενθύμιση στα βασικά) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια , ώστε

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\alpha^2+5$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=6\alpha$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$

i.Να βρείτε τις τιμές του α, αν είναι γνωστό $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\in\mathbb{R}$

ii.Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(x)\le 4x$ για κάθε $x\in(1,3)$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

iii.Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\left|\dfrac{2f(x)}{f^2(x)+1}\right|\le 1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x)}{f^2(x)+1}=0$

Ωπα μεγάλε , οι σχέσεις του ερωτήματος iii ισχύουν για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Λύση

i. Εφόσον $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ συνεπώς

$6\alpha=\alpha^2+5\Leftrightarrow \alpha^2-6\alpha+5=0\Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha=5$

ii. $f(x)\le 4x$ για κάθε $x\in(1,3)$ άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\le \lim\limits_{x\to 2} x$ κοντά στο 2 άρα $\alpha^2+5\le 8$

και επειδή $\alpha=1$ ή $\alpha=5$ συμπεραίνουμε ότι α=1.

iii.Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται:

$$\left|\frac{2f(x)}{f^2(x)+1}\right|\le 1\Leftrightarrow \frac{2|f(x)|}{|f^2(x)+1|}\le 1 \overset{f^2(x)+1>0 \text{ για καθε } x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} 2|f(x)|\le f^2(x)+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή

$$2|f(x)|\le |f(x)|^2+1\Leftrightarrow 0\le |f(x)|^2-2|f(x)|+1\Leftrightarrow (|f(x)|-1)^2\ge 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

η οποία ισχύει άρα θα ισχύει και η αρχική.

β) Από το ερώτημα α)

$$\left|\frac{2xf(x)}{f^2(x)+1}\right|=|x|\left|\frac{2f(x)}{f^2(x)+1}\right|\le |x| \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Συνεπώς $-|x|\le \dfrac{2f(x)}{f^2(x)+1}\le |x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ από το κριτήριο

παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x)}{f^2(x)+1}=0$

1.3 Για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **ισχύει:** $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$ **για κάθε** $x,y\in\mathbb{R}$ **και** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=10$ **.Να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$**.**

Λύση

Θέτουμε $x-2=y$ οπότε $x=y+2$. Όταν $x\to 2$ το $y\to 0$. Άρα:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y+2)-f(2)}{y}\overset{(\upsilon\pi)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(y)+f(2)-y\cdot 2-f(2)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-2y}{y}=$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\frac{f(y)}{y}-\frac{2y}{y}\right]=\lim_{y\to 0}\left[\frac{f(y)}{y}-2\right]=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}-2\overset{(1)}{=}10-2=8.$$

1.4Έστω $f(x)=\dfrac{\left|2x^3-4x+1974\right|-\lambda x}{x^3-2015}$ **,** $\lambda\in\mathbb{R}$ **.Να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$**.**

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-4x+1974)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$.Κατά συνέπεια θα υπάρχει $\kappa\in\mathbb{R}$ τ.ω για κάθε $x\in(-\infty,\kappa)$ να ισχύει $2x^3-4x+1974<0$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,\kappa)$ έχουμε $\left|2x^3-4x+1974\right|=-2x^3+4x-1974$.

Έτσι ο τύπος της f γράφεται

$$f(x)=\frac{-2x^3+4x-1974-\lambda x}{x^3-2015}=\frac{-2x^3+(4-\lambda)x-1974}{x^3-2015}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+(4-\lambda)x-1974}{x^3-2015}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{x^3}=-2$$

1.5(Άσκηση Μπριάμ)

i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\beta|x-4|-\alpha|x+2|-2}{x^2-4x+3}$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β έτσι ώστε να ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=8$ **.**

ii)Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος (i) να υπολογίσετε το όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\beta+14}{|x|}-\dfrac{\alpha+4}{x^2}\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\left|\alpha+5-\sqrt{x}\right|}{\sigma\upsilon\nu x+\beta+14}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x-\beta+4\alpha}-1}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{1,3\}$.Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)\left(x^2-4x+3\right)=\beta|x-4|-\alpha|x+2|-2$$

Όμως ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=8$ και $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-4x+3\right)=0$

Άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\left(\beta|x-4|-\alpha|x+2|-2\right)=8\cdot 0\Leftrightarrow -5\alpha+\beta-2=0\Leftrightarrow -5\alpha+\beta=2\quad (1)$$

Εφόσον, $x\to 3$,μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x\in(-2,3)\cup(3,4)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases}x>-2\\x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2>0\\x-4<0\end{cases}\ \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ \begin{cases}|x+2|=x+2\\|x-4|=-x+4\end{cases}$$

Έτσι, ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x)=\frac{\beta|x-4|-\alpha|x+2|-2}{x^2-4x+3}=\frac{\beta(-x+4)-\alpha(x+2)-2}{x^2-4x+3}\overset{(1)}{=}\frac{(2+5\alpha)(-x+4)-\alpha(x+2)-2}{(x-1)(x-3)}=\dots$$

$$\dots=\frac{-6\alpha x+18\alpha-2x+6}{(x-1)(x-3)}=\frac{-6\alpha(x-3)-2(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\frac{(x-3)(-6\alpha-2)}{(x-1)(x-3)}=\frac{-6\alpha-2}{x-1}$$

$\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-6\alpha-2}{x-1}=\dfrac{-6\alpha-2}{2}=-3\alpha-1$

Έχουμε:

$-3\alpha-1=8\Leftrightarrow\alpha=-3$

Έτσι από την (1) $-5\alpha+\beta=2\overset{\alpha=-3}{\Leftrightarrow}-5(-3)+\beta=2\Leftrightarrow15+\beta=2\Leftrightarrow\beta=-13$

Πραγματικά για $\beta=-13$, $\alpha=-3$ ισχύει $\lim\limits_{x\to3} f(x)=8$.

ii) α) Για $\beta=-13$, $\alpha=-3$ ισχύει

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{-13+14}{|x|}-\frac{-3+4}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|x^2|}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|x|^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{|x|}(1-\frac{1}{|x|})\right)=(+\infty)(1-(+\infty))=(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

β) $$\lim_{x\to\pi}\frac{\left|\alpha+5-\sqrt{x}\right|}{\sigma\upsilon\nu x+\beta+14}\overset{\alpha=-3,\beta=-13}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{\left|-3+5-\sqrt{x}\right|}{\sigma\upsilon\nu x-13+14}=\lim_{x\to\pi}\frac{\left|2-\sqrt{x}\right|}{\sigma\upsilon\nu x+1}$$

Ισχύει: $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\sigma\upsilon\nu x+1\right)=-1+1=0$

Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu x>-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x+1>0$

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}=+\infty$

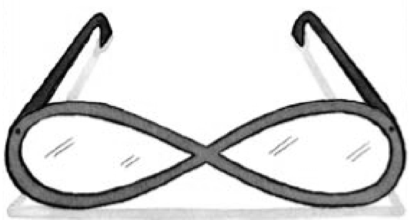
Οπότε $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\left|2-\sqrt{x}\right|}{\sigma\upsilon\nu x+1}=\lim\limits_{x\to\pi}\left|2-\sqrt{x}\right|\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}=\lim\limits_{x\to\pi}\left|2-\sqrt{x}\right|\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}=\left|2-\sqrt{\pi}\right|(+\infty)=+\infty$

γ) $$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x-\beta+4\alpha}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x-(-13)+4(-3)}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+13-12}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(\eta\mu x)x}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

$=1\cdot2=2$



Γυαλιά για αυτούς που βλέπουν..μακριά!!

1.5 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$ και ικανοποιεί τις συνθήκες: $\left[f(x)\right]^3+xf(x)=1$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-1\right)=0$. Γι' αυτό από τη δοσμένη σχέση θα προσπαθήσουμε να σχηματίσουμε τη διαφορά. Είναι :

$$\left[f(x)\right]^3-1^3+xf(x)=0\Leftrightarrow\left[f(x)-1\right]\cdot\left[\left(f(x)\right)^2+f(x)\cdot 1+1^2\right]+xf(x)-x+x=0\Leftrightarrow$$

$$\left[f(x)-1\right]\cdot\left[\left(f(x)\right)^2+f(x)+1\right]+x\left[f(x)-1\right]=-x\Leftrightarrow\left[f(x)-1\right]\cdot\left[\left(f(x)\right)^2+f(x)+1+x\right]=-x$$

Και αφού $x\ge 0, f(x)>0$ είναι $\left(f(x)\right)^2+f(x)+x+1>0$, άρα

$f(x)-1=\dfrac{-x}{\left(f(x)\right)^2+f(x)+x+1}$, οπότε $\left|f(x)-1\right|=\dfrac{|-x|}{\left|\left(f(x)\right)^2+f(x)+x+1\right|}\le|x|$ και έτσι:

$-|x|\le f(x)-1\le|x|\Leftrightarrow 1-|x|\le f(x)\le 1+|x|$ και αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+|x|\right)=1$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

1.6 Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$f(x)f(y)+xy=xf(y)+yf(x)$ **,για κάθε** $x,y\in\mathbb{R}$

i)Να βρείτε τον τύπο της f.

ii)Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$

Λύση

i)Η ισότητα $f(x)f(y)+xy=xf(y)+yf(x)$ ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ άρα θα ισχύει ακόμα και αν βάλουμε όπου y το x ,έτσι:

$$f(x)f(x)+x^2=xf(x)+xf(x)\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^2-2xf(x)+x^2=0\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-x\right)^2=0\Rightarrow f(x)-x=0\Leftrightarrow f(x)=x$$

Η f(x)=x ικανοποιεί την υπόθεση οπότε είναι η ζητούμενη συνάρτηση .

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

1.7(Oldies but goodies)

i)Αν κοντά στο x_0 ισχύει $f(x)\ge 0$ και $g(x)\ge 0$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=0$,να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

ii)Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f^2(x)+g^2(x))=0$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

iii)Αν $f^2(x)+g^2(x)+2f(x)-4g(x)+5\le\sqrt{|x|}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Λύση

i) Κοντά κοντά στο x_0 θα ισχύει: $0\le f(x)\le f(x)+g(x)$ και επειδή είναι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.Ομοίως προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

ii)Προφανώς ισχύει $f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)}\le\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\Leftrightarrow\left|f(x)\right|\le\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\Leftrightarrow$

$-(\sqrt{f^2(x)+g^2(x)})\le f(x)\le\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ και εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.Ομοίως προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

iii)Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$f^2(x)+g^2(x)+2f(x)-4g(x)+5\le\sqrt{|x|}\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+1-1+g^2(x)-4g(x)+4-4+5\le\sqrt{|x|}\Leftrightarrow$$

$\left(f^2(x)+2f(x)+1\right)-1+\left(g^2(x)-4g(x)+4\right)-4+5\le\sqrt{|x|}\Leftrightarrow\left(f(x)+1\right)^2+\left(g(x)-2\right)^2\le\sqrt{|x|}$

Τελικά $0\le\left(f(x)+1\right)^2+\left(g(x)-2\right)^2\le\sqrt{|x|}$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}0=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}=0$

από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(\left(f(x)+1\right)^2+\left(g(x)-2\right)^2\right)=0$.

Από το ερώτημα (ii) θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)+1\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(g(x)-2\right)=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to0}g(x)=2$.

1.8Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{x+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[5]{x}}}$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt[15]{x}=u$ άρα $x=u^{15}$ με 15=Ε.Κ.Π(3,5)

Έτσι το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{x+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[5]{x}}}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt[5]{u^{15}+\sqrt[3]{u^{15}}}}{\sqrt[3]{u^{15}+\sqrt[5]{u^{15}}}}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt[5]{u^{15}+u^5}}{\sqrt[3]{u^{15}+u^3}}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt[5]{u^5(u^{10}+1)}}{\sqrt[3]{u^3(u^{12}+1)}}=\lim_{u\to0}\frac{u\sqrt[5]{u^{10}+1}}{u\sqrt[3]{u^{12}+1}}=\lim_{u\to0}\frac{\sqrt[5]{u^{10}+1}}{\sqrt[3]{u^{12}+1}}=1$$

1.9 Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο R και ισχύουν:

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)\eta\mu x-xf(x)}{2x}=1 \quad\text{και}\quad \lim_{x\to0}\frac{g(x)\eta\mu x+xf(x)}{\eta\mu x}=\frac{1}{2}$$

Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to0}g(x)$**.**

Λύση

Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{g(x)\eta\mu x-xf(x)}{2x}$ και $\phi(x)=\dfrac{g(x)\eta\mu x+xf(x)}{\eta\mu x}$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to0}h(x)=1$ (1) και $\lim\limits_{x\to0}\phi(x)=\dfrac{1}{2}$ (2). Άρα:

$g(x)\eta\mu x-xf(x)=2xh(x)$ (3)

$g(x)\eta\mu x+xf(x)=\eta\mu x\phi(x)$ (4) +

$$2g(x)\eta\mu x=2xh(x)+\eta\mu x\cdot\phi(x)\overset{\eta\mu x\neq0}{\Leftrightarrow}g(x)=\frac{xh(x)}{\eta\mu x}+\frac{\phi(x)}{2}=\frac{h(x)}{\frac{\eta\mu x}{x}}+\frac{1}{2}\phi(x)$$

οπότε $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}h(x)}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\phi(x)\overset{(1),(2)}{=}\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}g(x)=\dfrac{5}{4}$

- Από (3):

$$xf(x)=g(x)\eta\mu x-2xh(x)\overset{(x\neq0)}{\Leftrightarrow}f(x)=g(x)\frac{\eta\mu x}{x}-2h(x),\ \text{άρα}$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}-2\lim\limits_{x\to0}h(x)=\dfrac{5}{4}\cdot1-2\cdot1$ δηλαδή: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\dfrac{3}{4}$.

1.10 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{\kappa\lambda x^2+(\kappa+\lambda)x+1}-1}{x}$ **, όπου** $\kappa<0<\lambda$

Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της f **β)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Λύση

i) Για το πεδίο ορισμού θα πρέπει να ισχύει:

$$\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1\geq 0 \quad (1) \quad \text{και } x\neq 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=(\kappa+\lambda)^2-4\kappa\lambda=..=(\kappa-\lambda)^2>0 \quad (\kappa<0<\lambda)$$

Οπότε οι ρίζες είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-(\kappa+\lambda)\pm\sqrt{(\kappa-\lambda)^2}}{2\kappa\lambda}=\frac{-(\kappa+\lambda)\pm(\kappa-\lambda)}{2\kappa\lambda}=\begin{cases}\dfrac{-(\kappa+\lambda)+(\kappa-\lambda)}{2\kappa\lambda}=-\dfrac{1}{\kappa}\\[2mm] \dfrac{-(\kappa+\lambda)-(\kappa-\lambda)}{2\kappa\lambda}=-\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$

Επειδή $\kappa<0<\lambda$, η ανίσωση (1) θα ισχύει: $-\dfrac{1}{\lambda}\leq 0\leq -\dfrac{1}{\kappa}$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο: $\left[-\dfrac{1}{\lambda},0\right)\cup\left(0,-\dfrac{1}{\kappa}\right]$.

β) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\kappa\lambda x^2+(\kappa+\lambda)x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}-1\right)\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}\right)^2-1^2\right)}{x\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1-1}{x\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x}{x\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\lambda\kappa x+(\kappa+\lambda))}{x\left(\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda\kappa x+(\kappa+\lambda)}{\sqrt{\lambda\kappa x^2+(\kappa+\lambda)x+1}+1}=\frac{\lambda\kappa\cdot 0+(\kappa+\lambda)}{\sqrt{\lambda\kappa\cdot 0^2+(\kappa+\lambda)0+1}+1}=\frac{\kappa+\lambda}{2}$$

1.11 Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(\sqrt{x^2+1}-x)]$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x^2+1}-x=u$ και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(\sqrt{x^2+1}-x)]=\lim\limits_{u\to 0^+}[\ln(u)]=-\infty$

1.12 Αν $f(x)=\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+2x+2}-3x+2$ **και** $g(x)=\dfrac{2^{x+1}-3^x+2}{2^x+3^{x+1}+2}$

Να βρείτε τα όρια **i)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

Λύση

i) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+2x+2}-3x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x+\sqrt{x^2+2x+2}-x+2\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{4x^2+4x+3}-2)\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x}+\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}+2\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+4x+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x}+\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}+2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x}+\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}+2\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x}+\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}+2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{|x|\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)}+\frac{2x+2}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\right)}+2\right) \overset{x>0}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{x\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)}+\frac{2x+2}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}+2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)}+\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}+2\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(4+\frac{3}{x}\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)}+\frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}+2\right) = \frac{(4+0)}{\left(\sqrt{4+0+0}+2\right)}+\frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+0+0}+1\right)}+2 = \frac{4}{4}+\frac{2}{2}+2 = 4$$

ii)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x\left(3+\frac{2}{x}\right)\right) \overset{x>0}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x\left(3+\frac{2}{x}\right)\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\left(3+\frac{2}{x}\right)\right)\right) =$$

$$(+\infty)\left(\sqrt{4+0+0}+\sqrt{1+0+0}+(3+0)\right) = (+\infty)(6) = +\infty$$

iii)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}-3^x+2}{2^x+3^{x+1}+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 2^x-3^x+2}{2^x+3\cdot 3^x+2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-1+\frac{2}{3^x}\right)}{3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+3+\frac{2}{3^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-1+\frac{2}{3^x}}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+3+\frac{2}{3^x}} = \frac{2\cdot 0-1+0}{0+3+0} = -\frac{1}{3}$$

iv) $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}-3^x+2}{2^x+3^{x+1}+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot 2^x-3^x+2}{2^x+3\cdot 3^x+2} = \frac{2\cdot 0-0+2}{0+3\cdot 0+2} = 1$$

1.13 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **με** $\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-x}{x} = 2$

i)να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$ **και** $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

ii) να υπολογίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$**, ώστε** $\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\lambda x\eta\mu x}{x^2\eta\mu x+f^2(x)} = 5$

iii)Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)+x}{x+\eta\mu x}$

Λύση

i) Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)-x}{x}$ με $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$ και $f(x) = xg(x)+x$, οπότε το $\lim_{x\to 0} g(x)$ υπάρχει και είναι:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(xg(x)+x) = 0\cdot 2+0 = 0$

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(g(x)+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(g(x)+1) = 3$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\lambda x\eta\mu x}{x^2\eta\mu x+f^2(x)} \overset{:x^2}{\underset{:x^2}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{xf(x)+\lambda x\eta\mu x}{x^2}}{\dfrac{x^2\eta\mu x+f^2(x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{xf(x)}{x^2}+\dfrac{\lambda x\eta\mu x}{x^2}}{\dfrac{x^2\eta\mu x}{x^2}+\dfrac{f^2(x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}+\lambda\dfrac{\eta\mu x}{x}}{\eta\mu x+\dfrac{f^2(x)}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}+\lambda\dfrac{\eta\mu x}{x}}{\eta\mu x+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2} = \dfrac{3+\lambda}{0+9}$. Έτσι, $\dfrac{3+\lambda}{0+9} = 5 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda = 42$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)+x}{x+\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(\eta\mu x)+x}{x}}{\dfrac{x+\eta\mu x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}+1}{1+\dfrac{\eta\mu x}{x}} \overset{x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}}{\frac{x}{\eta\mu x}}+1}{1+\dfrac{\eta\mu x}{x}}$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}$ θέτουμε $\eta\mu x = u$ και όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$ οπότε το προηγούμενο όριο γίνεται $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u} = 3$. Τελικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)+x}{x+\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}}{\frac{x}{\eta\mu x}}+1}{1+\dfrac{\eta\mu x}{x}} = \dfrac{\frac{3}{1}+1}{1+1} = 2$

1.14 Έστω οι συναρτήσεις f,g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0$

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)^2=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4f(x)\cdot g(x)\right)=0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(f(x)-g(x)\right)^2+4f(x)\cdot g(x)\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)^2 = 0$ τότε όμως θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(f(x)+g(x)\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left|f(x)+g(x)\right| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+g(x)\right) = 0$

Όμως

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)+(f(x)+g(x))\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)-(f(x)+g(x))\right)=0\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}2f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}2g(x)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0\end{cases}$

1.15 Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε,

$$f^3(x)+f(x)=x \text{ ,για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $0<f(x)<x$ **,για κάθε** $x>0$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

iv) αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **, τότε** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Λύση

i)Ισχύει $f^3(x)+f(x)=x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1)=x$ για κάθε $x>0$

Δηλαδή $f(x)=\dfrac{x}{f^2(x)+1}$ για κάθε $x>0$. Όμως $0<\dfrac{x}{f^2(x)+1}<x$ για κάθε $x>0$

ii)ισχύει $0<f(x)<x$ για κάθε $x>0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έπεται: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

iv) ▪ Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ τότε από την δοθείσα σχέση προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)\right)^3+f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x$ που είναι αδύνατον διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)\right)^3+f(x)\right]=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

▪ Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$ τότε από την δοθείσα σχέση προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)\right)^3+f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} x$ που είναι αδύνατον διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)\right)^3+f(x)\right]=L^3+L$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

1.16 Bonus μεζεδάκια θεωρίας.(Για να χρησιμοποιηθούν θέλουν απόδειξη)

I) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **περιττή και** $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=L$ **να δείξετε ότι** $\lim\limits_{x\to-\alpha} f(x)=-L$

II) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **άρτια και** $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=L$ **να δείξετε ότι** $\lim\limits_{x\to-\alpha} f(x)=L$

Λύση

i)Η f περιττή στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $-x\in\mathbb{R}$ και επίσης $f(-x)=-f(x)$ **(1)**

$$\lim_{x\to-\alpha} f(x)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to-\alpha}-f(-x)=-\lim_{x\to-\alpha} f(-x)=-\lim_{u\to\alpha} f(u)=-L$$

ii)Η f άρτια στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $-x\in\mathbb{R}$ και επίσης $f(-x)=f(x)$

$$\lim_{x\to-\alpha} f(x)=\lim_{x\to-\alpha} f(-x)\overset{-x=u}{=}\lim_{u\to\alpha} f(u)=L$$

1.17(Επανάληψη στα τριγωνομετρικά όρια με ολίγη από..1974)

Α.Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1974}{x\eta\mu x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(1974x)\eta\mu(1975x)}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\left[1974x^{\nu+2}\left(\dfrac{\eta\mu(2x)}{2x}\right)^2\right]$ **,** $\nu\in\mathbb{Z}^*$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1974x^2+\sigma\upsilon\nu x}{x^2-\sigma\upsilon\nu x}$

Β. Αν ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ τότε να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(13x^2+7x)}{13x^2-7x}$

Λύση

i) Ισχύει $\lim_{x\to 0}\left(x^2+x+1974\right)=1974$ και $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu x\right)=0$

Αναζητούμε το πρόσημο του παρονομαστή κοντά στο 0.

▪ Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $x>0$, $\eta\mu x>0$ άρα $x\eta\mu x>0$

▪ Αν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ τότε $x<0$, $\eta\mu x<0$ άρα $x\eta\mu x>0$

Δηλαδή $x\eta\mu x>0$,για κάθε x κοντά στο 0.

Εφόσον $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu x\right)=0$ με $x\eta\mu x>0$ για κάθε x κοντά στο 0 είναι $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\eta\mu x}\right)=+\infty$

Οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1974}{x\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(x^2+x+1974\right)\frac{1}{x\eta\mu x}\right]=..=(+\infty)\cdot 1974=+\infty$

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(1974x\right)\eta\mu\left(1975x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu\left(1974x\right)}{x}\cdot\frac{\eta\mu\left(1975x\right)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[1974\frac{\eta\mu\left(1974x\right)}{1974x}\cdot 1975\frac{\eta\mu\left(1975x\right)}{1975x}\right]=$

$\lim_{x\to 0}\left[1974\frac{\eta\mu\left(1974x\right)}{1974x}\right]\lim_{x\to 0}\left[1975\frac{\eta\mu\left(1975x\right)}{1975x}\right]\underset{y\to 1975x}{\overset{u\to 1974x}{=}}1974\lim_{u\to 0}\left[\frac{\eta\mu\left(u\right)}{u}\right]1975\lim_{y\to 0}\left[\frac{\eta\mu\left(y\right)}{y}\right]=1974\cdot 1\cdot 1975\cdot 1=$

$1974\cdot 1975$

iii) Διακρίνουμε περιπτώσεις για το ν.

$$\lim_{x\to 0}\left[1974x^{\nu+2}\left(\frac{\eta\mu(2x)}{2x}\right)^2\right]=\begin{cases}\nu=-2, & 1974\\ \nu>-2, & 0\\ \nu<-2, & \begin{cases}\nu\ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma, & +\infty\\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma, & \delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\alpha\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ o\rho\iota o\end{cases}\end{cases}$$

iv) Θα εργαστούμε με το κριτήριο παρεμβολής.

Για κάθε $x<0$ έχουμε διαδοχικά

$-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ (1)

Όμως $\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής από την σχέση (1) προκύπτει:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$

v) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1974x^2+\sigma\upsilon\nu x}{x^2-\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1974x^2+\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{\frac{x^2-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1974+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{1-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}\overset{vi}{=}\frac{1974+0}{1-0}=1974$

Β

$\lim_{x\to 0}\frac{f(13x^2+7)}{13x^2-7}=\lim_{x\to 0}\frac{f(13x^2+7x)}{13x^2+7x}\cdot\frac{13x^2+7x}{13x^2-7x}\overset{u=13x^2+7}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\left(13x+7\right)}{x\left(13x-7\right)}=$

$=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}\lim_{x\to 0}\frac{13x+7}{13x-7}=1(-1)=-1$

1.18(oldies but goodies)Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\eta\mu\frac{1}{x}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\eta\mu\frac{1}{x}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+1})\eta\mu\frac{1}{x}$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$ **vi)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|-\eta\mu 4x}{|x|\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}$

Λύση

i) Θέτω $u=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{u\to0}\frac{1}{u}\eta\mu u=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

Κατά ανάλογο τρόπο προκύπτει $\lim\limits_{x\to-\infty} x\eta\mu\frac{1}{x}=1$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\eta\mu\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}x\eta\mu\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}\overset{(i)}{=}0\cdot1=0$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\eta\mu\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\frac{1}{x})\eta\mu\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}\overset{(i)}{=}(1+0)1=1$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+1})\eta\mu\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\eta\mu\frac{1}{x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}\right)\eta\mu\frac{1}{x}\overset{x\to-\infty\ \alpha\rho\alpha\ \tau\epsilon\lambda\iota\kappa\alpha\ x<0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}\eta\mu\frac{1}{x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}\right)\lim\limits_{x\to-\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}=-(\sqrt{9+0})1=-3$

v) Θέτω $u=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=2\lim\limits_{u\to0}\frac{1}{u^2}\left(1-\sigma\upsilon\nu u\right)=$

$=2\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu u}{u^2}=2\lim\limits_{u\to0}\dfrac{2\eta\mu^2\frac{u}{2}}{u^2}=2\lim\limits_{u\to0}\dfrac{2\eta\mu^2\frac{u}{2}}{4\left(\frac{u}{2}\right)^2}=$

$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu^2\frac{u}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2}=\left(\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu\frac{u}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)}\right)^2=1^2=1$

vi)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|-\eta\mu4x}{|x|\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\left(1-\frac{\eta\mu4x}{|x|}\right)}{|x|\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}\overset{x\to-\infty\ \alpha\rho\alpha\ \tau\epsilon\lambda\iota\kappa\alpha\ x<0}{=}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(1-\frac{\eta\mu4x}{-x}\right)}{-x\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{\eta\mu4x}{x}}{\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}=\dfrac{1+0}{1}=1$

1.19 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **,** $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ **η οποία είναι 1-1 τέτοια ώστε**

$f(x)\le x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

$f^{-1}(x)\le e^x-1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι :

i) $f^{-1}(x)\ge x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)=f^{-1}(0)$

iii) $f(0)=0$

iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)=+\infty$

v) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=L\in\mathbb{R}$ **τότε** $L=1$**.**

Λύση

i) Η f 1-1 άρα η f^{-1} ορίζεται στο $\mathbb{R}$ άρα $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ έχουμε

$f(x)\le x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και θέτοντας όπου χ το $f^{-1}(x)$ λαμβάνουμε:

$f(f^{-1}(x))\le f^{-1}(x)\Leftrightarrow x\le f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ δηλαδή

$f^{-1}(x)\ge x$

ii) $x\le f^{-1}(x)\le e^x-1$ (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα θα ισχύει και για $x=0$,έτσι

$0\le f^{-1}(0)\le e^0-1\Leftrightarrow 0\le f^{-1}(0)\le 0\Rightarrow f^{-1}(0)=0$

Επίσης από το κριτήριο παρεμβολής στην (1) προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)=f^{-1}(0)$

iii) Ισχύει $f^{-1}(0)=0\Rightarrow f(f^{-1}(0))=f(0)\Rightarrow 0=f(0)$

iv) Έχουμε $x\le f^{-1}(x)\le e^x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\infty} x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty$

v) Έχουμε $f(x)\le x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Άρα, $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\le\dfrac{x}{\eta\mu x}$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και συνεπώς

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\le\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\eta\mu x}$ δηλαδή $L\le 1$ (2)

Όμοια , $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\ge\dfrac{x}{\eta\mu x}$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ και συνεπώς

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\ge\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\eta\mu x}$ δηλαδή $L\ge 1$ (3)

Από (2) ,(3) έπεται ότι $L=1$.

1.20)(μεζεδάκια από τον G. Alignac)

i)Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει :

$\left|e^x f(x)-2e^x\right| \le \left|\eta\mu e^x\right|$ **,για κάθε $x\in(0,+\infty)$.Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.**

ii)Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu}-2x^{\nu}, \nu\in\mathbb{N}^*$.Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ ώστε το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\mu}{(x-1)^6}$ να υπάρχει. Κατόπιν να βρείτε το όριο.

iii)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $xf(x)+3x=\eta\mu 2x+(x+1)^4 x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να βρείτε το f(0).

Λύση

i)Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\left|e^x f(x)-2e^x\right| \le \left|\eta\mu e^x\right| \Leftrightarrow -\left|\eta\mu e^x\right| \le e^x f(x)-2e^x \le \left|\eta\mu e^x\right| \Leftrightarrow 2e^x-\left|\eta\mu e^x\right| \le e^x f(x) \le \left|\eta\mu e^x\right|+2e^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{2e^x-\left|\eta\mu e^x\right|}{e^x} \le \frac{e^x f(x)}{e^x} \le \frac{\left|\eta\mu e^x\right|+2e^x}{e^x} \Leftrightarrow 2-\left|\frac{\eta\mu e^x}{e^x}\right| \le f(x) \le \left|\frac{\eta\mu e^x}{e^x}\right|+2 \quad (1)$$

Όμως(*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu e^x}{e^x}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\left|\dfrac{\eta\mu e^x}{e^x}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{\eta\mu e^x}{e^x}\right|+2\right)=2$,από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

(*)($-1\le \eta\mu e^x \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{e^x}\le\dfrac{\eta\mu e^x}{e^x}\le\dfrac{1}{e^x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu e^x}{e^x}=0$)

ii)Επειδή $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^6=0$, για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\mu}{(x-1)^6}$, πρέπει

$\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)-\mu\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}\left(x^{2\nu}-2x^{\nu}-\mu\right)=0$ ή $1-2-\mu=0\Leftrightarrow \mu=-1$.

Το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{(x-1)^6}=\lim_{x\to1}\frac{x^{2\nu}-2x^{\nu}+1}{(x-1)^6}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^{\nu}-1\right)^2}{(x-1)^6}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+..+x+1\right)^2}{(x-1)^6}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+..+x+1\right)^2}{(x-1)^4}=\lim_{x\to1}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+..+x+1\right)^2\frac{1}{(x-1)^4}=\nu(+\infty)=+\infty$$

iii)Η δοθείσα ισότητα γράφεται

$$xf(x)+3x=\eta\mu 2x+(x+1)^4 x \Leftrightarrow xf(x)=\eta\mu 2x+(x+1)^4x-3x \overset{x\neq0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{\eta\mu 2x+(x+1)^4x-3x}{x}$$

Η f είναι συνεχής στο 0 ισχύει ότι

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x+(x+1)^4x-3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^4x-3x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{x((x+1)^4-3)}{x}=$$

$$2\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{x((x+1)^4-3)}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}+\lim_{x\to0}\left((x+1)^4-3\right)=2\cdot1+(0+1)^4-3=0$$

1.21 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)f(x-2)+\eta\mu(x-2)}{x-2}=2$.

Να βρείτε το $f(0)$.

Λύση

Από την δοθείσα σχέση παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)f(x-2)+\eta\mu(x-2)}{x-2}=2\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}f(x-2)+\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}=2 \quad (1)$$

Η $f(x-2)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση της συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $x-2$ (πολυωνυμικής) και της συνεχούς f .Άρα το όριο στο 2 θα ισούται με την τιμή της:

$$\lim_{x\to 2}f(x-2)=f(2-2)=f(0)=0 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\overset{u=x-2}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2),(3) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο του πρώτου μέλους της (1) οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα του ορίου του αθροίσματος

$\left(\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x-2)+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}=2$ οπότε $f(0)+1=2\Leftrightarrow f(0)=1$.

1.19(Μεζεδάκι από Ε.Μ.Ε) Έστω συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$1+2\sqrt{\eta\mu x}\le f(x)\le 2+\eta\mu x \text{, για κάθε } x\in[0,\pi]$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

Β. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ii. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{|3-f(x)|-xf(x)-3}{f(x)-3}$

Λύση

Α. Έχουμε: $1+2\sqrt{\eta\mu x}\le f(x)\le 2+\eta\mu x \quad (1)$

Για $x=\dfrac{\pi}{2}$ λαμβάνουμε:

$$1+2\sqrt{\eta\mu\frac{\pi}{2}}\le f(\frac{\pi}{2})\le 2+\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 3\le f(\frac{\pi}{2})\le 3\Leftrightarrow f(\frac{\pi}{2})=3$$

Εφαρμόζουμε στην (1) το κριτήριο παρεμβολής οπότε

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=3 \text{ άρα } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f(\frac{\pi}{2})$$

Β.i. Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$:

$$1+2\sqrt{\eta\mu x}\le f(x)\le 2+\eta\mu x\Leftrightarrow 1+2\sqrt{\eta\mu x}-3\le f(x)-3\le 2+\eta\mu x-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\eta\mu x}-2\le f(x)-3\le \eta\mu x-1\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\le\frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\le\frac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad (2)$$

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\sqrt{\eta\mu x}-1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\sqrt{\eta\mu x}-1)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\eta\mu x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\eta\mu x-1)}{\left(1-\eta\mu^2 x\right)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(\eta\mu x-1)}{\left(1-\eta\mu x\right)\left(1+\eta\mu x\right)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{\left(1+\eta\mu x\right)(\sqrt{\eta\mu x}+1)}=-\frac{1}{2}$$

• $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{1-\eta\mu^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{\left(1-\eta\mu x\right)\left(1+\eta\mu x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{1+\eta\mu x}=-\frac{1}{2}$

Από την (2) με εφαρμογή του κριτηρίου της παρεμβολής προκύπτει

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\frac{1}{2}$

ii.Ισχύει:

$2\sqrt{\eta\mu x}-2\le f(x)-3\le \eta\mu x-1$, για κάθε $x\in\left[0,\pi\right]$ δηλαδή $f(x)-3\le \eta\mu x-1<0$ άρα $\left|f(x)-3\right|=3-f(x)$

Έτσι το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left|3-f(x)\right|-xf(x)-3}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3-f(x)-xf(x)-3}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-f(x)-xf(x)}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-f(x)(1+x)}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3-f(x)}f(x)(1+x)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3-f(x)}f(x)(1+x)\right)=(+\infty)(\frac{\pi}{2}+1)\cdot 3=+\infty\ .$$

1.22 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2\ \textbf{και}\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu x}{x}=a\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να υπολογίσετε το α.

Λύση

α) Για $x\ne 0$ θέτουμε: $g(x)=\dfrac{f(x)-\eta\mu x}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)+\eta\mu x$

Επομένως προκύπτει

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+\eta\mu x\right)=a\cdot 0+0=0$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$.Οπότε : $f(0)=0$ έτσι η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Ισχύει : $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$

Επομένως:

$\alpha=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=2-1=1$

1.23 α) Για τις συναρτήσεις f,g ισχύει $f^2(x)+g^2(x)=\eta\mu^2 x$ (1) για κάθε x κοντά στο π. Να δείξετε ότι οι f,g είναι συνεχείς κοντά στο π.

β) θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει

(1) $|f(x)|+|g(x)|=|x|$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x_0=0$.

γ) θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει

$f^2(x)+g^2(x)=2xf(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x_0=0$.

Λύση

α) Ισχύει:

$$f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)=\eta\mu^2 x\Leftrightarrow f^2(x)\le\eta\mu^2 x\Leftrightarrow|f(x)|\le|\eta\mu x|\Leftrightarrow-|\eta\mu x|\le f(x)\le|\eta\mu x| \quad (2)$$

$$g^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)=\eta\mu^2 x\Leftrightarrow g^2(x)\le\eta\mu^2 x\Leftrightarrow|g(x)|\le|\eta\mu x|\Leftrightarrow-|\eta\mu x|\le g(x)\le|\eta\mu x| \quad (3)$$

Για x=π οι (2) ,(3) παίρνουν την μορφή

(2) : $-|\eta\mu\pi|\le f(\pi)\le|\eta\mu\pi|\Leftrightarrow 0\le f(\pi)\le 0\Leftrightarrow f(\pi)=0$

(3) : $-|\eta\mu\pi|\le g(\pi)\le|\eta\mu\pi|\Leftrightarrow 0\le g(\pi)\le 0\Leftrightarrow g(\pi)=0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pi}|\eta\mu x|=0,\lim\limits_{x\to\pi}\left(-|\eta\mu x|\right)=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής και τις (2) ,(3) προκύπτει:

$\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=0=f(\pi)$, $\lim\limits_{x\to\pi}g(x)=0=g(\pi)$.Άρα οι f,g είναι συνεχείς κοντά στο π.

β) Θέτουμε $x=0$ στην (1)

$$|f(0)|+|g(0)|=|0|\Leftrightarrow|f(0)|+|g(0)|=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=0\\ \kappa\alpha\iota\\ g(0)=0\end{cases}$$

(2) $|f(x)|\le|f(x)|+|g(x)|=|x|\Rightarrow|f(x)|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le f(x)\le|x|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to0}\left(-|x|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\left(|x|\right)=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$

Δηλαδή η f είναι συνεχής $x_0=0$.Όμοια προκύπτει και η συνέχεια της g στο $x_0=0$.

γ) Για $x=0$ η δοθείσα γίνεται:

$$f^2(0)+g^2(0)=2\cdot0\cdot f(0)\Leftrightarrow f^2(0)+g^2(0)=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=0\\ g(0)=0\end{cases}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η δοθείσα σχέση γράφεται

$$f^2(x)+g^2(x)=2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)+g^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2+g^2(x)=x^2 \quad \textbf{(*)}$$

Από την σχέση (*) έχουμε:

$$\left(f(x)-x\right)^2\le\left(f(x)-x\right)^2+g^2(x)=x^2\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2\le x^2\Leftrightarrow|f(x)-x|\le|x|\Leftrightarrow$$

$$-|x|\le f(x)-x\le|x|\Leftrightarrow-|x|+x\le f(x)\le|x|+x$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to0}\left(-|x|+x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\left(|x|+x\right)=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\right)=0$

Δηλαδή η f είναι συνεχής $x_0=0$.

Ανάλογα προκύπτει και η συνέχεια της g στο $x_0=0$.

1.24.Εστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $(x-2)f(x)\geq \sigma\upsilon\nu(x-2)-1$ **(1) . Να βρείτε το** $f(2)$ **.**

Λύση

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο 2. Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ (2). Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Είμαστε υποχρεωμένοι να διαιρέσουμε με την ποσότητα $x-2$ για αυτό θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο του.

- $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ Από την (1) :

$$f(x)\geq \frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)-1}{(x-2)} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)\geq \lim_{x\to 2^+}\frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)-1}{(x-2)} \quad (3)$$

Θέτουμε $u=x-2$ οπότε όταν $x\to 2^+$ τότε $u^+\to 0$ άρα από την (3) έχουμε:

$$\lim_{x\to 2} f(x)\geq \lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u} \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x)\geq 0 \quad (4)$$

- $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$ Από την (1) :

$$f(x)\leq \frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)-1}{(x-2)} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)\leq \lim_{x\to 2}\frac{\sigma\upsilon\nu(x-2)-1}{(x-2)} \quad (4)$$

Θέτουμε $u=x-2$ οπότε όταν $x\to 2^-$ τότε $u^-\to 0$ άρα από την (4) έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\leq \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u} \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)\leq 0 \quad (5)$$

Από (4) ,(5)και (2) προκύπτει: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(2)$

Άρα $f(2)=0$

«Σήμερα στο σχολείο μάθημα για τα όρια,κάτι ε, κάτι lim ,κάτι σημεία συσσώρευσης.Γύρισα σπίτι, έφαγα και καταπιάστηκα με τις ασκήσεις. Ύστερα από δυο ώρες μάταιων προσπαθειών έκανα ένα ντους με παγωμένο νερό για να με επαναφέρω στις εργοστασιακές ρυθμίσεις.»

Κορνήλιος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

1.25(Αποκαλυπτική ..άσκηση)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{x^2 f(x)}{444}=\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x \qquad \textbf{(1)}$$

α) Να βρεθεί η f.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2 f(x)\right)$

Λύση

α) Από την σχέση (1) έχουμε: $\frac{x^2 f(x)}{444}=\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow x^2 f(x)=444\left(\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)$

Αν $x\neq 0$, τότε ισχύει:

$$f(x)=\frac{444\left(\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{x^2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$ όποτε θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Έχουμε: $f(x)=\frac{444\left(\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{x^2}=\frac{444\left(\sqrt{1+x^2}-1+1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{x^2}=444\left[\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x^2}+\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{x^2}\right]=$

$$=444\left[\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right]=444\left[\frac{\left(\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1^2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=444\left[\frac{\left(1+x^2-1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=$$

$$=444\left[\frac{\left(1+x^2-1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=444\left[\frac{\left(x^2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=444\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(444\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]\right)=444\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)=444\left(\frac{1}{2}+1\right)=444\frac{3}{2}=666$$

Άρα $f(0)=666$.Τελικά ο τύπος της συνάρτησης είναι :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{444\left(\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{x^2}, & x\neq 0\\ 666, & x=0\end{cases}$$

β) Παρατηρούμε ότι: $x^2 f(x)=444\left(\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)$

Επειδή $x\to-\infty$ περιοριζόμαστε στο $(-\infty,0)$.Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[444\left(\sqrt{1+x^2}-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[444\left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[444\left(|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)\right]=$$

$$\overset{x>0}{=}\lim_{x\to-\infty}\left[444\left(-x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[444\left((-x)\left(\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)\right)\right] \quad (2)$$

Όμως:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x} \le \frac{1}{|x|}$$

Επίσης $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=0$ (3)

Από (2) ,(3) προκύπτει

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 f(x)\right)=\left[444\left((+\infty)\left(\sqrt{(0+1)}+0\right)\right)\right]=444\left((+\infty)(1)\right)=+\infty$$

1.26Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η ιδιότητα $2f(x)-f(f(x))=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

A.i)Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1.

ii)Να λυθεί η εξίσωση $2f(x^2-1974x)=f(f(0))$

B. Αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda,\lambda>0$ τότε:

i)Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

ii)Να αποδειχτεί ότι $\lambda=1$

Λύση

A i) Έχουμε:

$$2f(x)-f(f(x))=x \quad (1)$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$,με $f(x_1)=f(x_2)$

Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}f(f(x_1))=f(f(x_2))\\ 2f(x_1)=2f(x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-f(f(x_1))=-f(f(x_2))\\ 2f(x_1)=2f(x_2)\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2f(x_1)-f(f(x_1))=2f(x_2)-f(f(x_2))\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα, η f είναι 1-1.

ii)Από την σχέση (1) για $x=0$

$2f(0)-f(f(0))=0\Leftrightarrow 2f(0)=f(f(0))$,

Άρα $f(f(0))=2f(x^2-1974x)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2f(0)=2f(x^2-1974x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(0)=f(x^2-1974x)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}x^2-1974x=0\Leftrightarrow x=0 \;\; ή \;\; x=1974$

B. Θεωρώ $g(x)=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow xg(x)=f(x)$, $x>0$

Λαμβάνουμε όρια στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xg(x)\right)\underset{\lambda>0}{\overset{\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lambda}{=}}(+\infty)\lambda=+\infty$$

ii)Επειδή $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ προκύπτει τι υπάρχει α>0 τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$ ισχύει $f(x)>0$.

Οπότε για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$ ισχύει:

$$2f(x)-f(f(x))=x\Leftrightarrow f(f(x))+x=2f(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{f(f(x))+x}{x}=\frac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow\frac{f(f(x))}{x}+1=\frac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(f(x)}{x}+1=\frac{2f(x)}{x}\Leftrightarrow\frac{f(f(x))}{f(x)}\frac{f(x)}{x}+1=\frac{2f(x)}{x} \quad (3)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\frac{f(x)}{x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{x}\overset{(*)}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\right)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{x}\Rightarrow$$

$\lambda\cdot\lambda+1=2\lambda\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=1$

(*)Θέτουμε $u=f(x)$ Είναι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ οπότε όταν $x\to+\infty$ τότε $u\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\right)\overset{u=f(x)}{=}\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{f(u)}{u}\right)=\lambda$$

1.27 Έστω f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση που διέρχεται η γραφική της παράσταση από την αρχή των αξόνων για την οποία ισχύει:

(1) $f(x)-f(y)\le\eta\mu x-\eta\mu y+\alpha(x-y)$ **για κάθε** $x,y\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x+\alpha x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

ii)Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{\eta\mu x}$.

Λύση

i)Στην σχέση (1) θέτουμε όπου y το x και όπου x το y

$f(y)-f(x)\le\eta\mu y-\eta\mu x+\alpha(y-x)\Leftrightarrow f(x)-f(y)\le\eta\mu x-\eta\mu y+\alpha(x-y)$ (2)

Από (1) ,(2)προκύπτει: $f(x)-f(y)=\eta\mu x-\eta\mu y+\alpha(x-y)$ (3) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα $f(0)=0$

Στην (3) θέτουμε όπου y το 0: $f(x)-f(0)=\eta\mu x-\eta\mu 0+\alpha(x-0)\Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x+\alpha x$

ii) $$\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\eta\mu x+\alpha x)}{\eta\mu x}\overset{(3),\gamma\iota\alpha\ y=-\alpha x}{=}\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x-\eta\mu(-\alpha x)+\alpha(x-(-\alpha x))}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu x}+\frac{\alpha(x+\alpha x)}{\eta\mu x}\right)=$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\alpha x\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{x\frac{\eta\mu x}{x}}+\frac{\alpha(x+\alpha x)}{x\frac{\eta\mu x}{x}}\right)=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\alpha\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}+\frac{\frac{\alpha(x+\alpha x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\alpha\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}+\frac{\frac{x\alpha(1+\alpha)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\alpha\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha(1+\alpha)}{1}\right)=1+\alpha+\alpha+\alpha^2=(1+\alpha)^2$$

<u>Εναλλακτικά</u> για το ερώτημα (ii)

Θέτουμε όπου $u=f(x)$ τότε $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(\eta\mu x+\alpha x)=\eta\mu 0+\alpha\cdot0=0$

Προκύπτει ότι $u\to0$ όταν $x\to0$ κατά συνέπεια:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)\quad(4)$$

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\right)=\lim_{u\to0}\left(\frac{f(u)}{u}\right)=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u+\alpha u}{u}=\lim_{u\to0}\left(\frac{\eta\mu u}{u}+\alpha\right)=1+\alpha$
- $\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x+\alpha x}{\eta\mu x}\right)=1+\alpha$

Άρα η (4) : $\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=(1+\alpha)^2$

1.28 Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y)=f(x)+f(y)+1974xy$ (1) για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Αν η f είναι συνεχής στο 0 να δείξετε ότι είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Από την σχέση (1) για $x=y=0$ έχουμε:

$f(0+0)=f(0)+f(0)+1974\cdot 0\cdot 0 \Leftrightarrow f(0)=2f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

β) Η f είναι συνεχής το 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ (2)

Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}^*$ θα δείξουμε ότι στο x_0 η f είναι συνεχής

Θέτουμε $x-x_0=h$ οπότε όταν $x\to x_0$ τότε $h\to 0$

Έτσι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x_0)+f(h)+1974x_0h\right]=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x_0)\right]+\lim\limits_{h\to 0}\left[f(h)\right]+\lim\limits_{h\to 0}\left[1974x_0h\right]$

$=f(x_0)+f(0)+0=f(x_0)$ που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}^*$ άρα είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1.29 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-1}-1$ και $g(x)=ln(x+1)+1$

α) Δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,3)$.

β) Αν είναι ξ η ρίζα της εξίσωσης αυτής στο $(1,3)$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\xi}g(x)$.

Λύση

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ (1) Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως διαφορά συνέχων συναρτήσεων.

$h(1)h(3)=\left(e^{1-1}-1-1\right)\left(e^{3-1}-1-3\right)=-1\left(e^2-4\right)<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,3)$ με

$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi$

Άρα η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,3)$.

Β) Είναι $\lim\limits_{x\to\xi}g(x)=\lim\limits_{x\to\xi}\left(ln(x+1)+1\right)$

Θέτουμε $u=x+1$ οπότε όταν $x\to\xi$ τότε $u\to\xi+1$. Έτσι:

$\lim\limits_{x\to\xi}g(x)=\lim\limits_{u\to\xi+1}\left(\ln u+1\right)=\ln(\xi+1)+1$ (1)

Όμως $f(\xi)=\xi\Leftrightarrow e^{\xi-1}-1=\xi\Leftrightarrow e^{\xi-1}=\xi+1$ (2)

$\lim\limits_{x\to\xi}g(x)=\ln(\xi+1)+1\overset{(2)}{=}\ln(e^{\xi-1})+1=\xi-1+1=\xi$

1.30 Να δείξετε ότι η εξίσωση $1974x^2+\alpha x-\beta=0,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $0<\beta\le\alpha$ δεν μπορεί να έχει και τις δυο ρίζες ακέραιες.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=1974x^2+\alpha x-\beta$

Έχουμε $f(0)=1974\cdot 0^2+\alpha\cdot 0-\beta=-\beta<0$, $f(1)=1974\cdot 1^2+\alpha\cdot 1-\beta=1974+\alpha-\beta>0$ (διότι $\beta\le\alpha\Leftrightarrow 0\le\alpha-\beta$)

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$, δηλαδή η μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $1974x^2+\alpha x-\beta=0$ δεν είναι ακέραια.

1.31 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με: $f(2)+f(5)<7<f(3)+f(4)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha+\beta=7$ και $f(\alpha)+f(\beta)=7$

Λύση

Επειδή $\alpha+\beta=7 \Leftrightarrow \beta=7-\alpha$ και $f(\alpha)+f(\beta)=7 \Leftrightarrow f(\alpha)+f(7-\alpha)=7 \Leftrightarrow f(\alpha)+f(7-\alpha)-7=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση :
$g(x)=f(x)+f(7-x)-7$, $x\in\mathbb{R}$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο διάστημα $[2,3]$

Είναι:
$g(2)=f(2)+f(7-2)-7=f(2)+f(5)-7<0$
$g(3)=f(3)+f(4)-7>0$ Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\alpha\in(2,3)$ τέτοια ώστε
$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)+f(7-\alpha)-7=0 \Leftrightarrow f(\alpha)+f(7-\alpha)=7$

Αν θέσουμε $\beta=7-\alpha$ τότε ισχύει $\alpha+\beta=7$ και $f(\alpha)+f(\beta)=7$.

1.32 (Πρώτη δέσμη 1995)

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για αυτή ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και για κάθε $x>1$ ισχύει:
$|f(x)-1|=\dfrac{2}{x+1}+x-1$**. Αποδείξτε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(1,+\infty)$.**

Λύση

α) Έστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ οπότε παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές. Τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και έστω $\alpha<\beta$ με $f(\alpha)<0$ και $0<f(\beta)$.

Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(\alpha)f(\beta)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ άτοπο από υπόθεση. Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ (δηλ. ή έχει μόνο θετικές ή αρνητικές τιμές)

β) Από το πρώτο ερώτημα αρκεί να είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Έστω ότι υπάρχει $\rho\in(1,+\infty)$ ώστε $f(\rho)=0$. Τότε από την δοσμένη ισότητα είναι:

$$|f(\rho)-1|=\frac{2}{\rho+1}+\rho-1 \Leftrightarrow |0-1|=\frac{2}{\rho+1}+\rho-1 \Leftrightarrow |-1|=\frac{2}{\rho+1}+\rho-1 \Leftrightarrow 1=\frac{2}{\rho+1}+\rho-1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \rho^2-\rho=0$$

Τελικά $\rho=1$ ή $\rho=0$ άτοπο εφόσον $\rho\in(1,+\infty)$.

1.33 (Μεζεδάκι θεωρίας. Θέλει απόδειξη για να χρησιμοποιηθεί)

α) Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\gamma\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)=\gamma$. (Θεώρημα σταθερού σημείου)

Λύση

α) Αν $f(\alpha)=\alpha$ ή $f(\beta)=\beta$ τότε το ζητούμενο σημείο είναι το α ή το β αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι $f(\alpha)\neq\alpha$, $f(\beta)\neq\beta$ οπότε $f(\alpha)>\alpha$ και $f(\beta)<\beta$.

Για την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ισχύουν :

$$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha>0 \quad , \quad g(\beta)=f(\beta)-\beta<0$$

Επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\gamma)=0 \Leftrightarrow f(\gamma)-\gamma=0 \Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma$$

Δοκιμάστε μόνοι σας το εξής:

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ με $g(\alpha)=\alpha$ και $f(\alpha)=\alpha$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

1.34 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f^2(1)+f^2(4)=2f(1)+6f(4)-10$$

$$f^2(x)-4f(x)+3\le 0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τους $f(1)$ και $f(4)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο m και ολικό μέγιστο M.

γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

δ) Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

α) Από την δοθείσα σχέση έχουμε:

$$f^2(1)+f^2(4)=2f(1)+6f(4)-10 \Leftrightarrow f^2(1)-2f(1)+1+f^2(4)-6f(4)+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(4)-3\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)-1=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ f(4)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=1 \\ \kappa\alpha\iota \\ f(4)=3 \end{cases}$$

β) Έχουμε $f^2(x)-4f(x)+3\le 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 1\le f(x)\le 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως $f(1)=1$ και $f(4)=3$ άρα $f(1)\le f(x)\le f(4)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f έχει ολικό ελάχιστο $m=1=f(1)$ και ολικό μέγιστο $M=3=f(4)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $1<4$ όταν $f(1)<f(4)$ και $5>4$ όταν $f(5)\le f(4)$ άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

δ) Η f είναι συνεχής άρα παίρνει κάθε τιμή που βρίσκεται μεταξύ των ολικών ακροτάτων της $f(1)=1$ και $f(4)=3$. Επομένως έχει σύνολο τιμών το διάστημα $f(A)=\left[1,3\right]$.

1.35 (Μεζεδάκι Bolzano) Έστω μια συνάρτηση f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $f(f(\alpha))=\alpha$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $f(\alpha)=\alpha$ το ζητούμενο ισχύει για x=α.
- Αν $f(\alpha)<\alpha$ τότε θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,f(\alpha)\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$$

$$g(f(\alpha))=f(f(\alpha))-f(\alpha)=\alpha-f(\alpha)$$

$$g(f(\alpha))g(\alpha)=\left(f(\alpha)-\alpha\right)\left(\alpha-f(\alpha)\right)=-\left(\alpha-f(\alpha)\right)^2<0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας $x_0\in\left(\alpha,f(\alpha)\right)$ τέτοιος ώστε

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$$

- Αν $f(\alpha)>\alpha$, ανάλογα…

1.36 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2+(x-1)^2}{x-1}=100$$

i) Να δείξετε ότι η Cf διέρχεται από το Α(1,2).

ii)Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}$ **και** $\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)-3|-1}{x-1}$

iii)Αν οι ρίζες της $f(x)$ **είναι οι:** $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=\frac{3}{2}$

και επιπλέον : $\lim_{x\to -2}f(x)<0, \lim_{x\to 2}f(x)>0$ **, να βρείτε το πρόσημο της** $f(x)$**.**

Λύση

i) Θέτω $g(x)=\frac{f(x)-2+(x-1)^2}{x-1} \Leftrightarrow g(x)(x-1)=f(x)-2+(x-1)^2 \Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+2-(x-1)^2$

Λαμβάνουμε όρια και στα δύο μέλη:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(g(x)(x-1)+2-(x-1)^2\right)=\lim_{x\to 1}g(x)\lim_{x\to 1}(x-1)+\lim_{x\to 1}\left(2-(x-1)^2\right)=100\cdot 0+\left(2-0^2\right)=2 \ (1)$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα στο $x_0=1$ οπότε $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2=f(1)$ άρα η Cf διέρχεται από το Α(1,2).

ii) $g(x)=\frac{f(x)-2+(x-1)^2}{x-1} \Leftrightarrow g(x)=\frac{f(x)-2}{x-1}+\frac{(x-1)^2}{x-1} \Leftrightarrow g(x)=\frac{f(x)-2}{x-1}+x-1 \Leftrightarrow g(x)-(x-1)=\frac{f(x)-2}{x-1}$

Λαμβάνουμε όρια και στα δυο μέλη

$$\lim_{x\to 1}\left(g(x)-(x-1)\right)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1} \Leftrightarrow 100-(1-1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=100$$

$\lim_{x\to 1}f(x)=2<3 \Rightarrow f(x)<3$ κοντά στο 1.Επομενως

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)-3|-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-f(x)+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{f(x)-2}{x-1}\right)=-100$$

iii)Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,έχουμε:

$f(-2)=\lim_{x\to -2}f(x)<0$

$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)>0$

Έτσι το πρόσημο της $f(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Διαστήματα	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
x_0	-2	1	2
$f(x_0)$	$f(-2)<0$	$f(1)>0$	$f(2)>0$
$f(x)$	-	+	+

1.37 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$. Αν είναι $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να αποδείξετε ότι:

α. Η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

β. Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ (1).

Λύση

α.

- Για να έχει η $y=f(x)$ κοινό σημείο με την $y=3$ θα πρέπει να υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$.
- Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-3$ (2), ορισμένη στο σύνολο $[0,1]$.

i) Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

ii) $g(0)\cdot g(1)\overset{(2)}{=}[f(0)-3]\cdot[f(1)-3]=(2-3)\cdot(4-3)=-1\cdot 1=-1<0$.

Έτσι από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$g(x_0)=0\overset{(2)}{=}f(x_0)-3=0\Leftrightarrow f(x_0)=3$, δηλαδή η C_f και η $y=3$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο $(0,1)$. Για να δείξουμε ότι είναι μοναδικό αρκεί η g να είναι γνησίως μονότονη. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ για κάθε $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-3<f(x_2)\overset{(2)}{\Leftrightarrow} g(x_1)<g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ συνεπώς η ρίζα της x_0 είναι μοναδική. Τελικά το σημείο τομής $x_0\in(0,1)$ της $y=3$ με τη γραφική παράσταση της f είναι μοναδικό.

β. Η συνάρτηση f ως συνεχής στο $[0,1]$ παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M. Επομένως: $m<f(x)<M$ (3), για κάθε $x\in[0,1]$.

Επειδή οι αριθμοί $\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$ ανήκουν στο διάστημα αυτό, ισχύει και γι' αυτούς η (3):

$$\left.\begin{aligned} m&\le f\left(\frac{1}{5}\right)\le M\\ m&\le f\left(\frac{2}{5}\right)\le M\\ m&\le f\left(\frac{3}{5}\right)\le M\\ m&\le f\left(\frac{4}{5}\right)\le M \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$$4m\le f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\le 4M\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\le\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}\le M \quad (4)$$

Αλλά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ άρα $m\ne M$. Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και την (4) θα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

1.38 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0,1\right]$ με $f(0)=f(1)$.Θεωρούμε την συνάρτηση g με: $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{\nu})$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

Β.Να δείξετε ότι:

i) αν $\nu>1$, τότε $g(0)+g(\frac{1}{\nu})+g(\frac{2}{\nu})+...+g(\frac{\nu-1}{\nu})=0$

ii)η εξίσωση: $f(x)=f(x+\frac{1}{\nu})$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left[0,1\right)$. (Ευκλείδης Β)

Λύση

Α) $x\in D_g \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le x+\frac{1}{\nu}\le 1\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le \frac{\nu-1}{\nu}$ άρα $D_g=\left[0,\frac{\nu-1}{\nu}\right]$

Β.i)για κάθε $x\in\left[0,\frac{\nu-1}{\nu}\right]$, $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{\nu})$ οπότε

$g(0)=f(0)-f(\frac{1}{\nu})$

$g(\frac{1}{\nu})=f(\frac{1}{\nu})-f(\frac{2}{\nu})$

$g(\frac{2}{\nu})=f(\frac{2}{\nu})-f(\frac{3}{\nu})$

……………………

$g(\frac{\nu-1}{\nu})=f(\frac{\nu-1}{\nu})-f(1)$ Με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$g(0)+g(\frac{1}{\nu})+g(\frac{2}{\nu})+...+g(\frac{\nu-1}{\nu})=f(0)-f(1)=0$

ii)Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\nu-1}{\nu}\right]$ σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης και ελάχιστης τιμής παίρνουμε:

Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\nu-1}{\nu}\right]$, $m\le g(x)\le M \Rightarrow \begin{cases} m\le g(0)\le M \\ m\le g(\frac{1}{\nu})\le M \\ .... \\ m\le g(\frac{\nu-1}{\nu})\le M\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$\nu m\le g(0)+g(\frac{1}{\nu})+g(\frac{2}{\nu})+...+g(\frac{\nu-1}{\nu})\le \nu\cdot \mathrm{M} \Leftrightarrow \nu m\le 0\le \nu\cdot\mathrm{M} \Leftrightarrow m\le 0\le \mathrm{M} \Rightarrow$

Υπάρχει $x_0\in\left[0,\frac{\nu-1}{\nu}\right]$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ $\quad$ ($0\le x_0\le\frac{\nu-1}{\nu}<1$)

Άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(x+\frac{1}{\nu})$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left[0,1\right)$

1.39Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$\left(f(x)-2016\right)\left(f(x)-2017\right)=0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f δεν είναι διάστημα.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.
γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\left(f(x)-2016\right)\left(f(x)-2017\right)=0 \Leftrightarrow f(x)=2016 \text{ ή } f(x)=2017$$

Άρα $f(\mathbb{R})\subseteq\{2016,2017\}$ (1)

Οπότε, το σύνολο τιμών της f δεν είναι διάστημα.

β) Αν η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή, τότε, λόγω της σχέσης (1),παιρνει και τις δυο τιμές 2016,2017.Επειδη όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Θα πρέπει δηλαδή

$$[2016,2017]\subseteq f(\mathbb{R})\subseteq\{2016,2017\} \quad \text{Άτοπο}$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι σταθερή.

γ) Εφόσον η συνάρτηση f είναι σταθερή και $f(\mathbb{R})\subseteq\{2016,2017\}$, θα είναι

$$f(x)=2016 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

ή

$$f(x)=2017 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

1.40Εστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-3,3]$ και ισχύει:

(1) $f^2(x)+x^2=9$ **,για κάθε** $x\in[-3,3]$

i)Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

ii)Αν $f(0)=3$ να βρεθεί ο τύπος της f και να γίνει η γραφική παράσταση .

Λύση

i) Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(-3,3)$ με $f(x_1)f(x_2)<0$.Συνεπώς από την εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano για την f στο $[x_1,x_2]$(χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1<x_2$) έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in(-3,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Η (1) παίρνει την μορφή: $f^2(x_0)+x_0^{\,2}=9 \Leftrightarrow x_0^{\,2}=9 \Leftrightarrow x_0=\pm3$,άτοπο αφού $-3<x_1<x_0<x_2<3$.

Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

ii)Επειδή $f(0)=3>0$ και, επειδή η f διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$,έχουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-3,3)$ άρα:

$$f(x)=\sqrt{9-x},\ x\in(-3,3)$$

Έστω $M(x,y)\in Cf \Leftrightarrow x^2+y^2=9,\ y\geq0$.Άρα το σημείο Μ ανήκει σε ημικύκλιο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα $\rho=3$.

1.41*Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)+4xf(x)=4x+5 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \textbf{ και } f(0)>0$$

i.Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}+2x$ **,** $x\in\mathbb{R}$

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iii.Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **β.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(x))^2+13x^2}{x^2+\eta\mu^2 x}$

Λύση

i. Είναι

$f^2(x)+4xf(x)=4x+5 \Leftrightarrow f^2(x)+4xf(x)+4x^2=4x^2+4x+5 \Leftrightarrow (f(x)+2x)^2=4x^2+4x+5$ (1)

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}: 4x^2+4x+5>0$ (Δ<0,α=1>0)

Η (1) : $(f(x)+2x)^2=4x^2+4x+5 \Leftrightarrow |f(x)+2x|=\sqrt{4x^2+4x+5} \Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{4x^2+4x+5}$ (2)

όπου $g(x)=f(x)+2x$, $x\in\mathbb{R}$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών, δεν μηδενίζεται πουθενά άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(0)=f(0)-2\cdot 0=f(0)>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Έτσι από την (2) έχουμε:

$g(x)=\sqrt{4x^2+4x+5} \Leftrightarrow f(x)+2x=\sqrt{4x^2+4x+5} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}-2x$, $x\in\mathbb{R}$

ii.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+5}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+4x+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+4x+5}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+4x+5}+2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+4x+5-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2+4x+5}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\left(\sqrt{4x^2+4x+5}+2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(4+\frac{5}{x})}{x\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}=1$$

ii. α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+5}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)=-4$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(x))^2+13x^2}{x^2+\eta\mu^2 x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{(f(x))^2+13x^2}{x^2}}{\frac{x^2+\eta\mu^2 x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{(f(x))^2}{x^2}+13}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+13}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}$

$\left|\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right|\le\dfrac{|\eta\mu^2 x|}{|x^2|}\le\dfrac{1}{|x^2|}\Rightarrow -\dfrac{1}{|x^2|}\le\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\le\dfrac{1}{|x^2|}$ (3)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{|x^2|}\right)=0, \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x^2|}=0$ οπότε από την (3) με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}=0$

Έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+13}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}=\dfrac{16+13}{1+0}=29$

1.42 (Πάλι το 1974 ;;;)

Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και τέτοια ώστε ,

$$f^2(x)=\ln^2 x \text{ για κάθε } x>0$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

ii)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

iii)Αν επιπλέον $f(\frac{1}{1974})<0$ και $f(1974)>0$.Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

Λύση

i) Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow \ln^2 x=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 1

ii)Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ και δεν μηδενίζεται σε κανένα από αυτά. Άρα, η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα.

iii)Η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0,1)$ και ισχύει: $f(\frac{1}{1974})<0$

$$\text{Άρα } f(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(0,1)$$

Επομένως στο διάστημα $(0,1)$ ισχύει

$f^2(x)=\ln^2 x \Leftrightarrow f(x)=\ln x$ αφού $\ln x<0$ για κάθε $(0,1)$.

Η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(1,+\infty)$ και ισχύει: $f(1974)>0$.

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.Επομένως στο διάστημα $(1,+\infty)$ ισχύει

$f^2(x)=\ln^2 x \Leftrightarrow f(x)=\ln x$ αφού $\ln x>0$ για κάθε $(1,+\infty)$

Επίσης $f(1)=0=\ln 1$

Από τα παραπάνω $f(x)=\ln x$ για κάθε $x>0$.

1.43Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\neq 0 \quad \text{και} \quad f(1974)+f(-1974)=0$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)f(-x)<0$ για κάθε $x\neq 0$

ii)Να αποδείξετε ότι η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii)Αν επιπλέον ισχύει $f(1974)=1974$ να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

Λύση

i) Η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ το οποίο δεν είναι το ίδιο ,αφού $f(1974)+f(-1974)=0 \Leftrightarrow f(1974)=-f(-1974)$.

ii) $f(x)f(-x)<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)f(-x)\right)\leq 0 \overset{f \text{ συνεχής στο } 0}{\Leftrightarrow} f^2(0)\leq 0 \Leftrightarrow f(0)=0$ άρα η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii)Ισχύει:

$$\begin{cases} f(1974)=1974 \\ f(1974)\cdot f(-1974)<0 \end{cases} \Rightarrow f(-1974)<0$$

Η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$.Επομένως η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα.

Επειδή $f(-1974)<0$ και $f(1974)>0$ συμπεραίνουμε :

$f(x)<0$ για κάθε $x<0$

$f(x)>0$ για κάθε $x>0$

1.44Έστω $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής πεδίο ορισμού της τέτοια ώστε να ισχύει:

$$(1)\qquad f^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \text{ για κάθε } x\in[0,\pi]$$

i)Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0,\pi)$.

ii)ποιο είναι το πρόσημο της f αν για κάποιο $x_1\in(0,\pi)$ είναι $f(x_1)=8$.

iii)Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x_1)+2\right)x^3-4x+1974}{f(x_1)f(x_2)x^2} \text{ όπου } x_2\in(0,\pi)$$

Λύση

i). Η f είναι συνεχής στο $(0,\pi)$ για να διατηρεί πρόσημο στο $(0,\pi)$ αρκεί να ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.Έστω ότι υπάρχει ένα $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Από την σχέση (1) για $x=x_0$

$f^2(x_0)+\sigma\upsilon\nu^2 x_0=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x_0=1\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=\pi$ άτοπο, εφόσον $x_0\in(0,\pi)$ άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,\pi)$.

ii)Επειδή η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,\pi)$ και ισχύει $f(x_1)=8$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

iii)Έχουμε $f(x_1)=8$ κατά συνέπεια το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x_1)+2\right)x^3-4x+1974}{f(x_1)f(x_2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(8+2)x^3-4x+1974}{8f(x_2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^3-4x+1974}{8f(x_2)x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^3}{8f(x_2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{4f(x_2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{4f(x_2)}\overset{f(x_2)>0}{=}+\infty$$

1.45Α. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right).$$

α). Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

β)). Βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ). Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=64$.

Β. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο R με $f(8)=6$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)f(f(x))=2$. Να βρείτε το $f(2)$.

Λύση

Α. α). Η f έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$. Για να αντιστρέφεται θα πρέπει να είναι «1 – 1» και γι' αυτό αρκεί να είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$ και $\sqrt[3]{x_1}<\sqrt[3]{x_2}$. Προσθέτοντας:

$\sqrt{x_1}+\sqrt[3]{x_1}<\sqrt{x_2}+\sqrt[3]{x_2}$. Άρα $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt[3]{x_1}\right)<\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_2}+\sqrt[3]{x_2}\right)$. Από αυτήν $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε αντιστρέφεται.

β). Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως από γνωστό θεώρημα η f θα έχει σύνολο τιμών το διάστημα: $\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Όμως: $f(0)=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{0}+\sqrt[3]{0}\right)=0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)=+\infty$. Τελικά το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$. Αλλά το σύνολο τιμών της f είναι πεδίο ορισμού της f^{-1}, δηλαδή $f^{-1}:[0,+\infty)\to R$.

γ). Με $x\in[0,+\infty)$, έχουμε

$f^{-1}(x)=64\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=f(64)\Leftrightarrow x=f(64)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}\right)=\frac{1}{2}(8+4)\Leftrightarrow x=6$.

Β. Η σχέση $f(x)f\left(f(x)\right)=2$ ισχύει για κάθε $x\in R$ άρα και για $x=8$. Τότε $f(8)f\left(f(8)\right)=2$ και αφού $f(8)=6$, είναι $6\cdot f(6)=2\Leftrightarrow f(6)=\frac{1}{3}$. Γνωρίζουμε ήδη τα $f(6),f(8)$ και ότι η f είναι συνεχής στο $[6,8]$ από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(6,8)$ με $f(x_0)=2$ (1).

Για $x=x_0$ η δοσμένη σχέση γράφεται $f(x_0)f\left(f(x_0)\right)=2$ και λόγω της (1)

$2\cdot f(2)=2\Leftrightarrow f(2)=1$.

1.46 α)(oldies but goodies)Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α και $A\cap f(A)=\varnothing$, τότε:

$$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x \quad \textbf{για κάθε } x\in A\cap f(A)$$

β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x\ln x, x\geq 1$ αντιστρέφεται και να βρεθούν τα κοινά σημεία των Cf,Cf^{-1}.

Λύση

α) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , θα είναι και 1-1, όποτε αντιστρέφεται.

▪ Έστω $x\in A\cap f(A)$ με $f(x)=x$.Τότε έχουμε:

$$x=f^{-1}(x) \text{ δηλαδή } f(x)=f^{-1}(x)$$

▪ Έστω $x\in A\cap f(A)$ με $f(x)=f^{-1}(x)$.Υποθέτουμε ότι $f(x)\neq x$.Έστω για παράδειγμα $f(x)<x$. Αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα , έχουμε:

$$f^{-1}\left(f(x)\right)<f^{-1}\left(x\right)\Leftrightarrow x<f^{-1}\left(x\right)=f\left(x\right) \text{ άτοπο.}$$

Ομοίως αποκλείουμε ότι $f(x)>x$

Άρα είναι $f(x)=x$ για κάθε $x\in A\cap f(A)$.

β)Οι συναρτήσεις $y=\ln x$ και $y=x$ είναι γνησίως αύξουσες για κάθε $x\in[1,+\infty)$.Επομένως και η f είναι γνησίως αύξουσα .Το σύνολο τιμών της f είναι το $x\in[0,+\infty)$, διότι ισχύει:

$$f(1)=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln x\right)=+\infty$$

Επομένως είναι $A\cap f(A)=[1,+\infty)$.Επίσης η f είναι 1-1, ω γνησίως αύξουσα, άρα είναι αντιστρέψιμη.

Επομένως υπάρχει f^{-1} και έχει πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ (την f^{-1} δεν μπορούμε να την προσδιορίσουμε) .Έτσι τα κοινά σημεία των Cf,Cf^{-1} θα βρίσκονται στην ευθεία $y=x$, σύμφωνα με το ερώτημα (α). Έχουμε:

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x, x\in[1,+\infty)\Leftrightarrow x\ln x=x\Leftrightarrow x(\ln x-1)=0\overset{x\geq1}{\Leftrightarrow}x=e$

Άρα οι Cf,Cf^{-1} έχουν ένα κοινό σημείο στο $[1,+\infty)$ το $A(e,e)$

1.47 Δίνεται η εξίσωση $e^x\ln x=\lambda,\lambda>0$

Α) Να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $(0,1]$

Β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=e^x\ln x-\lambda$ ορισμένη στο $(1,+\infty)$

i)Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

ii)Βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii)Αποδείξτε ότι η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα.

Λύση

Α) Επειδή $0<x\le 1$ είναι $\ln x\le 0$ και εφόσον $e^x>0$ είναι $e^x\cdot\ln x\le 0$ οπότε η εξίσωση $e^x\ln x=\lambda$ με $\lambda>0$ είναι αδύνατη στο σύνολο $(0,1]$.

Β)i) Οι συναρτήσεις e^x και $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσες στο $(1,+\infty)$ και μάλιστα με θετικές τιμές

(όταν $x>1$ είναι $\ln x>\ln 1\Leftrightarrow \ln x>0$)

Έτσι για κάθε $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $\ln x_1<\ln x_2$.

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη (Είναι δυνατό γιατί έχουμε θετικά μέλη). Άρα:

$e^{x_1}\ln x_1<e^{x_2}\ln x_2\Leftrightarrow e^{x_1}\ln x_1-\lambda<e^{x_2}\ln x_2-\lambda\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

ii)Επειδή οι συναρτήσεις e^x, $\ln x$,λ είναι συνεχείς στο $(1,+\infty)$ και η $f(x)=e^x\ln x-\lambda$ είναι συνεχής στο διάστημα αυτό(πράξεις μεταξύ συνεχών) και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ θα έχει ως σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to 1}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

- $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(e^x\ln x-\lambda\right)=e^1\ln 1-\lambda=-\lambda$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\ln x-\lambda\right)=(+\infty)(+\infty)-\lambda=+\infty$

Άρα σύνολο τιμών είναι : $(-\lambda,+\infty)$

iii) Επειδή $\lambda>0\Leftrightarrow -\lambda<0$ τότε $0\in(-\lambda,+\infty)$ και είναι τιμή της f που σημαίνει ότι η f μηδενίζεται για κάποια τιμή $x=\alpha$ δηλαδή το α είναι ρίζα. Η f έχει μια ρίζα είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Άρα και η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.

1.48 Έστω οι συνεχείς και γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ **,με** $\alpha\cdot\beta<0$ **οι οποίες έχουν σύνολο τιμών το διάστημα** $[\alpha,\beta]$**.Να αποδείξετε ότι υπάρχει** $x_0\in[\alpha,\beta]$ **τέτοιο ώστε:**

$$\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)+(\alpha+\beta)x_0=0$$

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)+(\alpha+\beta)x=0$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

Η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι $[f(\alpha),f(\beta)]$, από υπόθεση όμως το σύνολο τιμών της είναι $[\alpha,\beta]$.Άρα $f(\alpha)=\alpha, f(\beta)=\beta$ (1)

Ομοίως για την g προκύπτει $g(\alpha)=\alpha, g(\beta)=\beta$ (2)

$\varphi(\alpha)=\alpha f(\alpha)+\beta g(\alpha)+(\alpha+\beta)\alpha$, $\varphi(\beta)=\alpha f(\beta)+\beta g(\beta)+(\alpha+\beta)\beta$

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta)=\left(\alpha f(\alpha)+\beta g(\alpha)+(\alpha+\beta)\alpha\right)\left(\alpha f(\beta)+\beta g(\beta)+(\alpha+\beta)\beta\right)\overset{(1),(2)}{=}$$

$$=\left(\alpha^2+\beta\alpha+\alpha^2+\beta\alpha\right)\left(\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta+\beta^2\right)=\left(2\alpha^2+2\beta\alpha\right)\left(2\beta^2+2\alpha\beta\right)=$$

$$2\alpha\left(\alpha+\beta\right)2\beta\left(\beta+\alpha\right)=4\alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)^2\le 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει το ζητούμενο.

1.49.(Μεζεδάκι με το Θ.Ε.Τ)

Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[2015,2016]\to\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(2015,2016)$ τέτοιο ώστε:

$$3f(x_0)=f(2015)+f(2016)+f(2017)$$

Λύση

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2015,2016]$ και ισχύει $2015<2016<2017$, τότε:

$f(2017)<f(2016)<f(2015)$

$f(2017)<f(2015)\le f(2015)$

$f(2017)\le f(2017)<f(2015)$ +

$3f(2017)<f(2016)+f(2015)+f(2017)<3f(2015)$

$$f(2017)<\frac{f(2016)+f(2015)+f(2017)}{3}<f(2015)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(2015,2016)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(2015)+f(2016)+f(2017)}{3}$ δηλαδή $3f(x_0)=f(2015)+f(2016)+f(2017)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι μοναδικός .

1.50.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\textbf{(1)}\qquad |xf(x)|\le\frac{x^2}{\frac{1}{2}\ln(2+x^2)+2^{x-1}}\ \textbf{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ να αποδείξετε ότι η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Η (1) παίρνει την μορφή:

$$|xf(x)|\le\frac{x^2}{\frac{1}{2}\ln(2+x^2)+2^{x-1}}\Leftrightarrow|xf(x)|\le\frac{|x|^2}{\frac{1}{2}\ln(2+x^2)+2^{x-1}}\Leftrightarrow|x||f(x)|\le\frac{|x|^2}{\frac{1}{2}\ln(2+x^2)+2^{x-1}}$$

Για $x\ne0$

$$|f(x)|\le\frac{|x|}{\frac{1}{2}\ln(2+x^2)+2^{x-1}}\le|x| \text{ άρα } |f(x)|\le|x| \text{ οπότε } -|x|\le f(x)\le|x| \ (2)$$

Η (2) επειδή $\lim_{x\to0}(-|x|)=\lim_{x\to0}|x|=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής $\lim_{x\to0}f(x)=0$ και επειδή από υπόθεση η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει $f(0)=0$ άρα η Cf διέρχεται από την αρχή την αξόνων.

1.51.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$2f(x)+\eta\mu f(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i)Να αποδείξετε ότι είναι 1-1.

ii)Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$.

iii)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Λύση

i)Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε $2f(x_1)=2f(x_2)$ (1) και $\eta\mu f(x_1)=\eta\mu f(x_2)$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη $2f(x_1)+\eta\mu f(x_1)=2f(x_2)+\eta\mu f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ άρα f είναι 1-1.

ii) Έχουμε: $|2f(x)|=|x-\eta\mu f(x)|\le|x|+|\eta\mu f(x)|\le|x|+|f(x)|$ (ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $|\eta\mu x|\le|x|$)

$|2f(x)|\le|x|+|f(x)|\Leftrightarrow|f(x)|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le f(x)\le|x|$

Για $x=0$: $0\le f(0)\le 0$ άρα $f(0)=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής

Προκύπτει $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ άρα f συνεχής στο 0.

iii) Αν x>0: $2f(x)+\eta\mu f(x)=x$ τότε $\frac{2f(x)}{2x}+\frac{\eta\mu f(x)}{2x}=\frac{1}{2}$

άρα $\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{2}=\frac{\eta\mu f(x)}{2x}$

$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{\eta\mu f(x)}{2x}\right|=\frac{|\eta\mu f(x)|}{2x}\le\frac{1}{2x}$ ή $\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2x}$ ή $-\frac{1}{2x}\le\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2x}$ ή $-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$

1.52 Δίνεται η συνάρτηση: $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=e^x+\ln x+x-1$.

α. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

β. Δείξτε ότι για κάθε $x\in R$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία μόνο ρίζα.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e$.

δ. Βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

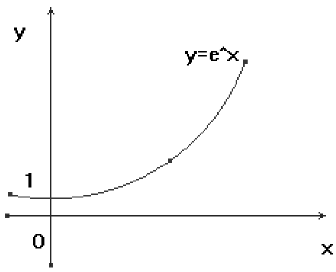
$e^{\lambda^2+1}-e^{2\lambda}=\ln(2\lambda)-\ln(\lambda^2+1)-\lambda^2+2\lambda-1$.

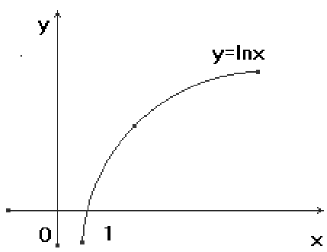
Λύση

α.

- Όπως προκύπτει άμεσα από το σχήμα είναι $\lim\limits_{x\to0^+}e^x=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

- Ανάλογα τώρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$





β.

- Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι συνεχής, θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $-\infty, +\infty$ άρα έχει σύνολο τιμών το R. Συνεπώς θα παίρνει και την τιμή κ πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ρίζα στο R.

- Θα δείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Πραγματικά οι συναρτήσεις $e^x, \ln x, x-1$ είναι γνησίως αύξουσες στο $(0,+\infty)$ άρα και f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ πράγμα που σημαίνει ότι την τιμή κ την παίρνει μια φορά δηλαδή η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μοναδική λύση.

γ. Είναι $f(x) = e \Leftrightarrow e^x + \ln x + x - 1 = e$. Η εξίσωση αυτή έχει προφανή λύση την $x=1$ (αφού $e^1 + \ln 1 + e - 1 = e$) και δεν έχει άλλη σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

δ. Υποπτευόμαστε ότι από τη δοσμένη ισότητα προκύπτουν δύο ίσες τιμές της συνάρτησης. Η ισότητα γράφεται:

$$e^{\lambda^2+1} + \ln(\lambda^2+1) + \lambda^2 = e^{2\lambda} + \ln(2\lambda) + 2\lambda - 1 \Leftrightarrow e^{\lambda^2+1} + \ln(\lambda^2+1) + (\lambda^2+1) - 1 =$$

$$= e^{2\lambda} + \ln(2\lambda) + 2\lambda - 1$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda^2+1) = f(2\lambda) \quad (1).$$

Αλλά η f ως γνησίως αύξουσα είναι «1 – 1» και έτσι από την (1):

$$\lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

(*)Bonus μεζεδάκι θεωρίας

(Προσοχή. Θέλει απόδειξη για να χρησιμοποιηθεί σε άσκηση)

Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι 1-1 και συνεχής τότε είναι γνησίως μονότονη.

Απόδειξη

Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$

Η f είναι 1-1 , άρα οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους .

Θα το δουλέψουμε με την εις άτοπον απαγωγή.

Έστω ότι η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη.

Άρα δεν ισχύουν οι σχέσεις

$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ και $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν βρίσκεται ανάμεσα στα $f(x_1), f(x_3)$.

Οπότε θα ισχύει μια από τις ακόλουθες ανισότητες :

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2) \quad (1)$$

$$f(x_1) > f(x_3) > f(x_2) \quad (2)$$

$$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \quad (3)$$

$$f(x_2) > f(x_1) > f(x_3) \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1) .

Εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(x_1), f(x_2)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, με εφαρμογή του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών έχουμε:

Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) : f(\xi) = f(x_3)$

Δηλαδή, για $\xi < x_3$ έχουμε $f(\xi) = f(x_3)$ άτοπο διότι η f είναι 1-1 .Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο για τις (2) ,(3) ,(4).Άρα κάθε συνάρτηση f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και συνεχής τότε είναι γνησίως μονότονη.

1.53 Δίνεται η συνάρτηση f ,μη σταθερή και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,τέτοια, ώστε:

$$f(x) \geq 0 \text{ ,για κάθε } x \in [\alpha,\beta]$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ υπάρχει $\kappa \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(\kappa) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in (\alpha,\beta)$,ώστε $f(\lambda) \geq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$.

Λύση

α) Σύμφωνα με το θεώρημα μεγίστης ελάχιστης τιμής , ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, όπου m είναι η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$.Επομένως ,αφού $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ έχουμε:

$$m \leq f(x_1) \leq M \quad (1)$$
$$m \leq f(x_2) \leq M \quad (2)$$

Από τις (1),(2) αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, έχουμε:

$$m^2 \leq f(x_1)f(x_2) \leq M^2 \Leftrightarrow m \leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \leq M$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής , υπάρχει $\kappa \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(\kappa) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$

β) Από τις (1) ,(2) για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$, έχουμε:

$$2m \leq f(x_1) + f(x_2) \leq 2M \Leftrightarrow m \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq M$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\lambda \in (\alpha,\beta)$,

ώστε $f(\lambda) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

Όμως ισχύει ότι $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.Επομένως $f(\lambda) \geq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

***1.54Δίνεται συνάρτηση f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και συνεχής ,τέτοια ισχύει:** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x-1974)}{x-1974} = 1$

α. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + xf(x) - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x(f(x)+x^2)}$$

β.Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

γ.Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

δ.Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι περιττή και ισχύει η σχέση

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$$

Να βρείτε το σύνολο τιμών της .

ε.Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{Z}^*$ έτσι ώστε η εξίσωση $f(x) = e^{\alpha+1} - 5$ να έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.(Δίνεται: $\ln\left(\frac{9}{e}\right) = 1,197$)

Λύση

α) Από υπόθεση $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{f(x-1974)}{x-1974} = 1$

Θέτουμε $u = x - 1974$ οπότε όταν $x \to 1974$ τότε $u \to 0$

Επομένως το όριο παίρνει την μορφή:

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$ ή $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+xf(x)-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x(f(x)+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\eta\mu^2 x}{xf(x)+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{f(x)}{x}+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}}{\dfrac{f(x)}{x}+x}=\frac{1+1}{1+0}=2$$

i.Έχουμε β) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1>0$

οπότε $\dfrac{f(x)}{x}>0$ κοντά στο 0 δηλαδή οι αριθμοί x,f(x) είναι ομόσημοι κοντά στο 0.

Συνεπώς υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<0<x_2$ τέτοιοι ώστε:

$f(x_1)<0<f(x_2)$ από υπόθεση όμως η f είναι γνησίως μονότονη άρα f είναι γνησίως αύξουσα

γ) Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\dfrac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$, επειδή η f είναι συνεχής προκύπτει ότι

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

Από το γεγονός ότι η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

-Αν $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0)=0$

-Αν $x<0$ ισχύει $f(x)<f(0)=0$

δ) Η συνάρτηση f είναι περιττή .Δηλαδή $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x))=-\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))=-4$

Αν θέσουμε όπου u το –x παρατηρούμε ότι το u τείνει στο $-\infty$

Οπότε η ισότητα

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(-x)=-4$ γράφεται $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=-4$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-4$

Η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-4,4)$$

e) Η εξίσωση $f(x)=e^{-\alpha-1}-5$ έχει μια (λόγω μονοτονίας) λύση αρκεί

$-4<f(x)<4$ δηλαδή

$$-4<e^{\alpha+1}-5<4\Leftrightarrow 1<e^{\alpha+1}<9\Leftrightarrow 0<\alpha+1<\ln 9\Leftrightarrow -1<\alpha<\ln 9-1\Leftrightarrow -1<\alpha<\ln\left(\frac{9}{e}\right)\Leftrightarrow -1<\alpha<1{,}197$$

Αλλά $\alpha\in\mathbb{Z}^*$ οπότε α=1.

***1.55(Μεζεδακι) Έστω συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα, έχει συνεχή αντίστροφη συνάρτηση και σύνολο τιμών το διάστημα $f:((0,1))=(-\infty,0)$.**

Να αποδείξετε ότι

α. $f^{-1}(x)>0$ **για κάθε** $x<0$

β. η συνάρτηση f^{-1} **είναι γνησίως αύξουσα.**

γ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(\frac{1}{x})}{f^{-1}(x)}=+\infty$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\dfrac{3-f^{-1}(x)}{2}\right)=-2$

Λύση

α. έχουμε $D_{f^{-1}}=f(A)=(-\infty,0)$ και $f^{-1}(A)=D_f=(0,1)$. Άρα, $f^{-1}(x)\in(0,1)$ για κάθε $x<0$ και συνεπώς $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x<0$.

β. Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$f(f^{-1}(y))=y \text{ για κάθε } y\in f(A)$$

και την μονοτονία της f παίρνουμε

$f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2))\Leftrightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επομένως,

$$f^{-1}(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x),\lim_{x\to0}f^{-1}(x)\right)$$

Όμως, $f^{-1}(A)=(0,1)$ και συνεπώς

$$\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=0 \ , \ \lim_{x\to0}f^{-1}(x)=1$$

Οπότε, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f^{-1}(x)}=+\infty \text{ αφού } \lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=0 \text{ και } f^{-1}(x)>0 \text{ για κάθε } x<0$$

Επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty}f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to0}f^{-1}(u)=1>0$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(\frac{1}{x})}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{f^{-1}(x)}\right)=+\infty$

δ.

$$\ln\left(\frac{3-f^{-1}(x)}{2}\right)=-2\Leftrightarrow\frac{3-f^{-1}(x)}{2}=e^{-2}\Leftrightarrow3-f^{-1}(x)=2e^{-2}\Leftrightarrow3-2e^{-2}=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f^{-1}(x)=3-2e^{-2}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=3-\frac{2}{e^2}$$

Αλλά $0<f^{-1}(x)<1$ όμως $3-\frac{2}{e^2}>1$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

1.56 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x^2}-e, x\in(0,+\infty)$

i)Να βρείτε το πρόσημο της τιμής $f\left(\frac{1}{2017}\right)$ **.**

ii)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii)Να δείξετε ότι : $\dfrac{f\left(\frac{1}{2017}\right)}{f\left(\sqrt[3]{2016}\right)}<\dfrac{f\left(\frac{1}{2017}\right)}{f\left(\sqrt[3]{2017}\right)}$ **.**

iv)Αν $a>0$ **,να δείξετε ότι :** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(a)x^5+x^2+2017}{f\left(\frac{1}{a}\right)x^4+2017}=+\infty$

v)Να βρείτε τις πραγματικές τιμές κ,λ ($\lambda>\frac{1}{2}$ **) αν ισχύει:**

$$e^{\kappa^2+\lambda^2}+\ln(\kappa^2+\lambda^2)=e^{2\lambda-1}+\ln(2\lambda-1) \ .$$

Λύση

i)Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2$

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^{\,2}<x_2^{\,2}\Rightarrow e^{x_1^2}<e^{x_2^2} \quad (+)$$

$\ln x_1+e^{x_1^2}<\ln x_2+e^{x_2^2}\Rightarrow\ln x_1+e^{x_1^2}-e<\ln x_2+e^{x_2^2}-e\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επίσης παρατηρούμε ότι $f(1)=\ln1+e^1-e=0$

Έτσι $\frac{1}{2017}<1 \overset{f\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{2017}\right)<f(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2017}\right)<0$

ii) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$ συνεπώς

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+e^{x^2}-e\right)=-\infty+1-e=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=..=+\infty$

iii) $1<\sqrt[3]{2016}<\sqrt[3]{2017} \overset{f\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow} f(1)<f(\sqrt[3]{2016})<f(\sqrt[3]{2017}) \Rightarrow$

$0<f(\sqrt[3]{2016})<f(\sqrt[3]{2017}) \Rightarrow \frac{1}{f(\sqrt[3]{2016})}>\frac{1}{f(\sqrt[3]{2017})} \overset{f\left(\frac{1}{2017}\right)<0}{\Rightarrow} \frac{f\left(\frac{1}{2017}\right)}{f(\sqrt[3]{2016})}<\frac{f\left(\frac{1}{2017}\right)}{f(\sqrt[3]{2017})}$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(a)x^5+x^2+2017}{f\left(\frac{1}{a}\right)x^4+2017}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(a)x^5}{f\left(\frac{1}{a}\right)x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(a)}{f\left(\frac{1}{a}\right)}x \quad (1)$

Για κάθε $a>0$:

Αν $a>1$ και $\frac{1}{a}<1$ συνεπώς $f\left(\frac{1}{a}\right)<f(1)=0$, $f(a)>f(1)=0$ οπότε $\frac{f(a)}{f\left(\frac{1}{a}\right)}<0$

Αν $a<1$ και $\frac{1}{a}>1$ συνεπώς $f\left(\frac{1}{a}\right)>f(1)=0$, $f(a)<f(1)=0$ οπότε $\frac{f(a)}{f\left(\frac{1}{a}\right)}<0$

Άρα (1): $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(a)}{f\left(\frac{1}{a}\right)}x=\frac{f(a)}{f\left(\frac{1}{a}\right)}(-\infty) \overset{\frac{f(a)}{f\left(\frac{1}{a}\right)}<0}{=} +\infty$

v) $e^{\kappa^2+\lambda^2}+\ln(\kappa^2+\lambda^2)=e^{2\lambda-1}+\ln(2\lambda-1) \Leftrightarrow e^{\kappa^2+\lambda^2}+\ln(\kappa^2+\lambda^2)-e=e^{2\lambda-1}+\ln(2\lambda-1)-e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\kappa^2+\lambda^2)=f(2\lambda-1) \overset{f\nearrow \text{ άρα } f\ 1-1}{\Leftrightarrow} \kappa^2+\lambda^2=2\lambda-1 \Leftrightarrow \kappa^2+\lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \kappa^2+(\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa=0 \text{ και } \lambda=1$

1.57 (*large oefetζιδικο*) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-e^{3x}-x^3+1$.

B1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

B2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{f(x)}$.

B3.α)Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x}-x^3-2015}=1$, έχει μοναδική ρίζα.

B4. Αν για τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$e^{3g(x)}+g^3(x)=x^3\cdot e^6+(\ln x+2)^3$, για κάθε x > 0, να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι g(x)= lnx + 2 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Λύση

B1. Η συνάρτηση $f(x)=-e^{3x}-x^3+1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Τότε έχουμε διαδοχικά:

$3x_1<3x_2$ και $x_1^3<x_2^3$

$e^{3x_1}<e^{3x_2}$ και $-x_1^3>-x_2^3$

$-e^{3x_1} > -e^{3x_2}$ (1) και $-x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $-e^{3x_1} - x_1^3 + 1 > -e^{3x_2} - x_2^3 + 1$.

Επομένως $f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = -e^0 - 0 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Άρα η f έχει τουλάχιστον, μία ρίζα, το $x_0=0$.

Αυτή είναι και μοναδική, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Έτσι για κάθε $x > 0$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει $f(x) < f(0)$, δηλαδή $f(x) < 0$.

Ενώ για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) > f(0)$, οπότε $f(x) > 0$.

Το πρόσημο της f φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Β2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, είναι και συνεχής στο $x_0=0$. Οπότε ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Για $x \neq 0$ έχουμε: $\dfrac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \dfrac{1}{f(x)}$.

Για $x > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[1 - \dfrac{1}{f(x)}\right] = +\infty$.

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) < 0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Για $x < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[1 - \dfrac{1}{f(x)}\right] = -\infty$.

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) > 0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{f(x)}$.

Β3.α) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι και 1 – 1, επομένως αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι το σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι, το σύνολο τιμών της, είναι το

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{3x} - x^3 + 1\right) = -\infty$.

Ειδικά $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$.

Θέσαμε u=3x, οπότε αν $x\to +\infty$ τότε $u\to +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{3x} - x^3 + 1\right) = +\infty$.

Ειδικά $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u} = 0$.

Θέσαμε u=3x οπότε αν x→ −∞ τότε u→ −∞, ενώ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right) = +\infty$.

β) Ισχύουν ισοδύναμα:

$$e^{-e^{3x}-x^3-2015} = 1 \Leftrightarrow e^{-e^{3x}-x^3-2015} = e^0 \Leftrightarrow -e^{3x}-x^3-2015 = 0 \Leftrightarrow -e^{3x}-x^3+1 = 2016 \Leftrightarrow f(x) = 2016$$

.

Θέλουμε, λοιπόν, να δείξουμε ότι, η εξίσωση f(x)=2016 έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$. Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η τιμή $2016 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση f(x)=2016, έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αυτή είναι μοναδική, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Β4. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$e^{3g(x)} + g^3(x) = x^3e^6 + (\ln x+2)^3 \overset{x^3e^6>0}{\Leftrightarrow} e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{\ln\left(x^3e^6\right)} + (\ln x+2)^3 \Leftrightarrow$$

$$e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{\ln x^3+\ln e^6} + (\ln x+2)^3$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{3\ln x+6} + (\ln x+2)^3 \Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{3(\ln x+2)} + (\ln x+2)^3$$

$$\Leftrightarrow -e^{3g(x)} - g^3(x) = -e^{3(\ln x+2)} - (\ln x+2)^3 \Leftrightarrow -e^{3g(x)} - g^3(x) + 1 = -e^{3(\ln x+2)} - (\ln x+2)^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) = f(\ln x+2) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} g(x) = \ln x + 2.$$

Για την εύρεση της αντίστροφης της g, θέτουμε y=g(x) και λύνουμε ως προς x.

Έχουμε λοιπόν ισοδύναμα:

$g(x) = y \Leftrightarrow y = \ln x + 2, y \in \mathbb{R}$, καθώς $\ln x + 2 \in \mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \ln x = y-2 \Leftrightarrow x = e^{y-2}, y\in\mathbb{R} \\ \text{όμως } f^{-1}(y) = x \end{array}\right\} \text{ οπότε } f^{-1}(y) = e^{y-2},\ y\in\mathbb{R} \text{ και έτσι } f^{-1}(x) = e^{x-2},\ x\in\mathbb{R}.$$

1.58.Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει

$f^2(x) + 2xf(x) = 1 - συν^2x - x^2$, για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, με $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}$.

Γ1. Να δείξετε ότι f(x) = ημx – x, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x)+1 & ,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{ημ(κx)}{x} - 1 & ,x<0 \end{cases}$, **με $κ \in \mathbb{R}$.**

Να βρείτε την παράμετρο κ, ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Γ3. Για κ=2, να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

Γ4. Για κ=2, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1 – 1.

Λύση

Γ1. Για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ισοδύναμα:

$f^2(x)+2xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2x-x^2 \Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x)+x^2=\eta\mu^2x \Leftrightarrow (f(x)+x)^2=\eta\mu^2x \ (1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται $h^2(x)=\eta\mu^2x$ (2) και ισχύει για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η εξίσωση h(x)=0 στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ γράφεται ισοδύναμα:

$h(x)=0 \Leftrightarrow h^2(x)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Επομένως, η εξίσωση h(x)=0 έχει στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ μοναδική ρίζα την x=0.

Η h στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών και δεν μηδενίζεται σ' αυτό. Άρα, στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ η h διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}>0$.

Συνεπώς για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, ισχύουν $h(x)>0$ και $\eta\mu x>0$.

Οπότε η σχέση (2) γίνεται ισοδύναμα h(x)=ημx ή ισοδύναμα f(x) + x = ημx και τελικά f(x) = ημx – x, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επιπλέον ισχύει f(0)=ημ0 – 0 = 0. Εντέλει δείξαμε ότι, f(x) = ημx – x, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ2. Έχουμε: $g(x)=\begin{cases} f(x)+1 & ,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1 & ,x<0 \end{cases}$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ η g είναι συνεχής γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Επομένως, πρέπει η g να είναι συνεχής στο $x_0=0$. Οπότε ισχύει:

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=g(0)\ (1)$.

Για x > 0, έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(f(x)+1)=f(0)+1=1\ (2)$.

Έχουμε δείξει στο Γ1, ότι η f είναι συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=0$.

Για x < 0, έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1\right]=\kappa-1\ (3)$.

Αν θέσουμε u=κx, τότε $\lim\limits_{x\to0^-}u=\lim\limits_{x\to0^-}(\kappa x)=0$.

Έτσι, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{x}=\kappa\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x}=\kappa\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\kappa\cdot 1=\kappa$.

Επίσης g(0) = f(0) + 1 = 1 (4).

Η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2), (3) και (4) γίνεται ισοδύναμα: 1 = κ – 1 = 1. Οπότε κ – 1 = 1 και άρα κ = 2.

Γ3. Για κ = 2 η g γίνεται:

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+1, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{\eta\mu 2x}{x}-1, & x<0 \end{cases}$$

Η g είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\eta\mu\left[2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}{-\frac{\pi}{2}}-1=\frac{\eta\mu(-\pi)}{-\frac{\pi}{2}}-1=\frac{\eta\mu\pi}{\frac{\pi}{2}}-1=0-1=-1$$

g(0)=1

Άρα $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot g(0)<0$.

Έτσι από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση g(x)=0, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

Γ4. Παρατηρούμε ότι $g(-2\pi)=\dfrac{\eta\mu(-4\pi)}{-2\pi}-1=\dfrac{\eta\mu 4\pi}{2\pi}-1=0-1=-1$. Επίσης από το ερώτημα Γ3, $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

Έτσι ισχύει $g(-2\pi)=g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ενώ $-2\pi\neq-\dfrac{\pi}{2}$.

Ώστε η g δεν είναι 1 – 1.

- Ένας δεύτερος τρόπος στην περίπτωση που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε δύο ίσες τιμές, είτε στον ίδιο κλάδο, είτε σε διαφορετικούς κλάδους.

Παρατηρούμε $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+1=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}+1=2-\dfrac{\pi}{2}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $x_0\in(-\infty,0)$, ώστε $g(x_0)=2-\dfrac{\pi}{2}$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\eta\mu 2x}{x}-1\right)=0-1=-1$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

<u>Απόδειξη:</u>

$$|\eta\mu 2x|\le 1\Leftrightarrow|\eta\mu 2x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{\eta\mu 2x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$$

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, οπότε, από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}-1\right)=1$.

Έστω η συνάρτηση $\Lambda(x)=g(x)-\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$, $x<0$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\Lambda(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[g(x)-\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-1-2+\frac{\pi}{2}=-3+\frac{\pi}{2}<0$.

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α, κοντά στο −∞, ώστε να ισχύει ισοδύναμα:

$\Lambda(\alpha)<0 \Leftrightarrow g(\alpha)-\left(2-\frac{\pi}{2}\right)<0 \Leftrightarrow g(\alpha)<2-\frac{\pi}{2}$.

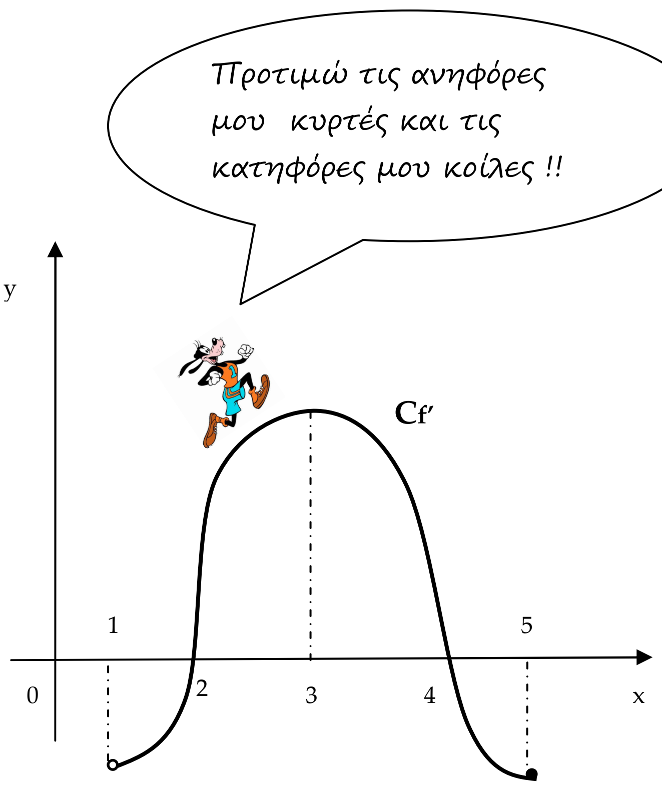
$\lim\limits_{x\to 0^-}\Lambda(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[g(x)-\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\eta\mu 2x}{x}-1-2+\frac{\pi}{2}\right]=2-1-2+\frac{\pi}{2}=-1+\frac{\pi}{2}>0$.

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\beta<0$, κοντά στο 0, ώστε να ισχύει ισοδύναμα:

$\Lambda(\beta)>0 \Leftrightarrow g(\beta)-\left(2-\frac{\pi}{2}\right)>0 \Leftrightarrow g(\beta)>2-\frac{\pi}{2}$.

Επομένως $g(\alpha)<2-\frac{\pi}{2}<g(\beta)$ και η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq(-\infty,0)$. Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ άρα και στο $(-\infty,0)$ ώστε $g(x_0)=2-\frac{\pi}{2}$. Εντέλει $g(x_0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ενώ, $x_0\in(-\infty,0)$ και $\frac{\pi}{2}\in(0,+\infty)$. Άρα $x_0\neq\frac{\pi}{2}$. Οπότε η g δεν είναι 1 – 1.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ


Προτιμώ τις ανηφόρες
μου κυρτές και τις
κατηφόρες μου κοίλες !!
y
Cf′
1
5
0
2
3
4
x

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ και ισχύει η ιδιότητα

$$x^2f^3(x)+2f(x)=x^3-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \mathbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (2) Λόγω της συνέχειας ισχύει: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ (3)

Πρέπει να υπολογίσουμε το $f(1)$.Από την (1) για $x=1$.

$$1^2f^3(1)+2f(1)=1^3-1\Leftrightarrow f^3(1)+2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)(f^2(1)+2)=0\overset{f^2(1)+2\neq0}{\Leftrightarrow}f(1)=0$$

Άρα αναζητούμε το όριο: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (1)

$$x^2f^3(x)+2f(x)=x^3-1\Leftrightarrow f(x)\left[x^2f^2(x)+2\right]=(x-1)(x^2+x+1) \quad \text{για } x\neq1$$

$\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2f^2(x)+2}$.Άρα $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2f^2(x)+2}=\dfrac{1^2+1+1}{1^2f^2(1)+2}=\dfrac{3}{2}$

2.2 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(x^2)+xf(x)=x^4+x^3+x+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε :

i) την τιμή $f'(1)$ **ii) το όριο** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(x)-2}{x-1}$

ΛΥΣΗ

i)Από την δοθείσα σχέση παραγωγίζοντας, λαμβάνουμε:

$f'(x^2)(x^2)'+(x)'f(x)+xf'(x)=4x^3+3x^2+1$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Δηλαδή

$f'(x^2)2x+f(x)+xf'(x)=4x^3+3x^2+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θέτοντας στην τελευταία σχέση όπου x το 1 βρίσκουμε

$$f'(1^2)2\cdot1+f(1)+1f'(1)=4\cdot1^3+3\cdot1^2+1\Leftrightarrow3f'(1)+f(1)=8 \quad (1)$$

Επίσης, από την δοθείσα σχέση θέτοντας όπου x το 1 βρίσκουμε

$f(1^2)+1f(1)=1^4+1^3+1+1\Leftrightarrow f(1)+f(1)=4\Leftrightarrow2f(1)=4\Leftrightarrow f(1)=2$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (1) έχουμε:

$3f'(1)+2=8\Leftrightarrow f'(1)=2$

ii)Αποδείξαμε ότι $f'(1)=2$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$ ή $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=2$

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-2}{x-1},x\neq1$

Επομένως,

$$g(x)(x-1)=f(x)-2 \quad \text{για κάθε } x\neq1$$

Δηλαδή $f(x)=g(x)(x-1)+2$ για κάθε $x\neq1$

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{xf(x)-2}{x-1}=\frac{x\big(g(x)(x-1)+2\big)-2}{x-1}=\frac{g(x)(x-1)x+2x-2}{x-1}=$$

$$\frac{g(x)(x-1)x+2(x-1)}{x-1}=\frac{(x-1)(g(x)x+2)}{x-1}=xg(x)+2 \quad \text{για κάθε } x\neq1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\big(xg(x)+2\big)=\lim\limits_{x\to1}\big(xg(x)\big)+2=1\cdot2+2=4$

2.3 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την όποια ισχύει:

$$f(e^{2x})+2f(x^2+1)=x+6 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Να δείξετε ότι:

i) $f(1)=2$ **ii)** $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{1}{2}$ **iii)** $\lim_{x\to 1}\frac{\left(f(x)\right)^2-4}{x^2+3x-4}=\frac{1}{3}$

ΛΥΣΗ

i)Για $x=0$ στην (1) προκύπτει:

$f(e^{2\cdot 0})+2f(0^2+1)=0+6 \Leftrightarrow f(1)+2f(1)=6 \Leftrightarrow f(1)=2$

ii)Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$\left(f(e^{2x})+2f(x^2+1)\right)'=\left(x+6\right)' \Leftrightarrow f'(e^{2x})(e^{2x})'+2f'(x^2+1)(x^2+1)'=1 \Leftrightarrow 2f'(e^{2x})e^{2x}+2f'(x^2+1)2x^2=1$

$\Leftrightarrow 2f'(e^{2x})e^{2x}+4f'(x^2+1)x^2=1 \quad (2)$

Για x=0 η (2) γίνεται:

$\Leftrightarrow 2f'(e^{2\cdot 0})e^{2\cdot 0}+4f'(0^2+1)0^2=1 \Leftrightarrow 2f'(1)e^{2\cdot 0}+4f'(0^2+1)\cdot 0^2=1 \Leftrightarrow 2f'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.Επομένως:

$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{1}{2}$

iii)Έχουμε:

$\lim_{x\to 1}\frac{\left(f(x)\right)^2-4}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(f(x)-2\right)\left(f(x)+2\right)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$

2.4Εστω δυο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **τέτοιες, ώστε**

$$f(x)g(x)=\eta\mu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

i)αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ **και**

$$f(0)=1$$

Τότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$g'(0)=1$$

ii)αν ισχύει

$$f(0)=g(0)=0$$

Τότε μια τουλάχιστον από τις συναρτήσεις f,g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$**.**

ΛΥΣΗ

i)Για όποια $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση

$$f(x)\neq 0$$

Η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{\eta\mu x}{f(x)}$$

Είναι επίσης παραγωγίσιμη και ισχύει η σχέση

$$g'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)-\eta\mu x\cdot f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$$

Όμως, από την υπόθεση η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και

$$f(0)=1\neq 0$$

Επομένως, η συνάρτηση g είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με

$$g'(0)=\frac{\sigma\upsilon\nu 0\cdot f(0)-\eta\mu 0\cdot f'(0)}{\left[f(0)\right]^2}=\frac{1-0}{1}=1$$

ii)Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ στο οποίο οι f,g είναι παραγωγίσιμες από την δοθείσα σχέση παίρνουμε

$$\left(f(x)g(x)\right)' = \left(\eta\mu x\right)' \Leftrightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

Αν υποθέσουμε ότι οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ προκύπτει η σχέση $f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 1$ άτοπο. Άρα, μια τουλάχιστον από τις συναρτήσεις f,g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

2.5 Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α με $f(\alpha) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α.

ΛΥΣΗ

Για τυχαίο $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq \alpha$ έχουμε:

$$\frac{|f(x)| - |f(\alpha)|}{x-\alpha} = \frac{\left(|f(x)| - |f(\alpha)|\right)\left(|f(x)| + |f(\alpha)|\right)}{(x-\alpha)\left(|f(x)| + |f(\alpha)|\right)} = \frac{|f(x)|^2 - |f(\alpha)|^2}{(x-\alpha)\left(|f(x)| + |f(\alpha)|\right)} = \frac{\left(f(x)\right)^2 - \left(f(\alpha)\right)^2}{(x-\alpha)\left(|f(x)| + |f(\alpha)|\right)} =$$

$$= \frac{\left(f(x) - f(\alpha)\right)\left(f(x) + f(\alpha)\right)}{(x-\alpha)\left(|f(x)| + |f(\alpha)|\right)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} \cdot \frac{f(x) + f(\alpha)}{|f(x)| + |f(\alpha)|} \quad (1)$$

Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο α οπότε και η $|f|$ είναι συνεχής στο α.

Επομένως

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)| - |f(\alpha)|}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} \cdot \frac{f(x) + f(\alpha)}{|f(x)| + |f(\alpha)|}\right) = \lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha}\right)\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x) + f(\alpha)}{|f(x)| + |f(\alpha)|}\right) = f'(\alpha)\frac{f(\alpha) + f(\alpha)}{|f(\alpha)| + |f(\alpha)|} =$$

$$= f'(\alpha)\frac{f(\alpha) + f(\alpha)}{|f(\alpha)| + |f(\alpha)|} = \frac{f'(\alpha)f(\alpha)}{|f(\alpha)|} \in \mathbb{R}$$.Άρα η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α.

2.6 Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x \leq f(x) \leq e^x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι :

i) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

i)Για να είναι η f συνεχής στο 0 θα πρέπει να ισχύει: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Από την (1) για $x = 0$ είναι: $0 \leq f(0) \leq e^0 - 1 \Leftrightarrow 0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Είναι $\lim_{x\to 0} x = 0$ και $\lim_{x\to 0}\left(e^x - 1\right) = 0$ από το κριτήριο της παρεμβολής και την (1) προκύπτει $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

ii)Θα σχηματίσουμε το λόγο μεταβολής $\dfrac{f(x) - f(0)}{x-0}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το x

- $x > 0$ η (1)παιρνει την μορφή:

$$x \leq f(x) \leq e^x - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^x - 1}{x} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^x - 1}{x} \quad (2)$$

Αλλά $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^0}{x-0}$ είναι η παράγωγος της e^x στο 0.

Άρα $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$ οπότε από την (2) και το κριτήριο παρεμβολής ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x-0} \quad (3)$$

- $x < 0$ ..... $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x) - f(0)}{x-0}$ (4)

Από (3),(4) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ άρα $f'(0)=1$.

2.7 Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

i) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x)=g(\alpha^x)$ στο $x_0=1$.

ii)Να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(\alpha^x)-xg(\alpha)}{x-1}=\alpha g'(\alpha)\ln\alpha-g(\alpha)\ ,\ 0<\alpha\neq 1$$

ΛΥΣΗ

i)Εφόσον η g είναι παραγωγίσιμη ,άρα η h θα είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα $h'(x)=g'(\alpha^x)(\alpha^x)'=g'(\alpha^x)\alpha^x\ln\alpha$. Άρα $h'(1)=g'(\alpha)\alpha\ln\alpha$

ii)Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(\alpha^x)-xg(\alpha)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{g(\alpha^x)+xg(\alpha^x)-xg(\alpha^x)-xg(\alpha)}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{g(\alpha^x)-xg(\alpha^x)+xg(\alpha^x)-xg(\alpha)}{x-1}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{g(\alpha^x)-xg(\alpha^x)}{x-1}+\frac{xg(\alpha^x)-xg(\alpha)}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{g(\alpha^x)(1-x)}{x-1}+\frac{x(g(\alpha^x)-g(\alpha))}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{g(\alpha^x)(1-x)}{x-1}+x\frac{(g(\alpha^x)-g(\alpha))}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[-g(\alpha^x)+x\frac{(g(\alpha^x)-g(\alpha))}{x-1}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to 1}g(\alpha^x)+\lim_{x\to 1}x\lim_{x\to 1}\frac{(g(\alpha^x)-g(\alpha^1))}{x-1}=-g(\alpha)+1\cdot h'(1)=-g(\alpha)+g'(\alpha)\alpha\ln\alpha=\alpha g'(\alpha)\ln\alpha-g(\alpha)$$

2.8 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 1974 και ισχύει: $f(1974)=5$.Αν για την συνάρτηση g ισχύει

$$g(x)=4(x^2-1974^2)f(x)\ \textbf{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\quad \textbf{(1)}$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 1974 να βρείτε την παράγωγο της.

ΛΥΣΗ

Επειδή, η f είναι συνεχής στο 1974 έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1974}f(x)=f(1974)=5$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1974}\frac{g(x)-g(1974)}{x-1974}=\lim_{x\to 1974}\frac{4(x^2-1974^2)f(x)-4(1974^2-1974^2)f(1974)}{x-1974}=\lim_{x\to 1974}\frac{4(x^2-1974^2)f(x)}{x-1974}=$$

$$=\lim_{x\to 1974}\frac{4(x-1974)(x+1974)f(x)}{x-1974}=\lim_{x\to 1974}4(x+1974)f(x)=\lim_{x\to 1974}4(1974+1974)f(1974)=8(1974)5=40\cdot 1974=..$$

Άρα $g'(1974)=40\cdot 1974$

«Φέτος τηρώ αυστηρό πρόγραμμα μελέτης,δεν θα διαβάζω μόνο όταν κοιμάμαι και για μισή ώρα μετά το φαγητό. Σήμερα, έχω φάει δεκαπέντε φορές!!

Οράτιος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

2.9 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1)Αν μια ευθεία (ε) έχει με την γραφική παράσταση της f μόνο ένα κοινό σημείο , τότε η (ε) είναι πάντοτε εφαπτομένη της. Σ Λ

2)Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Σ Λ

3)Αν δυο συναρτήσεις δεν έχουν κοινά σημεία, τότε δεν δέχονται κοινή εφαπτομένη. Σ Λ

4)Για την συνάρτηση $f(x)=1974x^2, x\in\left[-2,1\right]$ έχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο. Σ Λ

5) Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κοίλη στο Δ, τότε $f''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

Απαντήσεις

1) Λ 2)Λ 3) Λ 4)Λ 5)Λ

2.10 Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(e^{2x})+3f(x^5+1)=2x-4 \text{ ,για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-1}{x^2+2x-3}$

ΛΥΣΗ

Από την (1),για $x=0$, έχουμε:

$$f(e^{2\cdot 0})+3f(0^5+1)=2\cdot 0-4 \Leftrightarrow f(1)+3f(1)=-4 \Leftrightarrow f(1)=-1 \quad (2)$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(f(x)-1\right)\left(f(x)+1\right)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)+1}{x-1}\cdot\dfrac{f(x)-1}{x+3}\right] \qquad (3)$

Οι συναρτήσεις $f(e^{2x}), f(x^5+1)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων .Άρα ,από την (1) έχουμε:

$f'(e^{2x})2e^{2x}+3f'(x^5+1)5x^4=2 \Leftrightarrow 2e^{2x}f'(e^{2x})+15x^4f'(x^5+1)=2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f'(1)2=2 \Leftrightarrow f'(1)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-(-1)}{x-1}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{x-1}=1 \quad (4)$$

Επίσης η f,ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,είναι συνεχής στο $x_0=1$,άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=-1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x+3}=\dfrac{-1-1}{1+3}=-\dfrac{1}{2}$ (5)

Τελικά από (3) ,(4) ,(5) : $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)+1}{x-1}\cdot\dfrac{f(x)-1}{x+3}\right]=-\dfrac{1}{2}$

2.11 Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2\left[f(x)\right]^{667}+666f(x)=x^2-4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \textbf{(1)}$$

Και η f είναι συνεχής στο $x_0=2$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

ΛΥΣΗ

i) Για $x=2$ στην (1) προκύπτει:

$$2^2\left[f(2)\right]^{667}+666f(2)=2^2-4 \Leftrightarrow 4\left[f(2)\right]^{667}+666f(2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(2)\left(4\left[f(2)\right]^{666}+666\right)=0 \overset{4\left[f(2)\right]^{2006}+2006\neq 0 \text{ για κάθε } X\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} f(2)=0$$

Αρκεί, να δείξουμε ότι το $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\in\mathbb{R}$

Για $x\neq 2$ από υπόθεση έχουμε:

$$x^2\left[f(x)\right]^{667}+666f(x)=x^2-4 \Leftrightarrow f(x)\left(x^2\left[f(x)\right]^{666}+666\right)=(x-2)(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)\left(x^2\left[f(x)\right]^{666}+2006\right)}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2}\left(x^2\left[f(x)\right]^{666}+666\right)=x+2\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x-2}=\frac{x+2}{\left(x^2\left[f(x)\right]^{666}+666\right)}$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{\left(x^2\left[f(x)\right]^{666}+666\right)}=\frac{2+2}{\left(2^2\left[f(2)\right]^{666}+666\right)}=\frac{4}{666}=\frac{2}{333}$

2.12 Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε : $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f(x)+x\leq g(x)+\alpha$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο α , να αποδείξετε ότι $g'(\alpha)-f'(\alpha)=1$.

Απόδειξη

Για $x>\alpha$ έχουμε:

$$f(x)+x\leq g(x)+\alpha \Leftrightarrow$$

$$f(x)+x-\alpha\leq g(x) \overset{f(\alpha)=g(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x)-f(\alpha)+x-\alpha\leq g(x)-g(\alpha)\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+\frac{x-\alpha}{x-\alpha}\leq\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+1\leq\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+1\leq\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$, επειδή οι f ,g είναι παραγωγίσιμες στο α, προκύπτει ότι

$$f'(\alpha)+1\leq g'(\alpha)\Leftrightarrow g'(\alpha)-f'(\alpha)\leq 1 \quad (1)$$

Για $x<\alpha$ έχουμε:

$$f(x)+x\leq g(x)+\alpha \Leftrightarrow$$

$$f(x)+x-\alpha\leq g(x) \overset{f(\alpha)=g(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(x)-f(\alpha)+x-\alpha\leq g(x)-g(\alpha)\overset{x<\alpha}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+\frac{x-\alpha}{x-\alpha}\geq\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+1\geq\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+1\geq\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$, επειδή οι f ,g είναι παραγωγίσιμες στο α, προκύπτει ότι

$$f'(\alpha)+1\geq g'(\alpha)\Leftrightarrow g'(\alpha)-f'(\alpha)\geq 1 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και(2) προκύπτει:

$$g'(\alpha)-f'(\alpha)=1$$

2.13 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=2\ln x-2\ln 13-\frac{x}{13}+\frac{13}{x},$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

ii)Να αποδείξετε ότι $\ln\frac{\beta}{13}\le\frac{\beta^2-169}{26\beta}$ **για κάθε** $\beta\ge 13$**.**

iii)Να λύσετε την εξίσωση $\ln\frac{x}{13}=\frac{x^2-169}{26x}$

ΛΥΣΗ

i)Για κάθε $x\in D_f=(0,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=\left(2\ln x-2\ln 13-\frac{x}{13}+\frac{13}{x}\right)'=\frac{2}{x}-\frac{1}{13}-\frac{13}{x^2}=\frac{26x-x^2-169}{13x^2}=-\frac{(x-13)^2}{13x^2}$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\neq 13$ και η f είναι συνεχής στο x=13 άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii)Με

$$\beta\ge 13\overset{f\searrow \text{ στο } (0,+\infty)}{\Rightarrow} f(\beta)\le f(13)\Leftrightarrow 2\ln\beta-2\ln 13-\frac{\beta}{13}+\frac{13}{\beta}\le 2\ln 13-2\ln 13-\frac{13}{13}+\frac{13}{13}\Leftrightarrow 2\left(\ln\beta-\ln 13\right)-\frac{\beta}{13}+\frac{13}{\beta}\le 0\Leftrightarrow$$

$$2\ln\frac{\beta}{13}\le\frac{\beta^2-13^2}{13\beta}\Leftrightarrow\ln\frac{\beta}{13}\le\frac{\beta^2-13^2}{26\beta}\Leftrightarrow\ln\frac{\beta}{13}\le\frac{\beta^2-169}{26\beta}$$

iii)Είναι

$$\ln\frac{x}{13}=\frac{x^2-13^2}{26x}\Leftrightarrow 2\ln\frac{x}{13}=\frac{x^2-13^2}{13x}\Leftrightarrow 2\left(\ln x-\ln 13\right)=\frac{x^2}{13x}-\frac{13^2}{13x}\Leftrightarrow 2\ln x-2\ln 13=\frac{x}{13}-\frac{13}{x}\Leftrightarrow$$

$$2\ln x-2\ln 13-\frac{x}{13}+\frac{13}{x}=0\Leftrightarrow f(x)=0$$

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα την x=13 είναι γνησίως φθίνουσα η ρίζα είναι μοναδική.

2.14 (Θέμα 2000) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **για την οποία ισχύει:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=0$$

i)Να βρείτε την τιμή $f(0)$**.**

ii)Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

iii)Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$ **, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των Cf και Ch στα σημεία** $A(0,f(0))$ **και** $B(0,h(0))$ **είναι παράλληλες.**

ΛΥΣΗ

i)Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}$,όπου το χ κοντά στο 0.

Έχουμε:

$$g(x)=\frac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}\Leftrightarrow g(x)\eta\mu 2x=f(x)-e^{2x}+1\Leftrightarrow f(x)=g(x)\eta\mu 2x+e^{2x}-1$$

Τότε $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu 2x+e^{2x}-1\right)=0$, η f συνεχής στο x=0 άρα $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

ii) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\eta\mu 2x+e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)\eta\mu 2x}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(2g(x)\frac{\eta\mu 2x}{2x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2g(x)\frac{\eta\mu 2x}{2x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=2\lim_{x\to 0}\left(g(x)\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=2\cdot 0\cdot 1+2e^{2\cdot 0}=2$$

Σημειώνουμε ότι:

- Η διάσπαση των ορίων έγινε διότι τα όρια υπάρχουν.
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-e^{2\cdot 0}}{x-0}\right)=k'(0),\ k(x)=e^{2x}$

Άρα $f'(0)=0$

iii) $h'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}f(x)-e^{-0}f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

άρα οι εφαπτομένες των Cf και Ch στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(0,h(0))$ είναι παράλληλες.

2.15 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση h με $h(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}, x\in\mathbb{R}$.

Αν είναι (ε) η εφαπτόμενη της Ch σε ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι η (ε) σχηματίζει με τον άξονα αυτό γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $(x_0,h(x_0))$ ένα κοινό σημείο της Ch με τον $x'x$

Τότε, $h(x_0)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0\Leftrightarrow f(x_0)=0\quad(1)$

Από την υπόθεση της άσκησης ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.Γι να δείξουμε ότι η εφαπτομένη (ε) στο σημείο $(x_0,h(x_0))$ σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{4}$ με τον χ'χ αρκεί να δείξουμε ότι $h'(x_0)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}=1$.

Πραγματικά:

$$h'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)f'(x)-f(x)f'(x)}{\left(f'(x)\right)^2}=\dfrac{\left(f'(x)\right)^2-f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

Άρα, $h'(x_0)=\dfrac{\left(f'(x_0)\right)^2-f(x_0)f''(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^2}\overset{(1)}{=}\dfrac{\left(f'(x_0)\right)^2}{\left(f'(x_0)\right)^2}=1$

Οπότε η (ε) σχηματίζει με τον άξονα αυτό γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

2.16 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **με τις ιδιότητες:**

- $\dfrac{f(e^x)+f(3x)}{2}=f(e^{g(x)})$ **(1)**
- **Η f είναι 1-1**

Να δείξετε ότι :

i)Η εξίσωση $e^x=3x$ **έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα** $(0,1)$**.**

ii)Υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ **τέτοιο ώστε** $g(\xi)=\xi$ **.**

iii)Αν f,g **παραγωγίσιμες με** $f(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **να δείξετε ότι:**

$$g'(\xi)=\frac{\xi+1}{2\xi}$$

iv)Αν Ε(ξ) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ **με τους άξονες Ox,Oy να δείξετε ότι:**

$$E(\xi)<\frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ

i) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^x-3x$,είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και $h(0)=e^0-3\cdot 0=1>0$, $h(1)=e^1-3\cdot 1=e-3<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοια ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow ...e^{\xi}=3\xi$

ii)Βάζουμε στην (1) όπου x=ξ :

$$\frac{f(e^{\xi})+f(3\xi)}{2}=f(e^{g(\xi)})\overset{e^{3\xi}=3\xi}{\Leftrightarrow}\frac{f(e^{\xi})+f(e^{\xi})}{2}=f(e^{g(\xi)})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2f(e^{\xi})}{2}=f(e^{g(\xi)})\Leftrightarrow f(e^{\xi})=f(e^{g(\xi)})\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}e^{\xi}=e^{g(\xi)}\Leftrightarrow g(\xi)=\xi$$

ii)Παραγωγίζουμε την (1)

$$\left(\frac{f(e^x)+f(3x)}{2}\right)'=\left(f(e^{g(x)})\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(f'(e^x)e^x+3f'(3x)\right)=f'(e^{g(x)})e^{g(x)}g'(x)$$

Θέτουμε όπου x=ξ:

$$\frac{1}{2}\left(f'(e^{\xi})e^{\xi}+3f'(3\xi)\right)=f'(e^{g(\xi)})e^{g(\xi)}g'(\xi)\underset{e^{\xi}=\varepsilon\xi}{\overset{g(\xi)=\xi}{\Leftrightarrow}}\frac{1}{2}\left(f'(e^{\xi})e^{\xi}+3f'(e^{\xi})\right)=f'(e^{\xi})e^{\xi}g'(\xi)\Leftrightarrow$$

$$f'(e^{\xi})e^{\xi}+3f'(e^{\xi})-2f'(e^{\xi})e^{\xi}g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(e^{\xi})(e^{\xi}+3-2e^{\xi}g'(\xi))=0\overset{f'(e^{\xi})\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{\xi}+3-2e^{\xi}g'(\xi)=0\overset{e^{\xi}=3\xi}{\Leftrightarrow}3\xi+3-2\cdot 3\xi g'(\xi)=0\Leftrightarrow g'(\xi)=\frac{\xi+1}{2\xi}$$

iii)Η εξίσωση της εφαπτομένης της Cg στο $A(\xi,g(\xi))$ είναι:

$$y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y-\xi=\frac{\xi+1}{2\xi}(x-\xi)\Leftrightarrow y=\frac{\xi+1}{2\xi}x-\frac{\xi+1}{2}+\xi\Leftrightarrow y=\frac{\xi+1}{2\xi}x+\frac{\xi-1}{2}$$

Τα σημεία τομής της Cg με τους άξονες Ox,Oy είναι $B(0,\frac{\xi-1}{2}),\Gamma(\frac{\xi-\xi^2}{\xi+1},0)$

Είναι

$$E(\xi)=\frac{1}{2}\left|\frac{\xi-1}{2}\right|\left|\frac{\xi-\xi^2}{\xi+1}\right|\overset{0<\xi<1}{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\xi}{2}\cdot\frac{\xi-\xi^2}{\xi+1}=\frac{\xi(1-\xi)^2}{4(\xi+1)}$$.Αρκεί

$$\frac{\xi(1-\xi)^2}{4(\xi+1)}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\xi(1-\xi)^2}{2(\xi+1)}<1\overset{0<\xi<1}{\Leftrightarrow}\xi(1-\xi)^2<2(\xi+1)\Leftrightarrow\xi(1-2\xi+\xi^2)<2\xi+2\Leftrightarrow\xi(1-2\xi+\xi^2)<2\xi+2$$

$\xi-2\xi^2+\xi^3<2\xi+2 \Leftrightarrow \xi^3-2\xi^2-\xi-2<0$ ισχύει για $0<\xi<1$

2.17 i) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)g(x)=x \text{ ,για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι μια μόνο από τις γραφικές παραστάσεις των f και g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f'(x)\neq 0 \text{ ,για κάθε } x\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

$$f(x^4)=\left[f(x^2)\right]^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

ΛΥΣΗ

i)Για $x=0$ έχουμε: $f(0)g(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$ ή $g(0)=0$

άρα είναι βέβαιο ότι τουλάχιστον μια από τις γραφικές παραστάσεις των f και g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έστω ότι Cf και Cg διέρχονται και οι δυο από την αρχή των αξόνων O(0,0) τότε:

$$f(0)=0 \text{ και } g(0)=0 \qquad (2)$$

Παραγωγίζοντας την $f(x)g(x)=x$ λαμβάνουμε:

$$\left(f(x)g(x)\right)'=x' \Rightarrow f'(x)g(x)'+f(x)g'(x)=1 \text{ οπότε για } x=0$$

$f'(0)g(0)'+f(0)g'(0)=1 \Rightarrow 0=1$ άτοπο.

ii)Πρέπει να δείξουμε ότι: $f(1)=1$

Παραγωγίζοντας την (4) έχουμε:

$$\left(f(x^4)\right)'=\left(\left[f(x^2)\right]^2\right)' \Leftrightarrow \left(x^4\right)'f'(x^4)=2\left(f(x^2)\right)'f(x^2) \Leftrightarrow$$

$$4x^3f'(x^4)=2f'(x^2)\left(x^2\right)'f(x^2) \Leftrightarrow 4x^3f'(x^4)=4xf'(x^2)f(x^2)$$

Οπότε για $x=1: 4\cdot 1^3f'(1^4)=4\cdot 1f'(1^2)f(1^2) \Rightarrow f'(1)=f'(1)f(1) \Leftrightarrow f'(1)(1-f(1))=0 \overset{f'(1)\neq 0}{\Leftrightarrow} f(1)=1$

Άρα $A(1,1)\in Cf$.

2.18 Αν είναι $f(1)=4, g(1)=8, f'(1)=4, g'(1)=10$, τότε ποια από τα παρακάτω ισχύουν :

α) $(f\cdot g)'(1)=51$

β) $(f+g)'(1)=14$

γ) $(f\cdot g)'(1)=72$

δ) $(\frac{f}{g})'(1)=40$

Απάντηση

Σωστή η (β) $(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=..=14$

Σωστή η (γ) $(f\cdot g)'(1)=f'(1)\cdot g(1)+f(1)\cdot g'(1)=32+40=72$

Σχόλιο στραβού για την (18)…

Βέβαια, για να πούμε και του στραβού το δίκιο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους κανόνες παραγώγισης σε σημείο έτσι, χωρίς περίσκεψη.Δείτε τις συναρτήσεις:

$f(x)=x^2, x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$

$g(x)=3x, x\in[1,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=3$

Όμως η f+g ορίζεται στο $[2,+\infty)\cup\{1\}$ και δεν έχει νόημα η παράγωγος σε μεμονωμένο σημείο στο 1.

2.19 **Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ και έστω $A(\alpha,\beta)$ το σημείο στο οποίο η Cg τέμνει τον άξονα x'x.**

i)Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο α.

ii)να βρείτε την γωνία, την οποία σχηματίζει η εφαπτομένη της Cg στο A με τον χ'χ.

ΛΥΣΗ

i)Η Cg τέμνει στο A με τον x'x άρα $\beta=0$ ή $g(\alpha)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=0\Leftrightarrow f(\alpha)=0$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}}{x-\alpha}\overset{f(\alpha)=0}{=}\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-0}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{f'(x)}=f'(\alpha)\cdot\frac{1}{f'(\alpha)}=1$$

Άρα $g'(\alpha)=1$ οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο α.

i) $g'(\alpha)=\varepsilon\varphi\omega=1\Rightarrow\omega=45^0$ οπότε $\omega=45^0$

2.20 **Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ και ισχύει $x^{f(x)}=e^{x-f(x)}$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτόμενη της Cf που είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε): $y=\frac{1}{4}x+5$ και να βρείτε το σημείο της Cf από το οποίο άγεται η εφαπτομένη αυτή. Κατόπιν να βρείτε την εξίσωση της.**

ΛΥΣΗ

Η ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{1}{4}x+5$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\frac{1}{4}$.

Αν υποθέσουμε ότι από το σημείο $M(x_0,y_0)$ της Cf άγεται εφαπτομένη παράλληλη προς την (ε) τότε: $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon=\frac{1}{4}$ (1)

Θα βρούμε πρώτα τον τύπο της f(x) και κατόπιν της παράγωγο της.

Ισχύει:

$x^{f(x)}=e^{x-f(x)}\Leftrightarrow\ln(x^{f(x)})=\ln(e^{x-f(x)})\Leftrightarrow f(x)\ln x=x-f(x)\Leftrightarrow f(x)\ln x+f(x)=x\Leftrightarrow$

$f(x)(\ln x+1)=x$

Αλλά από το πεδίο ορισμού της f είναι γνωστό ότι

$x>1\Rightarrow\ln x>0\Rightarrow\ln x+1>1$ άρα $\ln x+1\neq0$

Άρα. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x+1}$ (2)

Η παράγωγος της f

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\ln x+1}\right)'=\frac{(x)'(\ln x+1)-(x)(\ln x+1)'}{(\ln x+1)^2}=\frac{\ln x+1-x\frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}=\frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}\quad(3)$$

Η (1) λόγω της (3) δίνει:

$$\frac{\ln x_0}{(\ln x_0+1)^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\ln x_0=(\ln x_0+1)^2\Leftrightarrow 4\ln x_0=(\ln x_0)^2+2\ln x_0+1\Leftrightarrow (\ln x_0)^2-2\ln x_0+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x_0-1)^2=0\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e$$

Έτσι $f(e)=\frac{e}{\ln e+1}=\frac{e}{1+1}=\frac{e}{2}$ οπότε από το σημείο $M\left(e,\frac{e}{2}\right)$ άγεται η εφαπτομένη παράλληλη στην (ε).

Η εξίσωση της εφαπτομένης της είναι: $y-f(e)=f'(e)(x-e)$

Αλλά, $f'(e)=\frac{\ln e}{(\ln e+1)^2}=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$ άρα $y-\frac{e}{2}=\frac{1}{4}(x-e)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{e}{4}$

2.21 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ και το σημείο $M(\lambda,f(\lambda)),\lambda\neq 0$ της γραφικής παράστασης της f.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο M.

β)i)Για $\lambda=3$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την Cf.

ii)Για $\lambda=1$ έχει και άλλο κοινό σημείο με την Cf.

ΛΥΣΗ

α) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}=\frac{1-x}{x^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1-x}{x^2}\right)'=\frac{(1-x)'x^2-(1-x)(x^2)'}{x^4}=\frac{-x^2-(1-x)2x}{x^4}=$$

$$=\frac{-x^2-2x+2x^2}{x^4}=\frac{x^2-2x}{x^4}=\frac{x(x-2)}{x^4}=\frac{x-2}{x^3}$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της Cf στο M είναι :

$$y-f(\lambda)=f'(\lambda)(x-\lambda)\Leftrightarrow y-\frac{1-\lambda}{\lambda^2}=\frac{\lambda-2}{\lambda^3}x-\frac{\lambda-2}{\lambda^3}\lambda\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1-\lambda}{\lambda^2}+\frac{\lambda-2}{\lambda^3}x-\frac{\lambda-2}{\lambda^2}\Leftrightarrow y=\frac{1-\lambda-\lambda+2}{\lambda^2}+\frac{\lambda-2}{\lambda^3}x\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{3-2\lambda}{\lambda^2}+\frac{\lambda-2}{\lambda^3}x\Leftrightarrow y=\frac{\lambda-2}{\lambda^3}x+\frac{3-2\lambda}{\lambda^2}\quad (2)$$

β)i) Για $\lambda=3$ κοινό σημείο είναι το $M(3,f(3))$ με αντικατάσταση στον τύπο της f είναι $M(3,-\frac{2}{9})$

Η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y=\frac{3-2}{3^3}x+\frac{3-2\cdot 3}{3^2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{27}x-\frac{1}{3}$

Τα κοινά σημεία της εφαπτομένης αυτής με την Cf προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$\begin{cases}y=\frac{1}{27}x-\frac{1}{3}\\ y=\frac{1-x}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-x}{x^2}=\frac{1}{27}x-\frac{1}{3}\\ y=\frac{1-x}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow ..\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2=0\\ y=\frac{1-x}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=\frac{1-3}{3^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-\frac{2}{9}\end{cases}$$

Κατά συνέπεια για λ=3 η εφαπτομένη στο $M(3,-\frac{2}{9})$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την Cf.

ii)Για λ=1 κοινό σημείο είναι το $M(1,f(1))$ με αντικατάσταση στον τύπο της f είναι $M(1,0)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y=\frac{1-2}{1^3}x+\frac{1-2\cdot 1}{1^2}\Leftrightarrow y=-x+1$

Τα κοινά σημεία της εφαπτομένης αυτής με την Cf προκύπτουν από την λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=\frac{1-x}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ή } x=-1 \\ y=0 \text{ ή } y=2 \end{cases}$$

Άρα, εκτός από το κοινό σημεία (1,f(1)) ή (1,0) υπάρχει και άλλο κοινό σημείο το (-1,2).

2.22 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης f τέμνει την Cf μόνο σε ένα σημείο. Σ Λ

2)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$ και υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε : $f'(x_0)=0$ τότε ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Σ Λ

3)Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι συνεχής στο x_0. Σ Λ

4)Αν δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε κάθε εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος Δ έχουν ίσες παραγώγους, τότε δεν είναι υποχρεωτικά ίσες στο Δ. Σ Λ

5)Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνεχής συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Σ Λ

6)Αν $f'(x_0)=0$ τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ακρότατο. Σ Λ

7)Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε ισχύει: $f'(x)<0$, για κάθε $x\in\Delta$. Σ Λ

Απαντήσεις

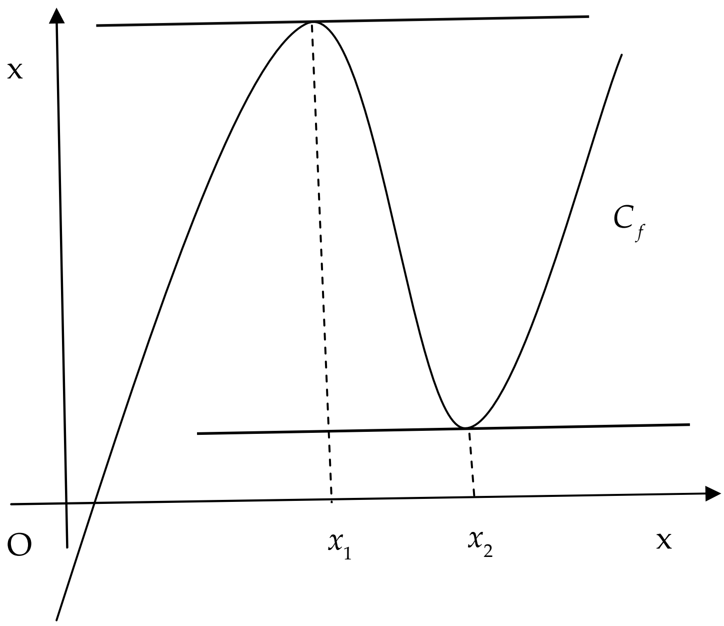
1)Λ 2)Λ 3)Λ 4)Σ 5) Λ 6)Λ 7)Λ

2.23 Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$f(x)=x^3+\kappa x^2+2x+2016\lambda,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι:

$$x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$$



ΛΥΣΗ

Από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι τα x_1,x_2 είναι θέσεις ακρότατων άρα από το θ.Fermat ισχύει $f'(x_1)=0,f'(x_2)=0$

Η παράγωγος της f είναι:

$f'(x)=\left(x^3+\kappa x^2+2x+2016\lambda\right)'=3x^2+\kappa x+2$

Οι αριθμοί x_1,x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $3x^2+\kappa x+2=0$ άρα από τον τύπο του Vieta ($P=\frac{\gamma}{\alpha}$)για το γινόμενο ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης ισχύει: $x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$

2.24 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει (1) $2f(x^2)+xf(x-1)+x^8+2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)+e^{x-1}+3, x\in\mathbb{R}$.Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $A(1,g(1))$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=-1, f'(1)=-1$

ii) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού λ, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $B(0,f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\lambda-10)x+y=1974$

ΛΥΣΗ

i) Στην (1) για $x=0$: $2f(0^2)+0f(0-1)+0^8+2=0 \Leftrightarrow 2f(0)+2=0 \Leftrightarrow f(0)=-1$

Στην (1) για $x=1$: $2f(1^2)+1f(1-1)+1^8+2=0 \Leftrightarrow 2f(1)-1+1+2=0 \Leftrightarrow f(1)=-1$

Εφόσον η εφαπτομένη της Cg στο σημείο $A(1,g(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x,ισχύει ότι $g'(1)=0$.Όμως $g'(x)=f'(x)+e^{x-1}$

Άρα $g'(1)=f'(1)+e^{1-1}=0 \Leftrightarrow f'(1)=-1$.

ii)Για να είναι η εφαπτομένη της Cf στο $B(0,f(0))$ παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon):(\lambda-10)x+y=1974$ αρκεί $f'(0)=10-\lambda$

Παραγωγίζουμε την σχέση (1) και λαμβάνουμε:

$2f'(x^2)\left(x^2\right)'+x'f(x-1)+xf'(x-1)+8x^7=0 \Leftrightarrow 4xf'(x^2)+f(x-1)+xf'(x-1)+8x^7=0$

Για $x=1$:

$4\cdot1\cdot f'(1^2)+f(1-1)+1f'(1-1)+8\cdot1^7=0 \Leftrightarrow 4f'(1)+f(0)+f'(0)+8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cdot(-1)-1+f'(0)+8=0 \Leftrightarrow f'(0)=4+1-8=-3$

Άρα $f'(0)=10-\lambda \Leftrightarrow -3=10-\lambda \Leftrightarrow \lambda=13$.

2.25 i)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x(x-1)^2=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ii)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη των Cf και Cg.

ΛΥΣΗ

i)Έστω συνάρτηση $h(x)=e^x(x-1)^2-4$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $h(1)=e^1(1-1)^2-4=-4<0, h(3)=4e^3-4=4\left(e^3-1\right)>0$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(1,3\right)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$

Άρα, η εξίσωση $e^x(x-1)^2=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ii)Αρχικά θα πρέπει να εξετάσουμε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει ένα σημείο $A(x_0,y_0)$ τέτοιο ώστε

$f(x_0)=g(x_0)=y_0$ και $f'(x_0)=g'(x_0)$, τότε θα έχουμε:

$$e^{x_0}=-\frac{1}{x_0} \text{ και } e^{x_0}=\frac{1}{x_0^{\,2}}$$

Δηλαδή $\frac{1}{x_0^{\,2}}=-\frac{1}{x_0} \overset{x_0\neq0}{\Leftrightarrow} -x_0=x_0^{\,2} \Leftrightarrow x_0+x_0^{\,2}=0 \Leftrightarrow x_0(1+x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=-1$, $\frac{1}{e}\neq-1$

Άρα δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο .

Έστω ότι υπάρχουν σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,g(\beta))$ των γραφικών παραστάσεων των f και g αντίστοιχα στα οποία οι εφαπτομένες ταυτίζονται .
Τότε και ισχύει:

$$f'(\alpha)=g'(\beta)\Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{1}{\beta^2}\Leftrightarrow e^{\alpha}\cdot\beta^2=1 \quad (1)$$

Και

$$g(\beta)-f(\alpha)=f'(\alpha)(\beta-\alpha)\Leftrightarrow -\frac{1}{\beta}-e^{\alpha}=e^{\alpha}(\beta-\alpha)\Leftrightarrow -\frac{1}{\beta}-e^{\alpha}=e^{\alpha}\beta-e^{\alpha}\alpha\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\beta}-e^{\alpha}=\frac{1}{\beta^2}\beta-e^{\alpha}\alpha\Leftrightarrow -\frac{1}{\beta}-e^{\alpha}=\frac{1}{\beta}-e^{\alpha}\alpha\Leftrightarrow e^{\alpha}\alpha-e^{\alpha}=\frac{2}{\beta}\Leftrightarrow e^{\alpha}\left(\alpha-1\right)=\frac{2}{\beta}\Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha}\left(\alpha-1\right)^2=\frac{4}{\beta^2}\Leftrightarrow \beta^2e^{2\alpha}\left(\alpha-1\right)^2=4\Leftrightarrow \beta^2e^{\alpha}e^{\alpha}\left(\alpha-1\right)^2=4\overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{\alpha}\left(\alpha-1\right)^2=4$$

Όπως δείξαμε στο ερώτημα (i) , η παραπάνω εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα ,άρα υπάρχουν σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ τέτοια ώστε οι εφαπτομένες των Cf και Cg να ταυτίζονται.

2.26 Δίνονται οι συναρτήσεις f,f^{-1} παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη 1 επίσης είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f^{-1}(y)-1}{y}=13$.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης τη C_f στο σημείο B(1,f(1)).

ΛΥΣΗ

Η $C_{f^{-1}}$ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη 1 άρα $f^{-1}(0)=1\Leftrightarrow 0=f(1)$.

Θέτουμε $f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow y=f(x)$ όποτε $\lim\limits_{y\to 0}x=\lim\limits_{y\to 0}f^{-1}(y)=f^{-1}(0)=1$

(Υπενθυμίζουμε ότι f^{-1} παραγωγίσιμη στο 0 άρα και συνεχής στο 0)

Τότε

$$\lim_{y\to 0}\frac{f^{-1}(y)-1}{y}=13\Leftrightarrow \lim_{y\to 0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(0)}{y}=13\Leftrightarrow \lim_{y\to 0}\frac{x-1}{f(x)-0}=13\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=13\Leftrightarrow \frac{1}{f'(1)}=13\Leftrightarrow f'(1)=\frac{1}{13}$$

Άρα , η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο B(1,f(1)) είναι

$$(\varepsilon):\quad y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{13}(x-1)$$

2.27Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα**

$$f^3(x)+3f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}-x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i)Αν $g(x)=e^x+x-1$ **,να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης** $g(x)=0$ **και το πρόσημο της g.**
ii)Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
iii)Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f.
iv)Να εξετάσετε αν η f έχει ολικό ελάχιστο.
ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $g'(x)=\left(e^x+x-1\right)'=e^x+1>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα .Όμως, $g(0)=0$,δηλαδή το $x=0$ είναι ρίζα της $g(x)=0$.Άρα το $x=0$ είναι και η μοναδική ρίζα της $g(x)=0$, αφού η g είναι γνησίως μονότονη.

- Για $x<0$ είναι $g(x)<g(0)\Leftrightarrow g(x)<0$
- Για $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$

Άρα, η συνάρτηση g είναι αρνητική στο διάστημα $(-\infty,0)$ και θετική στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ii) Έστω α ένα κρίσιμο σημείο της f .Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, θα είναι $f'(\alpha)=0$.

Η σχέση $f^3(x)+3f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}-x-1$ με παραγώγιση δίνει:

$$3f^2(x)f'(x)+3f'(x)=e^x+x-1\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+3\right)=e^x+x-1\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+3\right)=g(x) \quad (1)$$

Η σχέση (1) για $x=\alpha$ δίνει

$$f'(\alpha)\left(3f^2(\alpha)+3\right)=g(\alpha)\Leftrightarrow g(\alpha)=0$$

Διότι $f'(\alpha)=0$.Όμως $g(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha=0$,από το ερώτημα (i).

Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $x=0$.

iii)Τα τοπικά ακρότατα της f τα αναζητούμε στην περίπτωση μας (αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα) στα κρίσιμα σημεία. Έτσι το μόνο πιθανό τοπικό ακρότατο είναι το f(0).

- Για $x<0$ η σχέση (1) δίνει

$$f'(x)\left(3f^2(x)+3\right)=g(x)<0 \quad \text{οπότε} \quad f'(x)<0 \quad \text{στο} \quad (-\infty,0)$$

- Για $x>0$ η σχέση (1) δίνει

$$f'(x)\left(3f^2(x)+3\right)=g(x)>0 \quad \text{οπότε} \quad f'(x)>0 \quad \text{στο} \quad (0,+\infty)$$

Άρα, το $f(0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτηση f .Για $x=0$ η δοσμένη σχέση δίνει

$$f^3(0)+3f(0)=e^0+\frac{0^2}{2}-0-1\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+3\right)=0\Leftrightarrow f(0)=0$$

Επομένως το $f(0)=0$ είναι το τοπικό ελάχιστο της f.

iv)Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, συμπεραίνουμε ότι το $f(0)=0$ είναι το ολικό ελάχιστο της f.

2.28 Ο Τοτός και τα ακρότατα…

Στο διαγώνισμα τετραμήνου στα μαθηματικά στο σχολείο του Τοτού τέθηκε το ερώτημα:

> **Υπάρχει θετική τιμή του πραγματικού λ ,ώστε η συνάρτηση**
> $$f(x)=\lambda e^x+2016x, x\in[1,2]$$
> **να παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_0=2$.**

Ο Τοτός έλυσε την άσκηση ως εξής:

Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_0=2$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$,με $f'(x)=\lambda e^x+2016$.Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat

$$f'(2)=0\Leftrightarrow \lambda e^2+2016=0\Leftrightarrow \lambda=-\frac{e^2}{2016}<0$$

Άρα δεν υπάρχει θετική τιμή του λ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο 2.

Ο καθηγητής που διόρθωσε το διαγώνισμα του έγραψε στην κόλλα:

…Τοτό, αν λ=5>0 έχουμε $f(x)=5e^x+2016x$, με $f(x)=5e^x+2016>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.Επομένως έχει μέγιστο στο $x_0=2$.

Τελικά, Τοτό υπάρχει ή δεν υπάρχει $\lambda>0$ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο $x_0=2$;

Ποιο ήταν το λάθος στην λύση του Τοτού.

Απάντηση

Η f παρουσιάζει μέγιστο για κάθε θετική τιμή του λ. Το λάθος είναι ότι το θεώρημα Fermat εφαρμόζεται σε εσωτερικό σημείο διαστήματος και όχι σε άκρο διαστήματος.

2.29 (all time classic..)

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση

$$f(x)=x^2-x+\ln x, x\in(0,+\infty)$$

Και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii)Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=1+x-x^2 \text{ και } h(x)=1+\ln x$$

Έχουν μόνο ένα κοινό σημείο ,στο οποίο οι εφαπτομένες ευθείες τους είναι κάθετες μεταξύ τους.

iii)Να αποδείξετε ότι $2+x\ln x>x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $f'(x)=2x-1+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x+1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Το τριώνυμο $2x^2-x+1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (Δ=-7<0) άρα

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Οπότε, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα επίσης $f(1)=0$.Δηλαδή ,το 1 είναι ρίζα της f και μάλιστα μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Σχετικά με το πρόσημο της f παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$
- Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει $f(x)>f(1)=0$

ii)Αρχικά θα δείξουμε ότι η εξίσωση

$h(x)=g(x)\Leftrightarrow h(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x^2-x+\ln x=0\Leftrightarrow f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Αυτό όμως ισχύει από το ερώτημα (i) καθώς αποδείξαμε ότι η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 1. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν μοναδικό κοινό σημείο το A(1,1).Επισης:

$g'(x)=\left(1+x-x^2\right)'=1-2x$ και $h'(x)=\dfrac{1}{x}$

Άρα $g'(1)=-1$ και $h'(1)=1$ έχουμε $g'(1)h'(1)=-1$ το γινόμενο το συντελεστών διεύθυνσης των Cg,Ch στο κοινό τους σημείο A(1,1) είναι -1 άρα οι εφαπτομένες είναι κάθετες.

iii)Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\Phi(x)=2+x\ln x-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},x>0$$

Είναι

$\Phi'(x)=\left(2+x\ln x-x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)'=\ln x+1-1-x+x^2=\ln x-x+x^2=f(x)$ για κάθε $x>0$

Οι ρίζες και το πρόσημο τη $\Phi'(x)$ ει αι οι ρίζες και το πρόσημο της f(x)

x	0	1	$+\infty$
$\Phi(x)=f'(x)$	-		+
$\Phi(x)$	↘		↗

Από τον πίνακα μεταβολών συμπεραίνουμε ότι η Φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ το $\Phi(1)=\dfrac{5}{6}$.Επομένως ,για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$ ισχύει:

$$\Phi(x)\geq\Phi(1)\Leftrightarrow\Phi(x)\geq\frac{5}{6}>0$$

Άρα $2+x\ln x-x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}>0$ τελικά $2+x\ln x>x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$

2.30 Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με τις ιδιότητες:

- $f(-1)+2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x+(x-1)\ln x}{\ln^3 x+(x-1)^2}$
- $f'(x)=\lambda-e^{-x^3}$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- **Η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται «κάτω» από τον χ'χ στο πεδίο ορισμού της.**

i)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

ii) Με την βοήθεια του (i) να δείξετε ότι $f(-1)=0$ **.**

iii) Να αποδείξετε ότι $\lambda=e$ **.**

iv) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

v)Να μελετήσετε την f' ως προς την μονοτονία.

ΛΥΣΗ

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}\overset{g(x)=\ln x}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

Όμως $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g'(1)=1$

Τελικά $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x+(x-1)\ln x}{\ln^3 x+(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\ln^2 x+(x-1)\ln x}{(x-1)^2}}{\dfrac{\ln^3 x+(x-1)^2}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)^2}+\dfrac{(x-1)\ln x}{(x-1)^2}}{\dfrac{\ln^3 x}{(x-1)^2}+\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)^2}+\dfrac{\ln x}{x-1}}{\dfrac{\ln^3 x}{(x-1)^2}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)^2+\dfrac{\ln x}{x-1}}{\ln x\dfrac{\ln^2 x}{(x-1)^2}+1}\overset{(i)}{=}\frac{1^2+1}{0\cdot 1^2+1}=2$$

$f(-1)+2=2\Leftrightarrow f(-1)=0$

iii)Η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται «κάτω» από τον χ'χ στο πεδίο ορισμού της άρα $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή

$f(x)\ge f(-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=-1$.Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_1=-1$ τοπικό ακρότατο άρα από το θεώρημα Fermat ισχύει: $f'(-1)=0$

Έτσι: $f'(-1)=0\Leftrightarrow \lambda-e^{-(-1)^3}=0\Leftrightarrow\lambda=e$

iv)Η δοθείσα σχέση όταν $\lambda=e$ παίρνει την μορφή: $f'(x)=e-e^{-x^3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

- $f'(x)>0\Leftrightarrow e-e^{-x^3}>0\Leftrightarrow e^1>e^{-x^3}\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}1>-x^3\Leftrightarrow x>-1$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow e-e^{-x^3}<0\Leftrightarrow e^1<e^{-x^3}\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}1<-x^3\Leftrightarrow x<-1$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=-1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(-1)=0$

v)Είναι $f'(x)=e-e^{-x^3}$, f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)=..=3x^2e^{-x^3}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2.31 Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta\in\mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$. Σ Λ

2)Για οποιαδήποτε δυο φόρες παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Σ Λ

3)Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι πάντα μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f. Σ Λ

4)Για οποιεσδήποτε παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,με $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,θα ισχύει $f'(x)<g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Σ Λ

Β. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει , τότε μπορούμε να πούμε , ότι δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ (που παίρνει την μορφή $\frac{0}{0}$).

Γ. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο Α είναι περιοδική , η παράγωγος της είναι:
i)Σταθερή
ii)Περιοδική
iii)Θετική

Απαντήσεις

Α.1)Σ 2)Λ 3)Σ 4)Λ

Β. Όχι, διότι το θεώρημα του L'Hospital εκφράζει μόνο ικανή συνθήκη και όχι αναγκαία.

Γ. Σωστό είναι το (ii) .Δείτε.

$$f(x+T)=f(x) \text{ για κάθε } x\in A\text{ , }T\neq 0$$

Παραγωγίζουμε:

$$\left(f(x+T)\right)'=\left(f(x)\right)'\Leftrightarrow f'(x+T)(x+T)'=f'(x)\Leftrightarrow f'(x+T)=f'(x)$$

για κάθε $x\in A$, $T\neq 0$ άρα η f' είναι περιοδική.

2.32 Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

(1) $2xf(x)\ge f'(0)-f'(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $f''(0)+\left(f(0)\right)^2\ge -1$

ΛΥΣΗ

Για $x>0$ από την σχέση (1)

$$2xf(x)\ge f'(0)-f'(x)\Leftrightarrow 2f(x)\ge\frac{f'(0)-f'(x)}{x}\Leftrightarrow 2f(x)\ge\frac{f'(0)-f'(x)}{x-0}\Leftrightarrow 2f(x)\ge-\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$$

Λαμβάνουμε όρια

$$\lim_{x\to 0}\left(2f(x)\right)\ge\lim_{x\to 0}\left(-\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\right)\Leftrightarrow 2f(0)\ge -f''(0)$$

(τα όρια γνωρίζουμε ότι υπάρχουν η f δυο φορές παραγωγίσιμη)

Για $x<0$ από την σχέση (1)

$2xf(x) \ge f'(0) - f'(x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 2f(x) \le -\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$

Λαμβάνουμε όρια

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x)\right) \le \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\right) \Leftrightarrow 2f(0) \le -f''(0)$

Άρα $2f(0) = -f''(0)$

Έτσι $f''(0)+\left(f(0)\right)^2+1 = -2f(0)+\left(f(0)\right)^2+1 = \left(f(0)-1\right)^2 \ge 0$ οπότε $f''(0)+\left(f(0)\right)^2 \ge -1$

(Σε επομένη σελίδα άλλη λύση με χρήση του θεωρήματος Fermat)

2.33Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x \text{ ,}\textbf{με } x>0 \textbf{ και } x \ne 1$$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ **στο σημείο** $A(\alpha,\ln\alpha)$ **,με** $\alpha>0$ **, και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης** $h(x)=e^x$ **στο σημείο** $B(\beta,e^\beta)$ **, με** $\beta\in\mathbb{R}$ **, ταυτίζονται, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης** $f(x)=0$ **.(Εξετάσεις 2006)**

Λύση

Η εφαπτομένη της Cg στο σημείο $A(\alpha,\ln\alpha)$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon_1): y-\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln\alpha$$

Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $B(\beta,e^\beta)$ έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon_2): y-e^\beta = e^\beta(x-\beta) \Leftrightarrow y = e^\beta x - e^\beta\beta + e^\beta \Leftrightarrow y = e^\beta x + e^\beta(1-\beta)$$

Οι ($(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ ταυτίζονται άρα

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^\beta\\ e^\beta(1-\beta)=-1+\ln\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ \dfrac{1}{\alpha}(1-\beta)=-1+\ln\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ \dfrac{1}{\alpha}(1+\ln\alpha)=-1+\ln\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\ln\alpha=-1+\ln\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ 1+\ln\alpha=-\alpha+\alpha\ln\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ 1+\alpha=-\ln\alpha+\alpha\ln\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ 1+\alpha=\left(-1+\alpha\right)\ln\alpha\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ \dfrac{1+\alpha}{-1+\alpha}=\ln\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ \dfrac{1+\alpha}{\alpha-1}-\ln\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ln\alpha=\beta\\ f(\alpha)=0\end{cases}$$

Ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

2.34 Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h^2+3h}=\frac{2xf(x)}{x^2+1}\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h^2+3h}=\frac{2}{h+3}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+\frac{1}{h+3}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$ και $h\neq 3$

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{2xf(x)}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

i)για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$ και $h\neq 3$

$$\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h^2+3h}=\frac{f(x+2h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h(h+3)}=\frac{f(x+2h)-f(x)}{h(h+3)}+\frac{-f(x-h)+f(x)}{h(h+3)}=$$

$$=\frac{f(x+2h)-f(x)}{h(h+3)}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h(h+3)}=\frac{2}{h+3}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}-\frac{1}{h+3}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=$$

$$=\frac{2}{h+3}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+\frac{1}{h+3}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

ii) $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{2}{h+3}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{2}{h+3}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\right)\overset{2h=u}{\underset{h\to 0}{=}}\frac{2}{3}\lim_{u\to 0}\left(\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\right)=\frac{2}{3}f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h+3}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h+3}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)\overset{-h=u}{\underset{u\to 0}{=}}\frac{1}{3}\lim_{u\to 0}\left(\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\right)=\frac{1}{3}f'(x)$$

Άρα το ζητούμενο όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h^2+3h}=\frac{2}{3}f'(x)+\frac{1}{3}f'(x)=f'(x)\text{ ,για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Οπότε από την δοθείσα σχέση $f'(x)=\frac{2xf(x)}{x^2+1}$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2.35 Για μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύουν

α) Είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β) Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

γ) $f(\beta)-\beta^2=f(\alpha)-\alpha^2$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=2x_0$.

ΛΥΣΗ

Η σχέση γράφεται $f'(x_0)-2x_0=0$ και συμπεραίνουμε ότι προέρχεται από την παράγωγο της $f(x)-x^2$.

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x^2$ (1)

Για την g έχουμε :

i) Είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά των συνέχων συναρτήσεων f και x^2.

ii)Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως διαφορά των παραγωγίσιμων στο (α,β) συναρτήσεων f και x^2.

iii) $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha^2=f(\beta)-\beta^2=g(\beta)$ λόγω υπόθεσης.

Επομένως από το θεώρημα Rolle θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

$g'(x_0)=0$.Αλλά $g'(x)\overset{(1)}{=}f'(x)-2x$ οπότε $g'(x_0)\overset{(1)}{=}f'(x_0)-2x_0=0$ άρα $f'(x_0)=2x_0$

2.36 Ο Τοτός και το θεώρημα Rolle

Ο Τοτός –κολοσσός στα μαθηματικά θετικού προσανατολισμού-μπήκε στην σχολική τάξη με αλαζονικό ύφος και είπε στον καθηγητή των μαθηματικών.

-Κύριε απέδειξα ότι το θεώρημα Rolle δεν ισχύει!!

Ο καθηγητής ήξερε τις μαθηματικές ανησυχίες του Τοτού και υπομονετικά ρώτησε:

-Δηλαδή;

-Κοιτάξτε αν έχουμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x)=3x^3$ ***ορισμένη στο διάστημα*** $[-1,1]$***.Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο*** $[-1,1]$ ***και παραγωγίσιμη στο*** $[-1,1]$ ***. Ισχύει ότι:*** $f'(x)=9x^2$ ***.Υπάρχει ένα*** $\xi \in (-1,1)$ ***τέτοιο ώστε:***

$$f'(\xi)=9\xi^2=0$$

Προφανώς $\xi=0$

Άρα κύριε <u>το θεώρημα Rolle ισχύει.</u>

Παρατηρούμε όμως ότι

$f(-1)=3(-1)^3 \neq 3(1)^3=f(1)$

Άρα <u>το θεώρημα του Rolle δεν ισχύει !!</u>

Τι απάντησε ο καθηγητής στον Τοτό;

Απάντηση

Οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle είναι ικανές. Δεν είναι αναγκαίες ώστε η f′(x) να έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα.

(Μεζεδάκια Rolle,Θ.Μ.Τ από το G.Aligniac)

2.37 α) Θεωρούμε τις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ συναρτήσεις f,g που είναι παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $\ln f(\alpha)-\ln f(\beta)=g(\beta)-g(\alpha)$.Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

•

β) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$ με ($\alpha>0$) που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$, με $f(0)=\dfrac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}$ (1).Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f''(\xi)=0$.

•

γ) Θεωρούμε την τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.Υποθέτουμε ότι η f′ είναι κυρτή και ότι η f δεν έχει σημεία καμπής .Να δείξετε ότι η f' είναι 1-1.

•

δ) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη $[0,1]$, με $f(0)=0$ και $f(x)>0$ **για κάθε** $x\in(0,1)$.Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $2\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\ln f(\alpha)-\ln f(\beta)=g(\beta)-g(\alpha)\Leftrightarrow \ln f(\alpha)+g(\alpha)=\ln f(\beta)+g(\beta)$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\ln f(x)+g(x)$ για την οποία ισχύει το θεώρημα Rolle.Πραγματικά η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β),επίσης $h(\alpha)=h(\beta)$ άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $h'(\xi)=0$.

Όμως $h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)$ και $h'(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

•

β) Το θεώρημα της μέσης τιμής για την συνάρτηση f στα διαστήματα $[-\alpha,0],[0,\alpha]$ εφαρμόζεται. Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(-\alpha,0)$, $\xi_2\in(0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-\alpha)}{0-(-\alpha)}\overset{(1)}{=}\frac{\frac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}-f(-\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{2\alpha}\ (2)$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}\overset{(1)}{=}\frac{f(\alpha)-\frac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}}{\alpha}=\frac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{2\alpha}\ (3)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση f′′ στο $[\xi_1,\xi_2]$. Από το θεώρημα του Rolle(f παραγωγίσιμη στο $[\xi_1,\xi_2]$, $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$) άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f''(\xi)=0$.

•

γ) Έστω ότι η f′ δεν είναι 1-1.Τοτε υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$,με $x_1<x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)$.Επειδή η f′ είναι κυρτή, θα ισχύει η f'' είναι γνησίως αύξουσα. Το θεώρημα του Rolle για την f′ στο $[x_1,x_2]$ ισχύει(διότι η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$ και $f'(x_1)=f'(x_2)$).Άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.Επειδή η f′′ είναι γνησίως αύξουσα ,αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ, οπότε το ξ είναι σημείο καμπής της f.Άτοπο. Άρα η f' είναι 1-1.

•

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2f(1-x)$ που είναι ορισμένη στο $[0,1]$.Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $[0,1]$,ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων (άρα και συνεχής). Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ,ώστε $g'(\xi)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}$ (1)

Είναι $g'(x)=\left((f(x))^2f(1-x)\right)'=2f(x)f'(x)f(1-x)+(f(x))^2f'(1-x)(1-x)'=2f(x)f'(x)f(1-x)-(f(x))^2f'(1-x)$

ή

$$g'(x)=2f(x)f'(x)f(1-x)-(f(x))^2f'(1-x)$$

Άρα $g'(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-(f(\xi))^2f'(1-\xi)$

Επίσης έχουμε:

$g(1)=(f(1))^2f(1-1)=(f(1))^2f(0)$, $g(0)=(f(0))^2f(1-0)=(f(0))^2f(1)$

Έτσι η (1) γράφεται:

$$g'(\xi)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=\frac{(f(1))^2f(0)-(f(0))^2f(1)}{1}=(f(1))^2f(0)-(f(0))^2f(1)\overset{f(0)=0}{=}0$$ ή

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-(f(\xi))^2f'(1-\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)=(f(\xi))^2f'(1-\xi)\Leftrightarrow 2\frac{f(\xi)}{(f(\xi))^2}f'(\xi)=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

$$2\frac{f(\xi)}{(f(\xi))^2}f'(\xi)=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\Leftrightarrow 2\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

2.38 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και

$$f(\alpha)=f(\beta)=0 \quad \textbf{(1)}$$

i)Να δείξετε ότι για την συνάρτηση g,με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-x_0}$ **και** $x_0\notin[\alpha,\beta]$ **υπάρχει αριθμός** $\xi\in(\alpha,\beta)$**, τέτοιος ώστε** $g'(\xi)=0$

ii)Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) του διαγράμματος της f στο σημείο Μ(ξ,f(ξ)) διέρχεται από το σημείο $N(x_0,0)$**.**

ΛΥΣΗ

i)Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.Είναι:

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-x_0)-f(x)}{(x-x_0)^2} \qquad (2)$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).Είναι ακόμα:

$$g(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{x-x_0}\overset{(1)}{=}0 \ \ , \ g(\beta)=\frac{f(\beta)}{x-x_0}\overset{(1)}{=}0$$

Άρα από το θεώρημα Rolle , υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $g'(\xi)=0$ (3)

ii)Η (3) είναι ισοδύναμη με την :

$$\frac{f'(\xi)(\xi-x_0)-f(\xi)}{(\xi-x_0)^2}=0\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-x_0)-f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{(\xi-x_0)} \quad (4)$$

Η εφαπτομένη (ε) στο σημείο Μ(ξ,f(ξ)) της γραφικής παράστασης της f έχει εξίσωση:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\overset{(4)}{\Leftrightarrow} y-f(\xi)=\frac{f(\xi)}{(\xi-x_0)}(x-\xi) \quad (5)$$

Οι συντεταγμένες $(x_0,0)$ του σημείου N επαληθεύουν την (5).Πραγματικά:

$$0-f(\xi)=\frac{f(\xi)}{(\xi-x_0)}(x_0-\xi)\Leftrightarrow f(\xi)=-f(\xi)$$

Άρα η (ε) διέρχεται από το σημείο $N(x_0,0)$.

2.39 Δίνονται οι συναρτήσεις f,g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ **με την g παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}$**. Έστω ακόμη ότι, για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **,ισχύει:**

- $g'(x)+g(x)=0$
- $f(x)\cdot g(x)=1$

i)Να βρείτε την εφαπτομένη (ε_1) **της γραφικής παράστασης της f στο** $A(\lambda,f(\lambda))$ **και το σημείο Β που τέμνει τον οριζόντιο άξονα x'x.**

ii)Να βρείτε την εφαπτομένη (ε_2) **της γραφικής παράστασης της f στο** $B(\lambda,g(\lambda))$ **και το σημείο Γ που τέμνει τον οριζόντιο άξονα x'x.**

iii)Αν οι εφαπτομένες (ε_1) **και** (ε_2) **τέμνονται στο σημείο Α, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.**

ΛΥΣΗ i)Για κάθε $x\in\mathbb{R}$,έχουμε:

$g'(x)+g(x)=0 \Leftrightarrow e^x g'(x)+e^x g(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^x g(x)\right)'=0 \Leftrightarrow e^x g(x)=c$

$\Leftrightarrow e^x g(x)=c \Leftrightarrow g(x)=\frac{c}{e^x} \Leftrightarrow g(x)=ce^{-x}$, c σταθερός πραγματικός αριθμός διάφορος του 0, διότι αν $c=0$, θα ισχύει $g(x)=0$, οπότε και $f(x)g(x)=0$, άτοπο από υπόθεση.

Τότε $f(x)g(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{ce^{-x}} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{c}e^x$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)=\frac{1}{c}e^x$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(\lambda,f(\lambda))$ είναι:

$$(\varepsilon_1): y-f(\lambda)=f'(\lambda)(x-\lambda) \Leftrightarrow y-\frac{1}{c}e^\lambda=\frac{1}{c}e^\lambda(x-\lambda)$$

Για y=0, έχουμε $0-\frac{1}{c}e^\lambda=\frac{1}{c}e^\lambda(x-\lambda) \Leftrightarrow \lambda-1=x \Leftrightarrow x=\lambda-1$.

Άρα η (ε_1) τέμνει τον άξονα x'x στο $B(\lambda-1,0)$

ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $g'(x)=-ce^{-x}$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $B(\lambda,g(\lambda))$ είναι:

$$(\varepsilon_2): y-g(\lambda)=g'(\lambda)(x-\lambda) \Leftrightarrow y-ce^{-\lambda}=-ce^{-\lambda}(x-\lambda)$$

Για y=0, έχουμε $(\varepsilon_2): 0-g(\lambda)=g'(\lambda)(x-\lambda) \Leftrightarrow 1=x-\lambda \Leftrightarrow x=1+\lambda$.

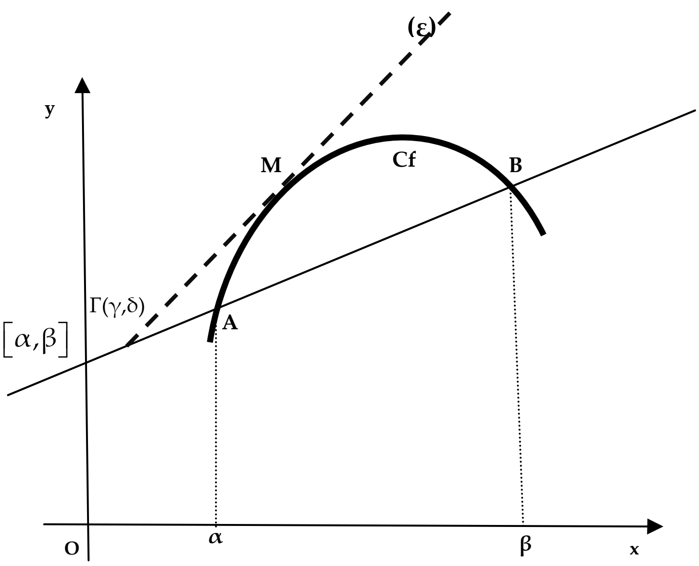
Άρα η (ε_2) τέμνει τον άξονα x'x στο $\Gamma(\lambda+1,0)$

iii)Επειδή $g'(\lambda)f'(\lambda)=\left(-ce^{-\lambda}\right)\left(\frac{1}{c}e^\lambda\right)=-1$, άρα το οι εφαπτόμενες είναι κάθετες οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

2.40 Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ένα σημείο Γ της ευθείας ΑΒ που δεν ανήκει όμως στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Για την συνάρτηση

$$g(x)=\frac{f(x)-\delta}{x-\gamma}$$

Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$
β) Από το Γ είναι δυνατό πάντα να φέρουμε τουλάχιστον μια εφαπτομένη προς την Cf.



ΛΥΣΗ

Α)Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

$g(\alpha)=\frac{f(\alpha)-\delta}{\alpha-\gamma}=\lambda_{AB}$ (Γ,Α σημεία της ευθείας ΑΒ)

$g(\beta)=\dfrac{f(\beta)-\delta}{\beta-\gamma}=\lambda_{AB}$ (Γ,Β σημεία της ευθείας ΑΒ)

Άρα $g(\alpha)=g(\beta)$

Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

β) Οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$ (1)

Αλλά

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)-\delta}{x-\gamma}\right)'=\frac{(f(x)-\delta)'(x-\gamma)-(f(x)-\delta)(x-\gamma)'}{(x-\gamma)^2}==\frac{f'(x)(x-\gamma)-(f(x)-\delta)}{(x-\gamma)^2}$$

Έτσι η (1) γίνεται:

$$\frac{f'(x_0)(x_0-\gamma)-(f(x_0)-\delta)}{(x_0-\gamma)^2}=0\Leftrightarrow f'(x_0)(x_0-\gamma)-(f(x_0)-\delta)=0\Leftrightarrow$$

$$(f(x_0)-\delta)=f'(x_0)(x_0-\gamma)\Leftrightarrow \delta-f(x_0)=f'(x_0)(\gamma-x_0)$$

Δηλαδή η ευθεία $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ (εφαπτομένη) διέρχεται από το σημείο Γ.

2.41Δινεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1,4]$, παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ και η f′ γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,4)$.Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2)+f(3)$ και $f(1)+f(4)$.

Λύση

Από τους αριθμούς στο συμπέρασμα οδηγούμαστε να εργαστούμε με Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[1,2]$ και $[3,4]$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,4]$ άρα συνεχής και σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[3,4]$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $(1,2)$ και $(3,4)$.Επομένως ισχύει Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[3,4]$ οπότε:

Υπάρχει $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε : $f'(x_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)$ (1)

Υπάρχει $x_2\in(3,4)$ τέτοιο ώστε : $f'(x_2)=\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}=f(4)-f(3)$ (2)

Αλλά η f′ γνησίως φθίνουσα στο $(1,4)$ και

$x_1<x_2$ άρα $f'(x_1)>f'(x_2)\Leftrightarrow f(2)-f(1)>f(4)-f(3)\Leftrightarrow f(2)+f(3)>f(1)+f(4)$

2.42 Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $|f'(x)|<\lambda$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ δείξετε ότι για κάθε $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ ισχύει:

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|<\lambda|\xi_1-\xi_2|$$

ΛΥΣΗ

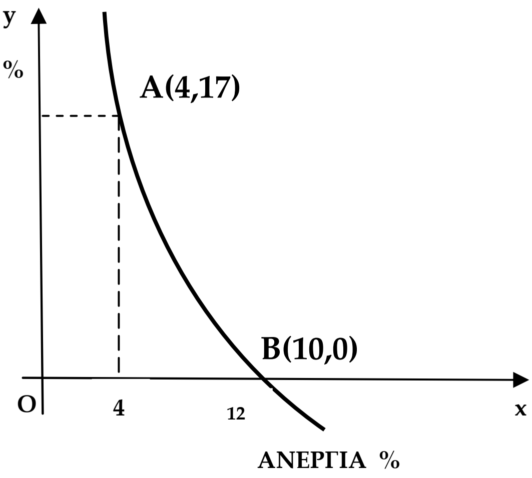
Έστω $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$. Τότε $\xi_1<\xi_2$ ή $\xi_1>\xi_2$. Έστω ότι $\xi_1<\xi_2$ θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ στο $[\xi_1,\xi_2]$. Πραγματικά:

- Η f είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq[\alpha,\beta]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$

Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi_2)-f(\xi_1)=f'(\xi)(\xi_2-\xi_1)$

Επομένως $|f(\xi_1)-f(\xi_2)|<|f'(\xi)||\xi_1-\xi_2|$ και εφόσον $|f'(\xi)|<\lambda$ θα είναι $|f(\xi_1)-f(\xi_2)|<\lambda|\xi_1-\xi_2|$.

2.43 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η συνάρτηση f του πληθωρισμού του κρατιδίου Καφρικιστάν σε σχέση με την ανεργία
i)Αν η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(4,17) είναι ίση με -6 και η ανεργία είναι 4%,να συμπεράνετε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται ο πληθωρισμός.
ii)Τι προκύπτει για τον πληθωρισμό από το διάγραμμα για x>12;



Απάντηση
i)f'(4)=-6 (Μονάδες πληθωρισμού ανα μονάδα ανεργίας)
ii)Η συνάρτηση f από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα άρα θα έχουμε μείωση τιμών.

2.44 Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη και έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ σημεία της Cf.
A) Αν το ευθύγραμμο τμήμα AB τέμνει την Cf στο σημείο $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$, με $\gamma\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.
B) Αν ο κύκλος διαμέτρου AB τέμνει την Cf στο σημείο $\Delta(\delta,f(\delta))$,με $\delta\in(\alpha,\beta)$,να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=-1$.

ΛΥΣΗ

A) Τα σημεία Α,Γ,Β είναι συνευθειακά, άρα

$$\lambda_{A\Gamma}=\lambda_{\Gamma B}\Leftrightarrow\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}\ (1)$$

Όμως από το Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\gamma)$ και $x_2\in(\gamma,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}\quad,\quad f'(x_2)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$$

Άρα από (1) προκύπτει: $f'(x_1)=f'(x_2)$. Από το θεώρημα Rolle για την f′ στο $[x_1,x_2]$ προκύπτει το ζητούμενο.

Β) Ισχύει $ΑΔ\perp ΔΒ \Leftrightarrow \lambda_{ΑΔ}\cdot\lambda_{ΔΒ}=-1 \Leftrightarrow \frac{f(\delta)-f(\alpha)}{\delta-\alpha}\cdot\frac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}=-1$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,\delta],[\delta,\beta]$ και προκύπτει το ζητούμενο.

2.45 i)Να εφαρμόσετε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση $f(x)=ημx$ **στο διάστημα** $\left[\sqrt{\alpha+x},\sqrt{\beta+x}\right]$ **όπου** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **,** $\alpha>\beta$ **,όπου** $x>\max\{-\alpha,-\beta\}$

ii)Με την βοήθεια του ερωτήματος (i) ,να υπολογίσετε το όριο

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[ημ(\sqrt{x+\alpha})-ημ(\sqrt{x+\beta})\right]$

ΛΥΣΗ

i)Για κάθε $x>\max\{-\alpha,-\beta\}$ η συνάρτηση $f(x)=ημx$ είναι συνεχής στο $\left[\sqrt{\alpha+x},\sqrt{\beta+x}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\sqrt{\alpha+x},\sqrt{\beta+x}\right)$

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in\left(\sqrt{\alpha+x},\sqrt{\beta+x}\right)$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(\sqrt{\alpha+x})-f(\sqrt{\beta+x})}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\beta+x}}$

ii)

$$f'(\xi)=\frac{ημ(\sqrt{\alpha+x})-ημ(\sqrt{\beta+x})}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\beta+x}}\Leftrightarrow συν\xi=\frac{ημ(\sqrt{\alpha+x})-ημ(\sqrt{\beta+x})}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\beta+x}}\Leftrightarrow$$

$$συν\xi\left(\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\beta+x}\right)=ημ(\sqrt{\alpha+x})-ημ(\sqrt{\beta+x})$$

$$\left|ημ(\sqrt{\alpha+x})-ημ(\sqrt{\beta+x})\right|=|συν\xi|\left|\left(\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\beta+x}\right)\right|\le\left|\left(\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\beta+x}\right)\right|\overset{\alpha>\beta}{=}\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\beta+x}=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\beta+x}}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\beta+x}}=0$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[ημ(\sqrt{x+\alpha})-ημ(\sqrt{x+\beta})\right]=0$

2.46 ***Ο Τοτός το θεώρημα Μέσης τιμής και το κοινό σημείο!***

Ο Τοτός μπήκε στην σχολική τάξη με αλαζονικό ύφος και είπε στον καθηγητή των μαθηματικών.

-Κύριε έχω απορία!

-Δηλαδή;

Δίνονται οι συναρτήσεις f και f^{-1} ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ **με** $f'(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **.Οι** Cf, Cf^{-1} ***έχουν ένα κοινό σημείο*** **Μ(α,β),** $\alpha\neq\beta$ **.Είναι:**

$$\beta=f(\alpha) \quad \textbf{και} \quad \beta=f^{-1}(\alpha)$$

Ή

$$\beta=f(\alpha) \quad \textbf{και} \quad \alpha=f(\beta)$$

Άρα, από το θεώρημα Μέσης Τιμής ,υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$**,τέτοιο ώστε:**

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \textbf{ή} \quad f'(\xi)=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1<0 \quad \textbf{ή} \quad f'(\xi)<0 \quad \textbf{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

αλλά από υπόθεση $f'(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **.**

Τι απάντησε ο καθηγητής στον Τοτό;

Απάντηση

Προφανώς το κοινό σημείο πρέπει να βρίσκεται στην διχοτόμο της 1ης -3ης γωνίας των αξόνων, οπότε $\alpha=\beta$.Στην περίπτωση αυτήν δεν ορίζεται καν διάστημα (α,β)

2.47 (Μεζεδάκι θεωρίας)

Αν η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ **είναι παραγωγίσιμη στο** (α,β) **τότε:**

i)Αν $f'(x)>0$ **για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$**,τότε** $f(\beta)>f(\alpha)$

ii)Αν $f'(x)<0$ **για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$**,τότε** $f(\beta)<f(\alpha)$

ΛΥΣΗ

i)Το θεώρημα Μέσης τιμής ισχύει, άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.Επειδή $f'(\xi)>0$ και β-α>0 θα είναι και $f(\beta)-f(\alpha)>0$ ή $f(\beta)>f(\alpha)$.Ανάλογα το (ii)

2.48 (All time classic)Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=2x^2\ln x-3x^2+4x-1$$

i)Να βρείτε τις f′ και f′′.

ii)Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

iii)Να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f **.**

iv)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

v)Να βρείτε το πρόσημο της f.

vi)Να βρείτε τα σημεία τομής της Cf με τον οριζόντιο άξονα .

vii)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΛΥΣΗ

i)Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=(0,+\infty)$ και ισχύει:

$f'(x) = .. = 4x\ln x - 4x + 4$ για κάθε $x > 0$.

$f''(x) = .. = 4\ln x$ για κάθε $x > 0$.

ii) Επειδή η f'' είναι αρνητική στο $(0,1)$, θετική στο $(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι:

κοίλη στο $(0,1)$

κυρτή στο $[1,+\infty)$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ	$\cup$

iii)Επειδή $f''(1) = 0$ και η f αλλάζει κοίλα μόνο στο 1, προκύπτει ότι το μόνο σημείο καμπής της Cf είναι το A(1,f(1)) δηλαδή το A(1,0).

iv)Η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Έτσι:

$x < 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

$x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A = (0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

v)Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι:

$x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Άρα, η f είναι αρνητική στο $(0,1)$ και θετική στο $(1,+\infty)$.

vi)Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και f(1)=0,συμπεραίνουμε ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = 1$.Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το A(1,0)

vii)Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = .. = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2\ln x - 3x^2 + 4x - 1\right) = -1$, διότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x^2\ln x\right) \overset{0(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right) \underset{D.H.L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{2x}{x^4}}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = (-1,+\infty)$.

2.49 (μεζεδάκι..) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + e^{f(x)} = -x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 8 \qquad \textbf{(1)}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η Cf δεν έχει κανένα σημείο καμπής.

β) Η f έχει ένα ακριβώς σημείο που είναι θέση τοπικού ακρότατου.

ΛΥΣΗ

Παραγωγίζοντας διαδοχικά κατά μέλη την (1) έχουμε:

$$f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=-4x^3+12x^2-24x \quad (2)$$

$$f''(x)+e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^2+e^{f(x)}f''(x)=-12x^2+24x-24 \Leftrightarrow$$

$$f''(x)+e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^2+e^{f(x)}f''(x)=-12(x^2-2x+2) \quad (3)$$

α) Υποθέτουμε ότι η Cf έχει σημείο καμπής το $A(x_0,f(x_0))$, οπότε $f''(x_0)=0$ Από την (3) για $x=x_0$ έχουμε $f''(x_0)+e^{f(x_0)}\left(f'(x_0)\right)^2+e^{f(x_0)}f''(x_0)=-12({x_0}^2-2x_0+2) \Leftrightarrow e^{f(x_0)}\left(f'(x_0)\right)^2=-12({x_0}^2-2x_0+2)$

Η τελευταία ισότητα όμως δεν μπορεί να ισχύει γιατί είναι $e^{f(x_0)}\left(f'(x_0)\right)^2\geq 0$ ενώ ταυτόχρονα $-12({x_0}^2-2x_0+2)<0$ (εφόσον το τριώνυμο y^2-2y+2 έχει αρνητική διακρίνουσα κατά συνέπεια είναι πάντα ομόσημο του α=1>0, οπότε $y^2-2y+2>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$).

β) Από την (2) :

$$f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=-4x^3+12x^2-24x \Leftrightarrow f'(x)(1+e^{f(x)})=-4x^3+12x^2-24x \overset{1+e^{f(x)}\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x=\frac{-4x^3+12x^2-24x}{1+e^{f(x)}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x^3+12x^2-24x=0 \Leftrightarrow -4x(x^2-3x^2+6)=0 \Leftrightarrow x=0$. Η f' έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ και εκατέρωθεν αυτής αλλάζει πρόσημο ,οπότε το σημείο $x=0$ είναι μοναδική θέση τοπικού ακρότατου της f.

2.50 (Μεζεδάκι θεωρίας)

Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(\alpha,\beta)\subseteq\Delta$ ισχύει

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$$

ΛΥΣΗ

Στα διαστήματα $[\alpha,x],[x,\beta]$ για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ

Άρα, υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x),\xi_2\in(x,\beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x},f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$$

Από την υπόθεση η f είναι κυρτή άρα f' γνησίως αύξουσα

Τότε έχουμε $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ δηλαδή $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<\dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$.

Αν πάρουμε για x το μέσο του $[\alpha,\beta]$ δηλαδή $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, τότε είναι $x-\alpha=\beta-x>0$ και η παραπάνω ανισότητα παίρνει την μορφή: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Για $\alpha=\beta$ η παραπάνω ισχύει ως προφανής ισότητα

Η παραπάνω ανισότητα και η γενίκευση της με πολλά σημεία έχει εμφανιστεί αρκετές φορές στις εξετάσεις . Χαρακτηριστικό είναι το θέμα του 1997.

2.51(1η δέσμη 1997)

Α) Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και κυρτή .Να δείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ για κάθε } x_1,x_2\in\mathbb{R}$$

Β) Δίνεται πραγματική συνάρτηση g,δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$g(x)>0 \text{ και } g''(x)\cdot g(x)-\left[g'(x)\right]^2>0 \text{ ,για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Α) Για $x_1\ne x_2$, έστω $x_1<x_2$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα: $\left[x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right],\left[\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right]$

Οπότε υπάρχουν:

$$\xi_1\in\left(x_1,\frac{x_1+x_2}{2}\right)\quad,\quad\xi_2\in\left(\frac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$$

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}=\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}\quad\text{και}\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}}$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα έχουμε:

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}<\frac{f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}}\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)<f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_2)+f(x_1)\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}$$

Για $x_1=x_2$ η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα.

Β.i)Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(\frac{g'}{g}\right)'(x)=\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g''(x)g(x)-g'(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{g''(x)g(x)-\left[g'(x)\right]^2}{g^2(x)}>0$$

Άρα , η $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα $\mathbb{R}$.

ii)Θεωρούμε την συνάρτηση :

$$h(x)=\ln(g(x)),x\in\mathbb{R}$$

Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Η οποία, λόγω του ερωτήματος (i) είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, η $h(x)=\ln(g(x))$ είναι κυρτή.Οπότε, λόγω του ερωτήματος (Α) ,θα ισχύει:

$$h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{h(x_1)+h(x_2)}{2}\Rightarrow\ln\left(g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\le\frac{\ln(g(x_1))+\ln(g(x_2))}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\le\frac{1}{2}\ln(g(x_1)g(x_2))\Leftrightarrow\ln\left(g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\le\ln(g(x_1)g(x_2))^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)\le\ln\left(\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\right)\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$$

2.52 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f'(x_0)=0$ για κάποιο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0. Σ Λ

2)Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ, με $f'(x_0)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$,δεν παρουσιάζει ακρότατα στο Δ. Σ Λ

3)Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο $-x_0$ έχει τοπικό ελάχιστο. Σ Λ

4)Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Σ Λ

5)Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε $\mathbb{R}$, τότε έχει το πολύ δυο ασύμπτωτες. Σ Λ

Απαντήσεις

1)Λ 2) Σ 3)Σ 4)Λ 5)Σ

2.53Δινεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί την σχέση:

$$f''(x)>4(f'(x)-f(x)) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση :

$$g(x)=f(x)\cdot e^{-2x}$$

Είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.(θέμα εξετάσεων)

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x)=\left(f(x)\cdot e^{-2x}\right)'=f'(x)\cdot e^{-2x}+f(x)\cdot e^{-2x}(-2x)'=f'(x)\cdot e^{-2x}-f(x)\cdot 2e^{-2x}$$

και

$$g''(x)=\left(f'(x)\cdot e^{-2x}-f(x)\cdot 2e^{-2x}\right)'=f''(x)\cdot e^{-2x}+f'(x)\cdot\left(e^{-2x}\right)'-\left(f'(x)\cdot 2e^{-2x}+f(x)\cdot 2e^{-2x}(-2x)'\right)=$$

$$f''(x)\cdot e^{-2x}-2f'(x)e^{-2x}-f'(x)\cdot 2e^{-2x}+f(x)\cdot 4e^{-2x}=e^{-2x}(f''(x)-4f'(x)+4f(x))>0$$

β)Η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.Άρα από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(x_0)=0$, επίσης ισχύει $f(x_0)=0$.

Θα αποδείξουμε ότι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Εφόσον η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$x<x_0 \Leftrightarrow g'(x)<g'(x_0)\Leftrightarrow g'(x)<0$$

$$x>x_0 \Leftrightarrow g'(x)>g'(x_0)\Leftrightarrow g'(x)>0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0. Δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$g(x) \geq g(x_0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.54 Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ **, με**

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + \alpha \ln x + 2x^2 + 2\alpha}{x}, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

Για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq 2 + 2\alpha$ **για κάθε** $x \in (0,+\infty)$**.**

i)Να υπολογίσετε το f(1) και να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$**.**

ii)Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

iii)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

iv)Έστω $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ **παραγωγίσιμη συνάρτηση , της οποίας η γραφική παράσταση έχει δυο κοινά σημεία με την ασύμπτωτη της Cf στο** $+\infty$ **.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση** $g(x) = xg'(x)$ **έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο** $(0,+\infty)$**.**

ΛΥΣΗ

i) $f(1) = \dfrac{\ln^2 1 + \alpha \ln 1 + 2 \cdot 1^2 + 2\alpha}{1} = 2 + 2\alpha$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln^2 x + \alpha \ln x + 2x^2 + 2\alpha}{x}\right)' = \frac{\left(\ln^2 x + \alpha \ln x + 2x^2 + 2\alpha\right)' x - \left(\ln^2 x + \alpha \ln x + 2x^2 + 2\alpha\right)(x)'}{x^2} =$$

$$\frac{\left(2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \alpha \frac{1}{x} + 4x\right)x - \left(\ln^2 x + \alpha \ln x + 2x^2 + 2\alpha\right)}{x^2} = \frac{2\ln x + \alpha + 4x^2 - \ln^2 x - \alpha \ln x - 2x^2 - 2\alpha}{x^2} =$$

$$\frac{2\ln x + 2x^2 - \ln^2 x - \alpha}{x^2}$$

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει: $f(x) \geq 2 + 2\alpha \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ και η f είναι παραγωγίσιμη το 1.Απο το θεώρημα Fermat είναι

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln 1 + 2 \cdot 1^2 - \ln^2 1 - \alpha}{1^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

ii) $f'(x) = \dfrac{2\ln x + 2x^2 - \ln^2 x - 2}{x^2}$ και $f''(x) = \dfrac{2\left(\ln^2 x - \ln x + 2\right)}{x^3} > 0$ για $x > 0$ άρα η f είναι κυρτή.

iii)Η f′ είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1) = 0$.Το πρόσημο της $f'(x)$ και μονοτονία της f φαίνεται στον πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

iv) Βρίσκουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x+2\ln x+2x^2+4}{x^2}\overset{(*)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+4}{x^2}=$
$=0+0+2=2$

(*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{D.H.L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2=0$ **,** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x^2}=..=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=..=0$

Άρα η ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση : $\varepsilon: y=2x$

Υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, με $x_1<x_2$ ώστε $g(x_1)=2x_1$ και $g(x_2)=2x_2$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$, συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και

$h(x_1)=\dfrac{g(x_1)}{x_1}=\dfrac{2x_1}{x_1}=2$, $h(x_2)=...=2$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $h'(x_3)=0$

Αλλά, $h'(x)=\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)'=\dfrac{g'(x)\cdot x-g(x)}{x^2}$ δηλαδή

$\dfrac{g'(x_3)\cdot x_3-g(x_3)}{{x_3}^2}=0\Leftrightarrow g'(x_3)\cdot x_3-g(x_3)=0\Leftrightarrow g'(x_3)\cdot x_3=g(x_3)$.

2.55 Έστω $x^xe^{-x}-\lambda^{x-e}\ge 0$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$**, λ>0**

i) Να βρείτε την τιμή του λ.

ii)Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\sigma\varphi x}=\lambda$ **.**

ΛΥΣΗ

i)Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^xe^{-x}-\lambda^{x-e}$

$f(e)=e^ee^{-e}-\lambda^{e-e}=e^ee^{-e}-1=e^{e-e}-1=e^0-1=1-1=0$

Άρα, η δοσμένη σχέση γράφεται $f(x)\ge f(e)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=e$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και το $x_0=e$ είναι εσωτερικό σημείου του $(0,+\infty)$ σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $f'(e)=0$. (1)

Είναι $f'(x)=\left(x^xe^{-x}-\lambda^{x-e}\right)'=\left(x^x\right)'e^{-x}+x^x\left(e^{-x}\right)'-\lambda^{x-e}\ln\lambda(x-e)'=\left(e^{\ln x^x}\right)'e^{-x}+x^xe^{-x}(-x)'-\lambda^{x-e}\ln\lambda=$

$\left(e^{x\ln x}\right)'e^{-x}-x^xe^{-x}-\lambda^{x-e}\ln\lambda=\left(e^{x\ln x}(x\ln x)'\right)e^{-x}-x^xe^{-x}-\lambda^{x-e}\ln\lambda=\left(e^{x\ln x}(\ln x+1)\right)e^{-x}-x^xe^{-x}-\lambda^{x-e}\ln\lambda=$

$=\left(x^x(\ln x+1)\right)e^{-x}-x^xe^{-x}-\lambda^{x-e}\ln\lambda$

Η (1) γίνεται

$\left(e^e(\ln e+1)\right)e^{-e}-e^ee^{-e}-\lambda^{e-e}\ln\lambda=0\Leftrightarrow\left(e^e(1+1)\right)e^{-e}-1-\ln\lambda=0\Leftrightarrow 2e^ee^{-e}-1-\ln\lambda=0$

$2-1-\ln\lambda=0\Leftrightarrow\ln\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=e$

ii)Το $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\sigma\varphi x}$ παρουσιάζει απροσδιοριστία 1^∞ .Έτσι

$\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\sigma\varphi x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln(1+x)^{\sigma\varphi x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sigma\varphi x\ln(1+x)}$ (2)

Όμως $\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\varphi x\ln(1+x)$ έχει απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)\cdot 0$

$$\lim_{x\to0^+}\sigma\varphi x\ln(1+x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\sigma\varphi x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{\varepsilon\varphi x}\underset{\text{D.L.Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln(1+x))'}{(\varepsilon\varphi x)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1+x}=1$$

Άρα, από την (2) $\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\sigma\varphi x}=\lim_{x\to0^+}e^{\ln(1+x)^{\sigma\varphi x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\sigma\varphi x\ln(1+x)}=e^1=e$

2.56Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$2xf(x)\ge f'(0)-f'(x)\text{ ,για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι $f''(0)+f^2(0)\ge-1$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$2xf(x)\ge f'(0)-f'(x)\Leftrightarrow 2xf(x)+f'(x)-f'(0)\ge0$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση

$h(x)=2xf(x)+f'(x)-f'(0)\,,x\in\mathbb{R}$

Ισχύει $h(0)=2\cdot0\cdot f(0)+f'(0)-f'(0)=0$ Άρα, η (1) παίρνει την μορφή:

$h(x)\ge h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δηλαδή, η συνάρτηση h παρουσιάζει ακρότατο στο 0 .

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat

άρα $h'(0)=0$ Παραγωγίζουμε την h.

$h'(x)=2f(x)+2xf'(x)+f''(x)\,,\ x\in\mathbb{R}$

Τοτε $h'(0)=0\Leftrightarrow 2f(0)+2\cdot0f'(0)+f''(0)=0\Leftrightarrow 2f(0)+f''(0)=0\Leftrightarrow f''(0)=-2f(0)$

Οποτε ,η προς αποδειξην σχεση:

$f''(0)+f^2(0)\ge-1\overset{f''(0)=-2f(0)}{\Leftrightarrow}-2f(0)+f^2(0)\ge-1\Leftrightarrow1-2f(0)+f^2(0)\ge0\Leftrightarrow(1-f(0))^2\ge0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$,άρα ισοδύναμα θα ισχύει και η προς απόδειξη σχέση.

2.57 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια , ώστε:

- $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=1$ **(1)**
- $f'(x)\le1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(2)**
- **η συνάρτηση f'' είναι γνησίως μονότονη**

α) Να βρείτε τις τιμές f(1),f'(1) και την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο της με τετμημένη 1.

β) Να βρείτε το πρόσημο και τις ρίζες της συνάρτησης f''.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to1}\frac{1974}{x-f(x)}$

ΛΥΣΗ

α) Για χ κοντά στο 1 , θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$

$g(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}\Leftrightarrow g(x)(x-1)=f(x)-1\Leftrightarrow g(x)(x-1)+1=f(x)$

Λαμβάνουμε όρια και στα δυο μέλη

$\lim_{x\to1}(g(x)(x-1)+1)=\lim_{x\to1}f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to1}f(x)=1$

f παραγωγίσιμη στο 1 άρα f συνεχής στο 1 οπότε $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=1$

Έχουμε $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\Leftrightarrow f'(1)=1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(1,f(1)) είναι:

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)$ ή $\varepsilon: y-1=1(x-1)$ ή $\varepsilon: y=x$

β) Από την σχέση

$f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x)\le f'(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι η f′ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ άρα από το θεώρημα του Fermat προκύπτει ότι $f''(1)=0$.

Η f′′ είναι γνησίως μονότονη άρα $x_0=1$ είναι μοναδική ρίζα της $f''(x)=0$.

Έστω ότι η f′′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε θα ισχύει

$x<1\Leftrightarrow f''(x)<f''(1)\Leftrightarrow f''(x)<0$ δηλαδή η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$

Όμως

$x<1\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$ άτοπο από την (2) και η f′′ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Οπότε ισχύει για το πρόσημο και τις ρίζες της f′′

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$f''(x)<0\Leftrightarrow f''(x)<f''(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x>1$

$f''(x)>0\Leftrightarrow f''(x)>f''(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x<1$

γ) Από το ερώτημα γ) προκύπτει

$f''(x)<0\Leftrightarrow f''(x)<f''(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x>1$ δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα κάτω όταν $x>1$ αυτό σημαίνει ότι η Cf είναι «κάτω» από την εφαπτομένη της στο (1,f(1)) δηλαδή $f(x)<x$ για $x>1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1974}{x-f(x)}=+\infty$

Ανάλογα

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1974}{x-f(x)}=-\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

(Συμπληρωματικό μεζεδάκι θεωρίας)

Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, εκτός από το σημείο επαφής, βρίσκεται κάτω από την Cf.

Αν η f είναι κοίλη, τότε η εφαπτομένη βρίσκεται πάνω από την Cf.

ΛΥΣΗ

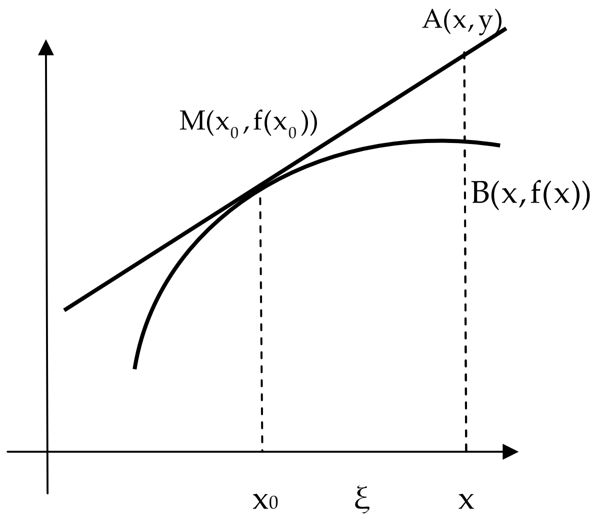
Έστω ότι η συνάρτηση είναι κοίλη και έστω $x>x_0$.Η εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ που γράφεται και στην μορφή

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Για να βρίσκεται η εφαπτομένη πάνω από την Cf πρέπει κάθε σημείο $A(x,y)$ αυτής να βρίσκεται *ψηλότερα* από το αντίστοιχο σημείο $B(x,f(x))$ της συνάρτηση.Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$y > f(x) \Leftrightarrow f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) > f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)(x-x_0) > f(x)-f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) > \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (1)$$



Στο διάστημα $[x_0,x]$ για την f ισχύει το Θεώρημα Μέσης τιμής , άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (x_0,x)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (2)

Από την σχέση (2) , η σχέση (1) που θέλουμε να αποδείξουμε, γράφεται: $f'(x_0) > f'(\xi)$

Αυτή ισχύει, διότι η f είναι κοίλη άρα f′ γνησίως φθίνουσα και επειδή:

$$x_0 < \xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x_0) > f'(\xi)$$

2.58 Έστω η συνάρτηση $f:[0,1] \to \mathbb{R}$,δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν $f(x) > 0, f(0) = 1, f'(0) = 0$ και:

$$f(x)f''(x) - 2[f'(x)]^2 = (f(x))^3 \text{ , } x \in [0,1]$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} - x$ είναι σταθερή στο διάστημα $[0,1]$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f στο διάστημα $[0,1]$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0,1]$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι :

$$g'(x) = \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} - 1 = \frac{f''(x)f(x) - 2(f'(x))^2}{f^3(x)} - 1 \overset{(1)}{=} 1 - 1 = 0$$

Άρα $g(x) = c$ (2) για κάθε $x \in [0,1]$

β) Για $x = 0$ η σχέση (2) δίνει $g(0) = c \Leftrightarrow \dfrac{f'(0)}{f^2(0)} - 0 = c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.Έτσι:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} - x = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + c,\ x \in [0,1]$$

Για $x = 0$ έχουμε $-1 = c$, οπότε:

$$-\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2}{2} - 1 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{2-x^2},\ x \in [0,1]$$

γ) Ισχύει $f'(x) = \left(\dfrac{2}{2-x^2}\right)' = .. = \dfrac{4x}{(2-x^2)^2} > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$.

δ) Έχουμε ότι:

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{(2-x^2)^2}\right)' = .. = \frac{4(3x^2+2)}{(2-x^2)^3} > 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,1]$.

2.59 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=1$
- $f(x)f'(x)=3e^{6x}$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της f.

ΛΥΣΗ

$$f(x)f'(x)=3e^{6x}\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=6e^{6x}\Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{6x}\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^{6x}+c \quad (1)$$

Για x=0 η (1) παίρνει την μορφή:

$$f^2(0)=e^{6\cdot 0}+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα $f^2(x)=e^{6x}$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η σχέση (2) μας δείχνει ότι η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Άρα, ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής οπότε διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.Επειδή $f(0)=1>0$, είναι και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Συνεπώς

$$f^2(x)=e^{6x}\Leftrightarrow f(x)=e^{3x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Bonus.Η λύση του Τοτού

Ο Τοτός –γνωστός μαθηματικός λοξίας-για να λύσει την παραπάνω άσκηση έκανε τα εξής: κατέληξε με τον ίδιο τρόπο στην σχέση (2) και κατόπιν έγραψε:

$$f^2(x)=e^{6x}\Leftrightarrow f^2(x)-e^{6x}=0\Leftrightarrow f^2(x)-\left(e^{3x}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-e^{3x}\right)\left(f(x)+e^{3x}\right)=0\Leftrightarrow f(x)-e^{3x}=0 \text{ ή } f(x)+e^{3x}=0\Leftrightarrow f(x)=e^{3x} \text{ ή } f(x)=-e^{3x}$$

Αλλά ο δεύτερος τύπος για x=0 δίνει $f(0)=-e^{3\cdot 0}=-1$ **οπότε ισχύει μόνο ο πρώτος τύπος** $f(x)=e^{3x}$.

Είναι σωστή η λύση του;

Απάντηση

Είναι λάθος η λύση του Τοτού διότι για δυο συναρτήσεις f,g από την σχέση $f\cdot g=0$ για κάθε χ στο κοινό πεδίο ορισμού των f,g δεν προκύπτει κατά ανάγκη ότι $f=0$ ή $g=0$.

2.60 Να βρεθεί συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με τις ιδιότητες ,

- **f παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$
- $f'(x)=f(x)\ln(xe)$ **(1) για κάθε** $x\in(0,+\infty)$
- **η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in(0,+\infty)$ για το οποίο ισχύει:** $\left[f(x_0)\right]^e=x_0$ **(2)**

ΛΥΣΗ

Για $x>0$ η (1)

$$f'(x)=f(x)\ln(xe)\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+\ln e\Leftrightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\ln x+1\Leftrightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\left(x\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$\ln f(x)=x\ln x+c,\ x>0 \quad (3).$$

Αναζητούμε την τιμή της σταθεράς c.

Το $x_0\in(0,+\infty)$ είναι θέση ακρότατου άρα από Θ.Fermat $f'(x_0)=0$

Η (1) ισχύει για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα θα ισχύει και για $x=x_0$

$$f'(x_0)=f(x_0)\ln(x_0e)\Leftrightarrow 0=f(x_0)\ln(x_0e)\overset{f(x_0)>0}{\Leftrightarrow}\ln(x_0e)=0\Leftrightarrow x_0e=1\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{e}$$

Με αντικατάσταση στην (2)

$\left[f(\frac{1}{e})\right]^e=\frac{1}{e}\Leftrightarrow \ln\left[f(\frac{1}{e})\right]^e=\ln\frac{1}{e}\Leftrightarrow e\ln\left[f(\frac{1}{e})\right]=-1\Leftrightarrow \ln\left[f(\frac{1}{e})\right]=-\frac{1}{e}$ (4)

Η (3) για $x=\frac{1}{e}$ παίρνει την μορφή $\ln f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+c \overset{(4)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα $\ln f(x)=x\ln x\Leftrightarrow f(x)=e^{x\ln x}\Leftrightarrow f(x)=e^{\ln x^x}\Leftrightarrow f(x)=x^x$, $x>0$.

2.61 (Μεζεδάκι 1974 ☺☺)Να συγκριθούν οι αριθμοί $A=\frac{1974^{1973}+1}{1974^{1974}+1}$ **και** $B=\frac{1974^{1974}+1}{1974^{1975}+1}$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{1974^x+1}{1974^{x+1}+1}$, $x\in\mathbb{R}$ Είναι

$$f'(x)=\left(\frac{1974^x+1}{1974^{x+1}+1}\right)'\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow f'(x)<0$$

Άρα , $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$$1973<1974 \overset{f\searrow \text{στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(1973)>f(1974)\Leftrightarrow \frac{1974^{1973}+1}{1974^{1974}+1}>\frac{1974^{1974}+1}{1974^{1975}+1}$$

2.62Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}$ **με** $f(4)=3$ **και ισχύει :**

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-3x}{x-1}=2$

i)Να δείξετε ότι $f(1)=3$

ii)Να βρείτε τον αριθμό $f'(1)$ **και την εφαπτομένη της Cf στο σημείο** $A(1,f(1))$.

iii)Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ **τέμνει την Cf σε σημείο με** $x_0\in(1,4)$.

iv)Αν επιπλέον η f είναι κυρτή , να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει μοναδικός $\xi\in(1,4)$ **στον οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο**

β) $f(3)<f(6)$.

ΛΥΣΗ

i)Από υπόθεση $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-3x}{x-1}=2$.Θέτουμε

$g(x)=\frac{f(x)-3x}{x-1}\Leftrightarrow g(x)(x-1)=f(x)-3x\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+3x$

Από υπόθεση η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, θα είναι :

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(g(x)(x-1)+3x\right)=\lim\limits_{x\to1}g(x)\lim\limits_{x\to1}(x-1)+\lim\limits_{x\to1}(3x)=3$

ii)Έχουμε

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+3x-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+3x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+3(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+3(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(g(x)+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(g(x)+3)=5$$

Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο με $x_0=1$ έχει εξίσωση:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow ...\Rightarrow y=5x-2$

iii)Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x+1$ έχει ρίζα στο διάστημα $(1,4)$.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-x-1$ που είναι συνεχής στο διάστημα $[1,4]$ως άθροισμα συνέχων συναρτήσεων και επιπλέον:

$h(1)=f(1)-1-1=3-1-1=1$

$h(4)=f(4)-4-1=3-4-1=-2$

Άρα $h(1)h(4)<0$ οπότε ισχύει το θεώρημα Bolzano σύμφωνα με το οποίο η συνάρτηση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,4)$.Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτηση f τέμνει σε ένα τουλάχιστον σημείο την ευθεία y=x+1.

iv)α) Εφόσον η f είναι κυρτή θα είναι

f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)>0$

Αφού $f(1)=f(4)$, f συνεχής στο $[1,4]$, f παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.Άρα στο σημείο ξ είναι πιθανό η f να παρουσιάζει ακρότατο. Θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι εκατέρωθεν του ξ αλλάζει η μονοτονία τη f.

- $x<\xi\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(\xi)=0$
- $x>\xi\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(\xi)=0$

Άρα, πραγματικά η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στην θέση ξ .Από τις προηγούμενες σχέσεις φαίνεται ότι η f′ διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,\xi),(-\infty,\xi)$, οπότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο σε άλλο σημείο.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα θα ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[1,3],[4,6]$ σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν δυο τουλάχιστον

$x_1\in(1,3),x_2\in(4,6)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(x_1)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{f(3)-3}{2}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{f(6)-3}{2}$$

Όμως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε η συνάρτηση f′ είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι

έχουμε: $f'(x_1)<f'(x_2)\Rightarrow\frac{f(3)-3}{2}<\frac{f(6)-3}{2}\Rightarrow...\Rightarrow f(3)<f(6)$

2.64 Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

(1) $(f(x))^3+f(x)=x^3+1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση $(f(2x^2-1))^3+f(x)=x^3+1$ **.**

Αν η f επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε:

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατα.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ **.**

ε) Αν $\Delta=[-1,1]$ **αν βρείτε το** $f(A)$ **.**

στ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x)=\frac{3-\lambda}{2}$ έχει λύση στο διάστημα Δ.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\left(f(x)\right)^3+f(x)=x^3+1$, $x\in\mathbb{R}$

Αν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε $f(x_1)^3=f(x_2)^3$ οπότε

$$\left(f(x_1)\right)^3+f(x_1)=\left(f(x_2)\right)^3+f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}{x_1}^3+1={x_2}^3+1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι 1-1.

β) $\left(f(2x^2-1)\right)^3+f(x)=x^3+1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left(f(2x^2-1)\right)^3+f(x)=\left(f(x)\right)^3+f(x)\Leftrightarrow\left(f(2x^2-1)\right)^3=\left(f(x)\right)^3\Leftrightarrow$

$\left(f(2x^2-1)\right)^3=\left(f(x)\right)^3\Leftrightarrow f(2x^2-1)=f(x)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}2x^2-1=x\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\frac{1}{2}$

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left(\left(f(x)\right)^3+f(x)\right)'=\left(x^3+1\right)'\Leftrightarrow 3\left(f(x)\right)^2f'(x)+f'(x)=3x^2\Leftrightarrow f'(x)\left[3\left(f(x)\right)^2+1\right]=3x^2\Leftrightarrow$$

$$\overset{3\left(f(x)\right)^2+1\neq0\ \ x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}\quad f'(x)=\frac{3x^2}{3\left(f(x)\right)^2+1}>0 \text{ για κάθε } x\neq0 \text{ και } f'(0)=0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

δ) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα για $x=1$: $\left(f(1)\right)^3+f(1)=2\Leftrightarrow\left(f(1)\right)^3+f(1)-2=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f(1)=1$

$f'(1)=\frac{3\cdot1^2}{3\left(f(1)\right)^2+1}=\frac{3}{4}$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=\frac{3}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$$

ε) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-1,1\right]$. Άρα: $f(\Delta)=\left[f(-1),f(1)\right]$

Είναι όμως $f(1)=1$ και από την (1) για x=-1

$$\left(f(-1)\right)^3+f(-1)=(-1)^3+1\Leftrightarrow f(-1)\left(\left(f(-1)\right)^2+1\right)=0\overset{\left(f(-1)\right)^2+1>0 \text{ για καθε } \chi}{\Leftrightarrow}f(-1)=0$$

Άρα $f(\Delta)=\left[0,1\right]$

Στ) Για να έχει η εξίσωση $f(x)=\frac{3-\lambda}{2}$ λύση στο $f(\Delta)=\left[0,1\right]$ αρκεί να ισχύει

$0\leq\frac{3-\lambda}{2}\leq1\Leftrightarrow 0\leq 3-\lambda\leq2\Leftrightarrow -3\leq-\lambda\leq-1\Leftrightarrow 3\geq\lambda\geq1$ και $\lambda\in\mathbb{Z}$ άρα $\lambda=1$ ή $\lambda=2$ ή $\lambda=3$

2.65 Έστω δυο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε

(1) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ **και** $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ **για κάθε x>0**

Να αποδείξετε ότι:

i)Η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{x},x\in(0,+\infty)$ **είναι σταθερή.**

ii)Αν $f(1)=3$ **και** $g(1)=1$**,τότε:**

α) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$ **και** $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$

β) οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες.

ΛΥΣΗ

i)Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)+g(x)}{x}\right)'=\frac{\left(f'(x)+g'(x)\right)x-f(x)-g(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)+xg'(x)-f(x)-g(x)}{x^2}\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{f(x)+g(x)-f(x)-g(x)}{x^2}=0\ .$$

Άρα η συνάρτηση h είναι σταθερή.

ii)α) Είναι $h(x)=c\Leftrightarrow\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=c\Leftrightarrow f(x)+g(x)=cx$ για κάθε x>0.

Για $x=1$ έχουμε $f(1)+g(1)=c\Leftrightarrow 3+1=c\Leftrightarrow c=4$.

Επομένως, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει:

$f(x)+g(x)=4x$ και $g(x)=xf'(x)$

Άρα $f(x)+xf'(x)=4x\Leftrightarrow\left(xf(x)\right)'=\left(2x^2\right)'$

Επομένως $xf(x)=2x^2+c_1$ για κάθε $x>0$

Για $x=1$ βρίσκουμε $f(1)=2+c_1\Leftrightarrow 3=2+c_1\Leftrightarrow c_1=1$

Τελικά $xf(x)=2x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Οπότε, από την σχέση $f(x)+g(x)=4x$ παίρνουμε

$$g(x)=4x-f(x)$$

Και

$$g(x)=4x-\frac{2x^2+1}{x}$$

Και τελικά

$$g(x)=\frac{2x^2-1}{x}\ \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)$$

ii)Οι ασύμπτωτες των Cf,Cg αναζητούνται στο 0 και στο $+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x^2+1}{x}=+\infty$

Και $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x^2-1}{x}=-\infty$

Επομένως, η ευθεία x=0 είναι ασύμπτωτη και της Cf και της Cg.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2}=2$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=..=0$

Όμοια, αποδεικνύουμε ότι

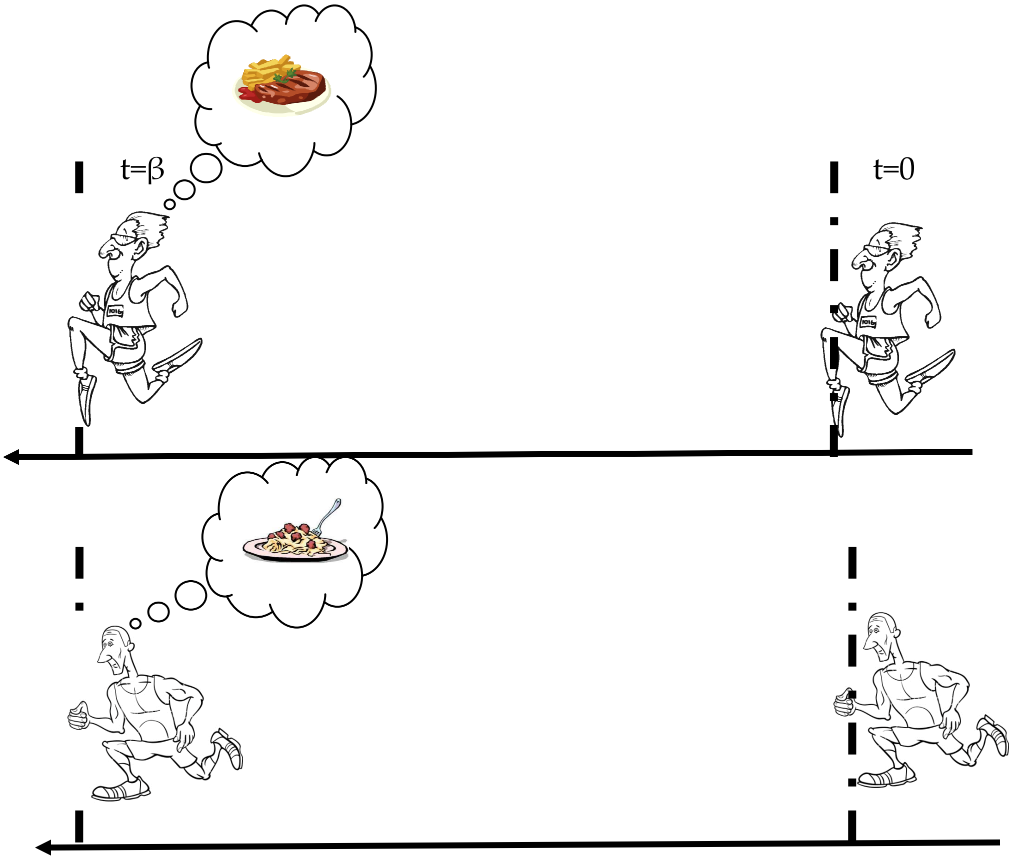
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2}=2$$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=..=0$

Άρα, η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και της Cf και της Cg.

(Rolle για τον Φιλώτα και τον Βρασίδα…)

2.67 Αν ο Βρασίδας και ο Φιλώτας,δυο δρομείς,σε ένα αγώνα δρόμου τερματίζουν ταυτόχρονα, να αποδείξετε ότι υπάρχει μια ,τουλάχιστον, στιγμή κατά την διάρκεια της κούρσας που είχαν την ίδια ταχύτητα .



ΛΥΣΗ

Αν f(t) η θέση κάθε χρονική στιγμή t, του Βρασίδα και f'(t) η ταχύτητα του.Αν τώρα g(t) η θέση την κάθε χρονική στιγμή t, του Φιλώτα και g'(t) η ταχυτητα του.Γνωρίζουμε ότι ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή t=0 και τερματιζουν μαζι μετα από χρονο β , αρα ισχύουν $f(0)=g(0)$, $f(\beta)=g(\beta)$.Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια, τουλάχιστον, στιγμή t_0 κατά την διάρκεια της κούρσας που είχαν την ίδια ταχύτητα, δηλαδή $f'(t_0)=g'(t_0)$.Θεωρούμε συνάρτηση $h(t)=f(t)-g(t)$ στο διάστημα $(0,\beta)$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,\beta]$
- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\beta)$
- $h(0)=f(0)-g(0)=0$, $h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=0$

Άρα ισχύει το θεώρημα Rolle , οπότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $t_0\in(0,\beta)$ τέτοιο ώστε

$h'(t_0)=0 \Leftrightarrow f'(t_o)-g'(t_o)=0 \Leftrightarrow f'(t_o)=g'(t_o)$,που είναι και το ζητούμενο.

2.68 Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\eta\mu x \text{ για κάθε } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
ii)Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(0)$.
iii)Αν επιπλέον η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής ,να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{1974}{f^{-1}(x)-x}$

iv) Να αποδείξετε ότι : $f(x)\ge\frac{2}{\pi}x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

ΛΥΣΗ

i)Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta)=\left[f(0),f(\frac{\pi}{2})\right]=[0,1]$

ii) $f(0)=0\Rightarrow f^{-1}\left(f(0)\right)=f^{-1}(0)\Leftrightarrow 0=f^{-1}(0)$

iii) $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $x\to0^+$.Όταν $\frac{\pi}{2}>x>0$ ισχύει $\eta\mu x<x\Rightarrow f(x)<x$ άρα η C_f βρίσκεται κάτω από τη ευθεία y=x οπότε η Cf^{-1} λόγω συμμετρίας βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=x δηλαδή $f^{-1}(x)>x\Rightarrow f^{-1}(x)-x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\left(f^{-1}(x)-x\right)=0$ άρα

$$\lim_{x\to0}\frac{1974}{f^{-1}(x)-x}=+\infty .$$

iv)Πρέπει να δείξουμε ότι $\eta\mu x\ge\frac{2}{\pi}x$ (1) για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Για $x=0,x=\frac{\pi}{2}$ ισχύει η (1)

Η ζητούμενη ανισότητα για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ γίνεται $\eta\mu x\ge\frac{2}{\pi}x\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{x}\ge\frac{2}{\pi}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\frac{\eta\mu x}{x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Τότε $g'(x)=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'x-(\eta\mu x)x'}{x^2}=\frac{x(\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x}{x^2}$ (1)

Το πρόσημο του αριθμητή θα το εξετάσουμε, θεωρώντας συνάρτηση $h(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x , x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$h'(x)=\left(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)'=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Οπότε αν $\frac{\pi}{2}\ge x>0$: $h(x)<h(0)\Rightarrow x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x<0\sigma\upsilon\nu0-\eta\mu0\Rightarrow x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x<0$ (2)

Από (1),(2) προκύπτει $g'(x)<0$,δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

Οπότε για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]: g(x) \geq g(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \geq \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \eta\mu x \geq \frac{2}{\pi}x$

(Bonus ερώτημα στην προηγούμενη)

Να δειχτεί ότι ισχύει η ανισότητα $\eta\mu x < x$ **,για κάθε** $x > 0$

Λύση .Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x$ για κάθε $x \geq 0$.Ισχύει:

$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$ ($-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$)για κάθε $x \geq 0$,άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$,οπότε $x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow \eta\mu x - x < 0 \Leftrightarrow \eta\mu x < x$

2.69Αν για την συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ **ισχύουν:**

- **f παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$
- $f(1) = 1$
- **η τυχαία εφαπτομένη της Cf σε σημείο της** $M(x_0, f(x_0))$ **τέμνει τον άξονα** $x'x$ **στο σημείο** $A(x_1, 0)$ **με** $x_0 = \frac{x_1}{2}$ **. Να βρείτε τον τύπο της f.**

ΛΥΣΗ

i) Η τυχαία εφαπτομένη της Cf σε σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon):\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(x_1, 0)$

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \overset{x_0 = \frac{x_1}{2} \Leftrightarrow 2x_0 = x_1}{\Leftrightarrow} f(x_0) = f'(x_0)(2x_0 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0)x_0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0,\ \text{για κάθε } x_0 \in (0,+\infty)$$

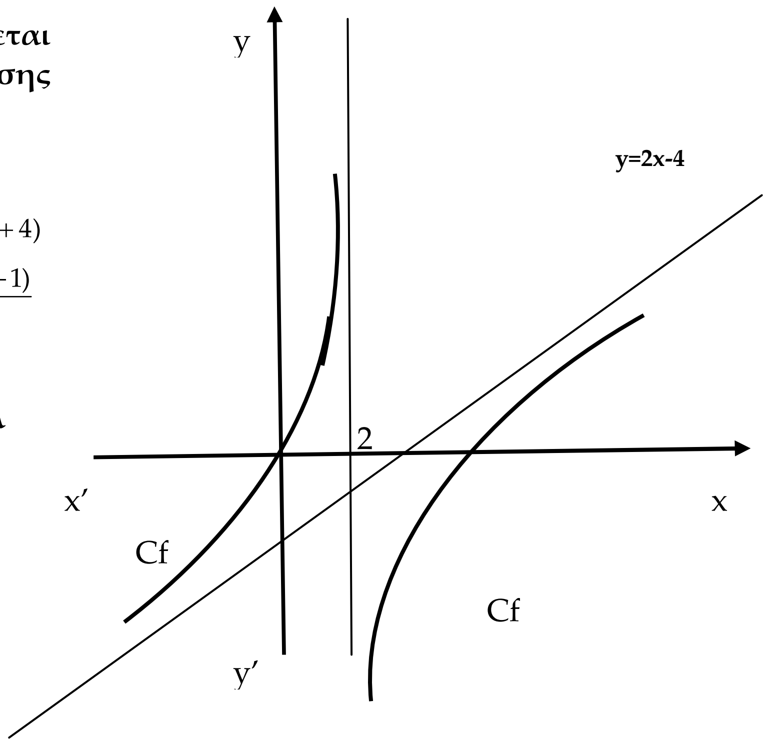
Άρα για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει:

$$xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow (xf(x))' = 0 \Leftrightarrow xf(x) = c \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{c}{x},$$

όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός , $x \in (0,+\infty)$

Όμως $f(1) = 1 \Rightarrow .... \Leftrightarrow c = 1$.Οπότε $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0,+\infty)$

2.70 Α. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:\mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ **.Να υπολογίσετε τα όρια:**



i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$ **iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x + 4)$

v. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xf(x) + \ln x}{x^2 f(x) - 2x^3 - \eta\mu^2 x}$ **vi.** $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)\ln(x-1)}{x-2}$

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)e^x\right)$

Β.Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ όταν

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x) + 1974x + \lambda}{xf(x) - 2x^2} = 1$$

Λύση

Η ευθεία y=2x-4 είναι πλάγια Ασύμπτωτη της Cf και η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf.

Έτσι:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ **iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=-4$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-4))=0$

v. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xf(x)+\ln x}{x^2f(x)-2x^3-\eta\mu^2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{xf(x)+\ln x}{x^2}}{\frac{x^2f(x)-2x^3-\eta\mu^2x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{\ln x}{x^2}}{f(x)-2x-\frac{\eta\mu^2x}{x^2}}\overset{iii}{=}\frac{2+0}{-4-0}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

vi. $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)\ln(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)\frac{\ln(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\ln(x-1)}{x-2}=(-\infty)(1)=-\infty$

($\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\ln(x-1)}{x-2}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to2^+}\frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{1}=1$)

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)e^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}xe^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=1\cdot0=0$

($\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right)\underset{D.H.L}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-e^{-x}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0$)

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)+1974x+\lambda x}{xf(x)-2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{1974x}{x}+\frac{\lambda x}{x}}{\frac{xf(x)}{x}-\frac{2x^2}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+1974+\lambda}{f(x)-2x}=\frac{2+1974+\lambda}{-4}=\frac{1976+\lambda}{-4}$

$\frac{1976+\lambda}{-4}=1\Leftrightarrow1976+\lambda=-4\Leftrightarrow\lambda=-1980$

2.70 Αν f,g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(x)-g(x)=x-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f καθώς το $x\to+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu2x}{xf(x)-3x^2+1}$

β) Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης τη g καθώς $x\to+\infty$.

ΛΥΣΗ

α)i) Εφόσον η $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f καθώς το $x\to+\infty$ θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ (1)

Θέλουμε όριο στο $+\infty$ άρα θεωρούμε $x>0$, οπότε

$f(x)-g(x)=x-4\Leftrightarrow\frac{f(x)-g(x)}{x}=\frac{x-4}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}-\frac{g(x)}{x}=1-\frac{4}{x}\Leftrightarrow\frac{g(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}-1+\frac{4}{x}$

Λαμβάνουμε όρια και στα δυο μέλη (υπάρχουν τα όρια στο Β μέλος)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}\overset{(1)}{=}3-1+0=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu2x}{xf(x)-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{g(x)}{x}+3+\frac{\eta\mu2x}{x}}{(f(x)-3x)+\frac{1}{x}}$ (2)

έχουμε:

$\left|\frac{\eta\mu2x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\eta\mu2x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$ για κάθε $x>0$ $(x\to+\infty)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{ημ2x}{x} \le \frac{1}{x}$ και εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημ2x}{x} = 0$

Από υπόθεση, η $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g καθώς $x \to +\infty$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (3x-7)\right] = 0$ (3)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (3x-7)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x) - 3x\right) + 7\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x) - 3x\right)\right] = -7$

Έτσι, το ζητούμενο όριο από την (2) γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{g(x)}{x} + 3 + \frac{ημ2x}{x}}{(f(x)-3x) + \frac{1}{x}} = \frac{2+3+0}{-7+0} = -\frac{5}{7}$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x) - (2x-3)\right] = 0$. Έτσι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x) - (2x-3)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x + 4 - 2x + 3)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - 3x + 7)\right] \overset{(3)}{=} 0$ άρα η $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη στης Cg στο $+\infty$.

2.72 (Κάτι μου θυμίζει…)

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη. (Με αιτιολόγηση)

1)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \left(0,1\right)$,τότε $f(0) \neq f(1)$. Σ Λ

2)Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\left[α,β\right]$ με $f(β) < f(α)$,τότε υπάρχει $x_0 \in \left(α,β\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$. Σ Λ

3)Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\left[α,β\right]$ με $f(α) = g(α)$ και $f(β) = g(β)$ τότε υπάρχει $x_0\left(α,β\right)$, τέτοιο ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. Σ Λ

4)Αν $f'(x) = \left(1-x\right)^2\left(x-2\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,τότε:

i) το f(1) είναι τοπικό μέγιστο της f. Σ Λ

ii) το f(2) είναι τοπικό ελάχιστο της f. Σ Λ

Απαντήσεις

1)Σωστο.Αν ήταν $f(0) = f(1)$ τότε από το θεώρημα Rolle στο $\left[0,1\right]$, θα υπήρχε ένα τουλάχιστον $ξ \in \left(0,1\right)$ ώστε $f'(ξ) = 0$,που είναι άτοπο.

2)Σωστο.Αν ήταν $f'(x_0) \ge 0$ για κάθε $x_0 \in \left(α,β\right)$,τότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα στο $\left[α,β\right]$, οπότε δεν θα μπορούσε να είναι $f(β) < f(α)$.

3) Σωστό. Για την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ στο διάστημα $\left[α,β\right]$ ισχύει το Θ.Rolle ,οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(α,β\right)$ ώστε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$

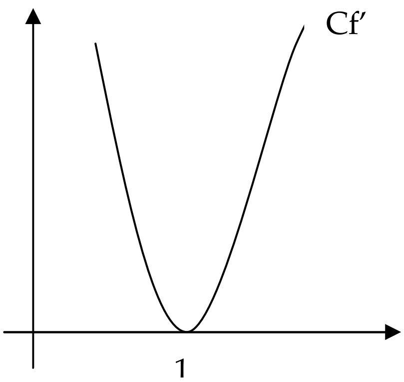
Δηλαδή ,οι εφαπτομένες στα Α και Β είναι παράλληλες.

4)i) Λάθος. ii)Σωστό

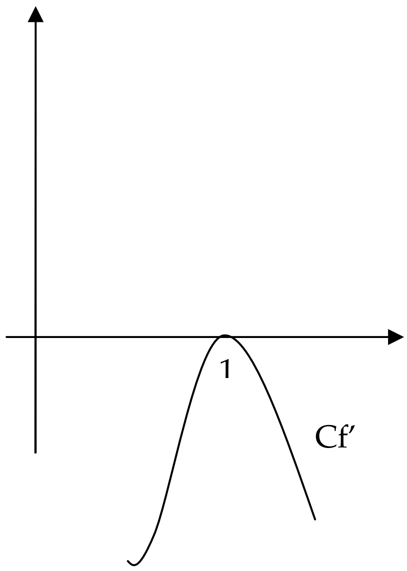
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↘		↗	

-Τι θέλεις για δώρο την πρωτοχρονιά παιδί μου;
-Ένα πράσινο δράκο!
-Τι είναι αυτά που ζητάς παιδί μου;
-Καλά, τότε ζητώ στις πανελλαδικές στα μαθηματικά να μην πέσει ερώτημα με το Θ.Μ.Τ!
-Τι χρώμα τον θες τον δράκο,παιδί μου;

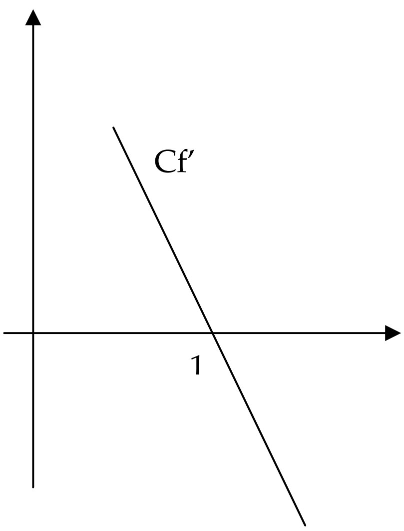
2.73 Καθένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου κάποιας συνάρτησης f.Σε ποια από τις περιπτώσεις αυτές έχει η f τοπικό μέγιστο;



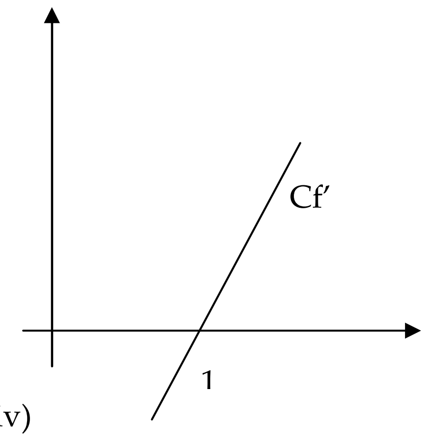
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Απάντηση (iii)

2.74 Δινεται η συνάρτηση f με $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- **Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$**
- **$[f(x)]^3+x^3=3xf(x)$ για κάθε $x>0$ (1)**
- **Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in(0,+\infty)$.**

Να βρείτε το x_0.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την υπόθεση:

Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in(0,+\infty)$

Άρα, από το θεώρημα Fermat ισχύει: $f'(x_0)=0$ (1)

Παραγωγίζουμε την δοσμένη ισότητα

$$3f^2(x)f'(x)+3x^2=3f(x)+3xf'(x)\Leftrightarrow f^2(x)f'(x)+x^2=f(x)+xf'(x)\ (2)$$

Για $x=x_0$ η (2) είναι:

$$f^2(x_0)f'(x_0)+x_0^{\ 2}=f(x_0)+x_0f'(x_0)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f(x_0)=x_0^{\ 2}\ (3)$$

Η (1) για $x=x_0$:

$$[f(x_0)]^3+x_0^{\ 3}=3x_0f(x_0)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\left[x_0^{\ 2}\right]^3+x_0^{\ 3}=3x_0x_0^{\ 2}\Leftrightarrow x_0^{\ 6}+x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 3}=0\Leftrightarrow$$

$$x_0^{\ 6}-2x_0^{\ 3}=0\Leftrightarrow x_0^{\ 3}\left(x_0^{\ 3}-2\right)=0\overset{x_0>0}{\Leftrightarrow}x_0=\sqrt[3]{2}$$

2.75 Δινεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{x}$

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii)Να δείξετε ότι για κάθε $x\in D_f$ ισχύει $f(x)-f(-x)=x$

iii)Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

iv)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

v)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

vi)Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη της Cf παράλληλη στην ευθεία $y=x+2016$.

ΛΥΣΗ

i)Για να ορίζεται η f

$$\frac{e^x-1}{x}>0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

ii)Για κάθε $x\in D_f$

$$f(x)-f(-x)=\ln\frac{e^x-1}{x}-\ln\frac{e^{-x}-1}{-x}=\ln\left(\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^{-x}-1}{-x}}\right)=\ln\left(\frac{-x\left(e^x-1\right)}{x\left(e^{-x}-1\right)}\right)=\ln\left(\frac{1-e^x}{e^{-x}-1}\right)=\ln\left(\frac{1-e^x}{\frac{1}{e^x}-1}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1-e^x}{\frac{1-e^x}{e^x}}\right)=\ln\left(\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{1-e^x}\right)=\ln\left(e^x\right)=x$$

iii) ▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$ (1)

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)\dfrac{1}{x}=\left(0-1\right)0=0$

Άρα θέτουμε $u=\dfrac{e^x-1}{x}$ όταν $x\to-\infty$ τότε $u\to 0$ και η (1) γίνεται:

$\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$

▪ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$ (2)

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$

Άρα θέτουμε $u=\dfrac{e^x-1}{x}$ όταν $x\to 0$ τότε $u\to 1$ και η (2) γίνεται:

$\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$

▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$ (3)

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$

Άρα θέτουμε $u=\dfrac{e^x-1}{x}$ όταν $x\to+\infty$ τότε $u\to+\infty$ και η (3) γίνεται:

$\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

iii) Για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

$$f'(x)=\left(\ln\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{x}{e^x-1}\left(\frac{e^xx-e^x+1}{x^2}\right)=\frac{e^xx-e^x+1}{x(e^x-1)}$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι το πρόσημο του αριθμητή δεν εύκολο να προσδιοριστεί αλγεβρικά οπότε καταφεύγουμε στην ανάλυση.
Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=e^xx-e^x+1$.Είναι:

$g'(x)=\left(e^xx-e^x+1\right)'=e^xx+e^x-e^x=e^xx$, $g'(x)=0\Leftrightarrow e^xx=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	↘		↗

Από τον παραπάνω πινάκα έχουμε: $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

Επίσης $x(e^x-1)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

v)Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει:
$f(D_f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	↗	‖	↗

vi)Για να υπάρχει εφαπτομένη της Cf παράλληλη στην ευθεία $y=x+2016$ αρκει η εξίσωση $f'(x)=1$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.Είναι:

$$f'(x)=1\Leftrightarrow\frac{e^x x-e^x+1}{x(e^x-1)}=1\Leftrightarrow\frac{e^x x-e^x+1}{xe^x-x}=1\Leftrightarrow e^x x-e^x+1=xe^x-x\Leftrightarrow e^x-x-1=0,x\neq0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^x-x-1,x\neq0$

$h'(x)=(e^x-x-1)'=e^x-1,\ h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

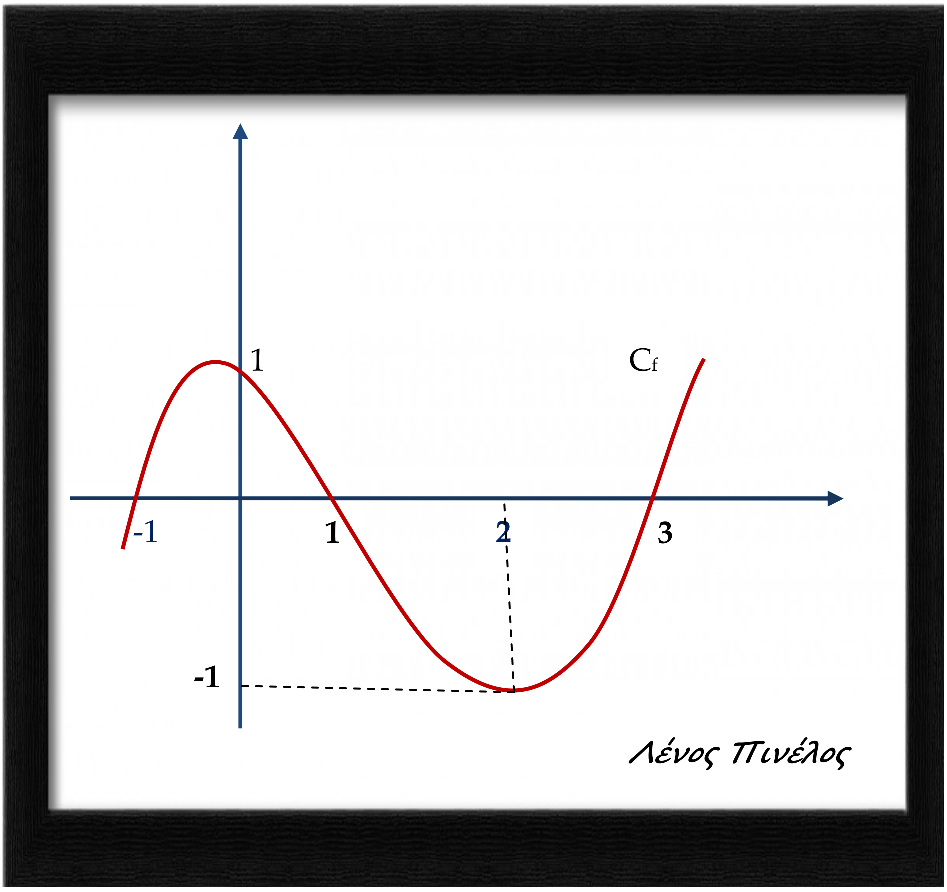
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
$h(x)$	↘		↗

Η μόνη ρίζα της $e^x-x-1=0$ είναι η $x=0$,η οποία απορρίπτεται διότι $0\notin Df$

Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της Cf παράλληλη στην $y=x+2016$.

2.76 Καλλιγραφία….

Στον παρακάτω πίνακα του εξπρεσιονιστή ζωγράφου Λένου Πινέλου , ο καλλιτέχνης –κολοσσός στον απειροστικό λογισμό- απεικονίζει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g=\frac{1}{f}$**,τότε:**

i)Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f,g και να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ **.**

ii)Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to-1^-} g(x)\ ,\ \lim_{x\to-1^+} g(x)\ ,\ \lim_{x\to1^+} g(x)\ ,\ \lim_{x\to1^-} g(x)\ ,\ \lim_{x\to3} g(x)$$

iii)να βρεθούν οι ασύμπτωτες της Cg.

iv)Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.

ΛΥΣΗ

i) $D_f=\mathbb{R}, D_g=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}/f(x)=0\}=\mathbb{R}-\{-1,1,3\}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$ ή $x=3$

ii) Από την Cf διαπιστώνουμε:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to-1^-} g(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{f(x)} \underset{\lim_{x\to-1^-} f(x)=0}{\overset{f(x)<0 \text{ κοντά στο } -1 \text{ από αριστερά}}{=}} -\infty$
- $\lim_{x\to-1^+} g(x)=\lim_{x\to-1^+} g(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{f(x)} \underset{\lim_{x\to-1^-} f(x)=0}{\overset{f(x)>0 \text{ κοντά στο } -1 \text{ από δεξιά}}{=}} +\infty$
- $\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{f(x)} \underset{\lim_{x\to1^+} f(x)=0}{\overset{f(x)<0}{=}} -\infty$

▪ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{f(x)} \underset{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0}{\overset{f(x)>0}{=}} +\infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{f(x)} \underset{\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0}{\overset{f(x)<0}{=}} -\infty$

▪ $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{f(x)} \underset{\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0}{\overset{f(x)>0}{=}} +\infty$

iii) Η Cg έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες: $x=-1, x=1, x=3$

iv)Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και g είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $g'(x)=\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$.Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της $g'(x)$ είναι αντίθετο από το πρόσημο της $f'(x)$ άρα στο διάστημα που η f(x) είναι γνησίως αύξουσα η g(x) είναι γνησίως φθίνουσα.

2.77 Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$$

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

ii)Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f^{-1}(x)\right)$

ΛΥΣΗ

i) $\begin{cases} x>0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,1]$, άρα $A=(0,1]$

ii)Για κάθε $x\in(0,1]$ είναι:

$f'(x)=\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A οπότε και 1-1 ,οπότε αντιστρέφεται.

iii)Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,1]$ άρα

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right]=\ldots=(-\infty,0]$

iv)Ισχύει:

$A_{f^{-1}}=f(A)=(-\infty,0]$ και $f^{-1}(A_{f^{-1}})=A=(0,1]$

Για κάθε $x\in(-\infty,0]$ ισχύει

$0<f^{-1}(x)\le 1 \Leftrightarrow 0<x^2 f^{-1}(x)\le x^2$, από το κριτήριο της παρεμβολής η τελευταία δίνει:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 f^{-1}(x)\right)=0$

-Πάμε για καφέ; 5+5=10

-Πάμε.

-Οκ θα περάσω να σε πάρω σε λίγο. 9+8=17

-Οκ! Αλλά προς τι, οι προσθέσεις;

-Κάνω τα λόγια μου πράξεις....

2.78 (Ο Τοτός και ο κανόνας του L' Hospital)

Ο Τοτός έγραφε στο ημερολόγιο του τον Ιανουάριο του 2016:

…χθες το βραδύ ανακάλυψα μια νέα μαθηματική πρόταση, θα την διατυπώσω και θα την γράψω στο περιθώριο του ημερολογίου που είναι αρκετά μεγάλο για να την χωρέσει.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη,τότε η f′ είναι συνεχής.

Απόδειξη

Έστω τυχαίο $x_0 \in D_f$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\left(f(x)-f(x_0)\right)'}{\left(x-x_0\right)'}=\lim_{x\to x_0}f'(x)$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$ **…….**

Την επόμενη μέρα ο Τοτός σκοτώθηκε σε μονομαχία με τον γείτονα του για μια θέση parking …

Είναι σωστή η πρόταση του Τοτού;

Απάντηση

Ο Τοτός χρησιμοποίησε το αντίστροφο του κανόνα του L Hospital που δεν ισχύει. Δηλαδή ισχυρίστηκε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ τότε θα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

Αντιπαράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, $g(x)=\ln(1+x)$ ορισμένες στο $\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$.Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=...=0$ όμως το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει.

2.79 (θέμα Δέσμης 1989)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **με** $f(0)=g(0)$ **και** $f''(x)=g''(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i)Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε:

$f(x)-g(x)=cx$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

ii)Αν ϱ_1,ϱ_2 **ετερόσημες ρίζες της** $g(x)=0$ **,τότε η** $f(x)=0$ **έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα** $\left[\varrho_1,\varrho_2\right]$**.**

ΛΥΣΗ

i)Είναι:

$$f''(x)=g''(x)$$

Άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$f'(x)=g'(x)+c\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=c\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=\left(cx\right)'$

Άρα υπάρχει $c'\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x)-g(x)=cx+c' \quad (1)$$

Για $x=0$ η (1) γίνεται:

$f(0)-g(0)=c\cdot 0+c'\Leftrightarrow c'=0$.Άρα $f(x)-g(x)=cx$, $x\in\mathbb{R}$

ii)Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\varrho_1,\varrho_2\right]$ με:

$$f(x)=g(x)+cx\,,\,x\in\mathbb{R}$$

$f(\varrho_1)=g(\varrho_1)+c\cdot\varrho_1=c\cdot\varrho_1$, $f(\varrho_2)=g(\varrho_2)+c\cdot\varrho_2=c\cdot\varrho_2$

$f(\varrho_1)f(\varrho_2)=c^2\varrho_1\varrho_2\le 0$ (ϱ_1,ϱ_2 ετερόσημα, $c^2\ge 0$)

-Αν c=0 τότε $f(\varrho_1)f(\varrho_2)=0$ δηλαδή μια τουλάχιστον από τις ϱ_1,ϱ_2 είναι ρίζα της $f(x)=0$.

-Αν $c\neq 0$ τότε $f(\varrho_1)f(\varrho_2)<0$ οπότε από το θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ϱ_1,ϱ_2).

2.80 (Μεζεδάκια)

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με $f(1)=f(2)=0$. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(0,4)$ να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)f(4)>0$ **ii) η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $(0,4)$.**

ΛΥΣΗ

i) Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,4]$, παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ και ισχύει $f(1)=f(2)=0$ τότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για το διάστημα $[0,4]$. Άρα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,4)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0)=0$.

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[0,4]$ η συνάρτηση f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,4]$ και επιπλέον το x_0 είναι μοναδικό. Οπότε:

- Για $x<x_0$ θα ισχύει $f'(x)<f'(x_0)=0$
- Για $x>x_0$ θα ισχύει $f'(x)>f'(x_0)=0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα

x	0	1	x_0	2	4
$f'(x)$	-	-	+	+	
$f(x)$	↘	↘	↗	↗	

E

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ οπότε είναι $f(0)>f(1)$ ή $f(0)>0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,4]$ οπότε είναι $f(4)>f(2)$ ή $f(4)>0$

Επομένως $f(0)\cdot f(4)>0$

ii) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα $[0,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,4]$ άρα η f παρουσιάζει για $x=x_0\in(0,4)$ ολικό ελάχιστο στο διάστημα $(0,4)$.

2.81Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(0)=0, f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_+$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_+$.

ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει ,αλλά ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}_+$ ώστε $f(\xi)\neq 0$.

Ισχύει $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_+$ άρα f γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}_+$.

Επειδή $\xi>0\Rightarrow f(\xi)>f(0)=0$.Άρα $f(\xi)>0$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, επομένως υπάρχει $x\in\mathbb{R}_+$ με $x>\xi$, οπότε

$$f(x)<f(\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}<0$$

Οπότε από το θεώρημα μέσης τιμής στο $[\xi,x]$ υπάρχει $x_0\in(\xi,x)$:

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

Τότε $f'(x_0)<0$, άτοπο από την υπόθεση άρα $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}_+$.

2.82 (Θέμα εξετάσεων 2001)Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την όποια ισχύει:

$$\left(f(x)\right)^3+\beta\left(f(x)\right)^2+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1, x\in\mathbb{R}$$

Όπου $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\beta^2-3\gamma<0$

i)Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ii)Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii)Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

i)Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

(1) $\left(f(x)\right)^3+\beta\left(f(x)\right)^2+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ με $\beta^2<3\gamma$

Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x έχουμε:

$$3\left(f(x)\right)^2 f'(x)+2\beta\left(f(x)\right)f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6, x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Υποθέτουμε ότι η f παρουσιάζει για $x=x_0$ ακρότατο.

Τότε θα ισχύει από Θ.Fermat $f'(x_0)=0$

Για $x=x_0$ η (2) γίνεται:

$3\left(f(x_0)\right)^2 f'(x_0)+2\beta\left(f(x_0)\right)f'(x_0)+\gamma f'(x_0)=3{x_0}^2-4x_0+6\Leftrightarrow 3{x_0}^2-4x_0+6=0$, άτοπο η εξίσωση $3x^2-4x+6=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta<0$). Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

ii)Από την σχέση (2) έχουμε:

$3\left(f(x)\right)^2 f'(x)+2\beta\left(f(x)\right)f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6\Leftrightarrow f'(x)\left[3\left(f(x)\right)^2+2\beta\left(f(x)\right)+\gamma\right]=3x^2-4x+6, x\in\mathbb{R}$ (3)

Αλλά,

$3x^2-4x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$3\left(f(x)\right)^2+2\beta\left(f(x)\right)+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού είναι $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4\left(\beta^2-3\gamma\right)<0$ άρα από την (3) προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii)Για $x=0$ και $x=1$ η (1)

- $\left(f(0)\right)^3+\beta\left(f(0)\right)^2+\gamma f(0)=-1\Leftrightarrow f(0)\left(\left(f(0)\right)^2+\beta\left(f(0)\right)+\gamma\right)=-1$ (4)

Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ έχει $\Delta=\beta^2-4\gamma$ και επειδή $0\le\beta^2<3\gamma<4\gamma$ (αφού $\gamma>\frac{1}{3}\beta^2\ge 0$) είναι $\Delta<0$, οπότε είναι $x^2+\beta x+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Άρα είναι $\left(f(0)\right)^2+\beta\left(f(0)\right)+\gamma>0$ οπότε από την (4) $f(0)<0$

- $\left(f(1)\right)^3+\beta\left(f(1)\right)^2+\gamma f(1)=4\Leftrightarrow f(1)\left(\left(f(1)\right)^2+\beta\left(f(1)\right)+\gamma\right)=4$ (5)

Και επειδή $\left(f(1)\right)^2+\beta\left(f(1)\right)+\gamma>0$ θα είναι $f(1)>0$

Επομένως έχουμε $f(0)\cdot f(1)<0$ και f συνεχής στο $\left[0,1\right]$ οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο $\left(0,1\right)$ που είναι και μοναδική επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

2.83 Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την όποια ισχύει:

- $f(x)+f'(x)=1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f(1)=2$

i)Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{1-x}+1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

ii)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii)Να εξετάσετε την f ως προς τα κοίλα.

iv)Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**,** $\alpha<\beta$ **ισχύει:**

$$e^{1-\alpha}(\alpha-\beta)<e^{1-\beta}-e^{1-\alpha}<e^{1-\beta}(\alpha-\beta)$$

ΛΥΣΗ

i)Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της (1) με e^x και έχουμε:

$$e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(e^x\right)'f(x)+e^x f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(e^x f(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow e^x f(x)=e^x+c$$, c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Για $x=1$ η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$e^1 f(1)=e^1+c\Leftrightarrow 2e=e+c\Leftrightarrow c=e$$

$$e^x f(x)=e^x+e\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x+e}{e^x}\Leftrightarrow f(x)=1+e^{1-x},x\in\mathbb{R}$$

ii)Είναι $f'(x)=e^{1-x}(1-x)'=-e^{1-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα

$$\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x}+1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}+1\right)=1$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $\left(1,+\infty\right)$.

iii) $f''(x)=\left(-e^{1-x}\right)'=e^{1-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

iv)Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε από το Θ.Μ.Τ στο $\left[\alpha,\beta\right]$ θα υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα και για $\alpha<\xi<\beta$ θα ισχύει:

$f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)$.Άρα:

$$f'(\alpha)<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<f'(\beta)\Leftrightarrow\left(\beta-\alpha\right)f'(\alpha)<f(\beta)-f(\alpha)<\left(\beta-\alpha\right)f'(\beta)\Leftrightarrow\left(\beta-\alpha\right)(-e^{1-\alpha})<f(\beta)-f(\alpha)<\left(\beta-\alpha\right)(-e^{1-\beta})$$

$$\left(\alpha-\beta\right)(e^{1-\alpha})<f(\beta)-f(\alpha)<\left(\alpha-\beta\right)(e^{1-\beta})\Leftrightarrow\left(\alpha-\beta\right)e^{1-\alpha}<e^{1-\beta}-e^{1-\alpha}<\left(\alpha-\beta\right)e^{1-\beta}$$

2.84 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη. (Με αιτιολόγηση)

1)Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη. Σ Λ

2) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντα οριζόντια εφαπτομένη. Σ Λ

3)Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής . Σ Λ

4)Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής ,τότε και η συνάρτηση $h=f\cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. Σ Λ

Απαντήσεις

1)Σ)Η πρώτη παράγωγος είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, οπότε έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα ,άρα θα έχουμε τουλάχιστον μια οριζόντια εφαπτομένη.

2)Λ)Η πρώτη παράγωγος είναι πολυώνυμο άρτιου βαθμού, οπότε δεν βέβαιο ότι θα έχει πραγματικές ρίζες

3)Σ)Η δεύτερη παράγωγος της f είναι η $f''(x)=6\alpha x+2\beta$ η οποία ανεξάρτητα από τις τιμές των γραμμάτων έχει πάντα μια τιμή που μηδενίζεται και εκατέρωθεν της ρίζας αλλάζει πρόσημο άρα έχουμε ένα σημείο καμπής.

4)Λ)Για $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^7$

Οι f'',g''μηδενίζονται στο 0 και αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν του 0 άρα έχουμε σημείο καμπής όμως η $h(x)=f(x)g(x)=x^{10}$ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής στο 0.

2.85 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε:

(1) $f(x)+f(4-x)=0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **και** $f'(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i)η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii)η συνάρτηση δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

iii)η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iv)η ευθεία $\varepsilon: y=x-2$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)},x\in\mathbb{R}$$

Στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$.

ΛΥΣΗ

i) Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως μονότονη.

ii)Από την δοθείσα ισότητα παραγωγίζοντας λαμβάνουμε:

$f'(x)+f'(4-x)(4-x)'=0\Leftrightarrow f'(x)-f'(4-x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(4-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

Για x=0 προκύπτει: $f'(0)=f'(4)\neq 0$ οπότε η f' δεν είναι γνησίως μονότονη άρα δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

iii)Από την σχέση (1) για x=2 : $f(2)+f(4-2)=0\Leftrightarrow 2f(2)=0\Leftrightarrow f(2)=0$

άρα η $f(x)=0$ έχει ρίζα το x=2 και είναι μοναδική επειδή η f είναι γνησίως μονότονη.

iv)Έχουμε $g(2)=\frac{f(2)}{f'(2)}=0$, A(2,0) είναι το σημείο επαφής.

Αρκεί τώρα $g'(2)=\lambda_\varepsilon=1$ Για την παράγωγο στο 2 δουλεύουμε με τον ορισμό:

$$g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(2)}{f'(2)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{f(x)}{x-2}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{f'(x)}\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{f'(2)}f'(2)=1$$

2.86 Εστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$ και το σημείο $A(0,1)$ να ανήκει στο γράφημα της .

i)Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$h(x)=xf(x) \textbf{ και } g(x)=f(x)-\frac{x}{f(x)}$$

Είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0=0$.

ii)Να υπολογίσετε την γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της g με την εφαπτομένη της h στο σημείο $x_0=0$.

ii)Να υπολογίσετε το εμβαδό του τρίγωνου που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες με τον άξονα x′x.

ΛΥΣΗ

i)Για την συνάρτηση h ,η παράγωγος στο $x_0=0$ είναι

$h'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$ (από υπόθεση f παραγωγίσιμη άρα συνεχής στο 0)

Άρα h παραγωγίσιμη στο 0 και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της στο 0 είναι $\lambda_1=1$.

Ανάλογα εργαζόμαστε για την g

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{x}{f(x)}-f(0)+\frac{0}{f(0)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{x}{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(f(x)\right)^2-x-f(x)}{xf(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(f(x)\right)^2-f(x)-x}{xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\left(f(x)-1\right)-x}{xf(x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)\left(f(x)-1\right)}{xf(x)}-\frac{x}{xf(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-1}{x}-\frac{1}{f(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-1}{x}\right]-\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]-\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f'(0)-\frac{1}{f(0)}=0-\frac{1}{1}=-1$$

(από υπόθεση η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε είναι και συνεχής το 0 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$)

Έτσι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της στο 0 είναι $\lambda_2=-1$.

Η γωνία των εφαπτομένων των h,g στο $x_0=0$ είναι 90^o επειδή $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

Η εφαπτομένη της h στο σημείο (0,h(0))

$y-h(0)=h'(0)(x-0)$ ή $y=x$ ε1

Η εφαπτομένη της g στο σημείο (0,g(0))

$y-g(0)=g'(0)(x-0)$ ή $y=-x+1$ ε2

Το σημείο τομής των (ε1),(ε2) προκύπτει από την λύση του συστήματος

$\begin{cases}y=x\\ y=-x+1\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ άρα πρόκειται το σημείο $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$B(1,0)$ είναι το σημείο που η ε2 τέμνει τον x'x και O(0,0) το σημείο που η (ε2) τέμνει τον x'x οπότε το εμβαδό του τριγώνου είναι $E=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$ τετραγωνικές μονάδες.

2.87 Έστω f μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την όποια ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\ ,\ f'(0)=\frac{1}{3}\ \textbf{και (1)}\ \left(e^{f(x)}+2\right)f'(x)=1\ \textbf{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

A.i)Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii)Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

B. Να αποδείξετε ότι:

i)ισχύει: $e^{f(x)}+2f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

iii)αν λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των Cf, Cf^{-1} αντίστοιχα στην αρχή των αξόνων, τότε $\lambda_1\lambda_2=1$.

Γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$.

ΛΥΣΗ

A.i) $\left(e^{f(x)}+2\right)f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά

$$\left(e^{f(x)}+2\right)f'(x)=1 \Leftrightarrow f''(x)=\left(\frac{1}{e^{f(x)}+2}\right)'=-\frac{\left(e^{f(x)}+2\right)'}{\left(e^{f(x)}+2\right)^2}=-\frac{e^{f(x)}f'(x)}{\left(e^{f(x)}+2\right)^2}<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

ii)Θέτουμε στην (1) όπου $x=0$:

$$\left(e^{f(0)}+2\right)f'(0)=1 \Leftrightarrow \left(e^{f(0)}+2\right)\frac{1}{3}=1 \Leftrightarrow e^{f(0)}+2=3 \Leftrightarrow e^{f(0)}=1 \Leftrightarrow f(0)=0$$

Επειδή τώρα η f είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

B.i) $e^{f(x)}f'(x)+2f'(x)=1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}+2f(x)\right)'=1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}+2f(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow e^{f(x)}+2f(x)=x+c$, (2)

c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Θέτουμε στην (1) όπου $x=0$: $e^{f(0)}+2f(0)=x+c \Leftrightarrow e^{f(0)}+2\cdot 0=0+c \Leftrightarrow c=1$

Άρα η (2) παίρνει την μορφή:

$$e^{f(x)}+2f(x)=x+1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

ii)Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται. $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

Θέτοντας στην (3) για $y=f(x)$ έχουμε:

$e^{y}+2y=x+1 \Leftrightarrow x=e^{y}+2y-1$,

Άρα $f^{-1}(x)=e^{x}+2x-1, x\in\mathbb{R}$

iii)Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=f(0)=0$ επομένως οι Cf^{-1},Cf διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Από υπόθεση έχουμε $\lambda_1=f'(0)=\frac{1}{3}$.Είναι:

$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(e^x + 2x - 1\right)' = e^x + 2$.Οπότε $\lambda_2 = \left(f^{-1}(0)\right)' = e^0 + 2 = 3$

Τελικά $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

Γ)▪ $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{f(x)}+2} = \frac{1}{0+2}$

▪ $\beta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2f(x) - x\right) \overset{e^{f(x)}+2f(x)=x+1 \Leftrightarrow 2f(x)-x=1-e^{f(x)}}{=} \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - e^{f(x)}\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

Επομένως η πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$ έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2.88 (Εξετάσεις 1995) Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
i)Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
ii)Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
iii)Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της Cf, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της Cg στο Α είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 5$.

ΛΥΣΗ
i)Η f′ είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ άρα είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
ii)Είναι 1-1 ως γνησίως μονότονη άρα αντιστρέφεται .
iii)Από την δοθείσα ισότητα έχουμε:

$g(x)f'(x) = 2f(x) \overset{f'(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{2f(x)}{f'(x)}$ οπότε η g είναι παραγωγίσιμη.

$$g'(x) = \left(\frac{2f(x)}{f'(x)}\right)' = \frac{2\left(f'(x)\right)^2 - 2f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2\left(f'(x)\right)^2 - 2f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \quad (2)$$

Για $x = x_0$ ισχύει $f''(x_0) = 0$ και $f'(x_0) \neq 0$

Η (2) για $x = x_0 : g'(x_0) = \frac{2\left(f'(x_0)\right)^2 - 2f(x_0)f''(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^2} \overset{f''(x_0)=0}{\Leftrightarrow} g'(x_0) = \frac{2\left(f'(x_0)\right)^2}{\left(f'(x_0)\right)^2} = 2$ άρα η εφαπτομένη της Cg στο Α είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 5$.

2.90 Δίνεται μια συνάρτηση f,δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ καθώς και μια συνάρτηση g με τύπο

$$g(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{(f(\beta)-f(\alpha))(x-\alpha)}{\beta-\alpha} \text{ για κάθε } x\in\left[\alpha,\beta\right]$$

Να αποδείξετε ότι:

i)Υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x.

ii) $g''(x)=f''(x)$ **iii)** $g(x)\le 0$ **για κάθε** $x\in\left[\alpha,\beta\right]$**.**

ΛΥΣΗ

i) $g(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)-\dfrac{(f(\beta)-f(\alpha))(\alpha-\alpha)}{\beta-\alpha}=0, g(\beta)=..=0$,g συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, g παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$, άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$.Άρα, υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της Cg στο x_0 να είναι παράλληλη στο x'x.

ii)Παραγωγίζουμε την g δυο φορές:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ ,\ g''(x)=f''(x)$$

iii)Θα δουλέψουμε άτοπο, έστω ότι υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)>0$

Θεωρούμε την g στα διαστήματα $\left[\alpha,x_0\right]$, $\left[x_0,\beta\right]$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\alpha,x_0\right)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi_1)=\frac{g(x_0)-g(\alpha)}{x_0-\alpha}=\frac{g(x_0)}{x_0-\alpha}>0 \ (1) \quad (g(x_0)>0, x_0>\alpha)$$

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_0,\beta\right)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi_2)=\frac{g(\beta)-g(x_0)}{\beta-x_0}=-\frac{g(x_0)}{\beta-x_0}<0 \ (2) \quad (g(x_0)>0, x_0<\beta)$$

Αλλά

$\xi_1<\xi_2 \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(\xi_1)<g'(\xi_2)\Leftrightarrow \dfrac{g(x_0)}{x_0-\alpha}<-\dfrac{g(x_0)}{\beta-x_0}$ Άτοπο, από (1) ,(2) καθώς δείχνει ότι ένας αρνητικός είναι μεγαλύτερος από ένα θετικό αριθμό. Άρα $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$.

2.91 .Έστω f,g συναρτήσεις οι οποίες παρουσιάζουν σε κοινό σημείο του κοινού πεδίου ορισμού τους Α η f μέγιστο και η g ελάχιστο.

i.Να δείξετε ότι η συνάρτηση f-g παρουσιάζει μέγιστο.

ii.Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $h(x)=\sqrt{1-x^2}-\eta\mu^{2016}x+2017$

iii.Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει κοινή εφαπτομένη με την g στο κοινό τους ακρότατο τον άξονα χ'χ.

Λύση

i.Αν η f και η g παρουσιάζουν στην θέση $x_0\in A$ μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα, τότε:

Για κάθε $x\in A: f(x)\le f(x_0)$,

Για κάθε $x\in A: g(x)\ge g(x_0)\Leftrightarrow -g(x)\le -g(x_0)$ πρόσθεση κατά μέλη

Για κάθε $x\in A$: $f(x)-g(x)\le f(x_0)-g(x_0)\Leftrightarrow (f-g)(x)\le (f-g)(x_0)$ άρα f-g παρουσιάζει μέγιστο στην θέση x_0

ii.Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\eta\mu^{2016}x-2017$ με κοινό πεδίο ορισμού $A=\left[-1,1\right]$

Για κάθε $x\in\left[-1,1\right]: -x^2\le 0\Leftrightarrow 1-x^2\le 1\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}\le 1\Leftrightarrow f(x)\le f(0)$

Για κάθε $x \in [-1,1]: g(x) = ημ^{2016}x - 2017 \geq -2017 = g(0)$ άρα $g(x) \geq g(0)$ η f και η g παρουσιάζουν στην θέση $x_0 = 0$ μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα οπότε από το ερώτημα (i) η συνάρτηση $h = f - g$ παρουσιάζει μέγιστο στην θέση $x_0 = 0$.

iii.f,g παραγωγίσιμες στο $[-1,1]$,έτσι:

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $f'(0) = 0$, $g'(x) = 2016ημ^{2015}xσυνx$, $g'(0) = 0$

Άρα $g'(0) = f'(0), g(0) = f(0)$ οπότε η ευθεία $y - g(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 0$, ο άξονας των x.

2.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \dfrac{x^2}{2}$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **και τον πραγματικό αριθμό** x_0**, έτσι ώστε:**

$g(x_0) = x_0 + 1$ **και** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{h} = v,\ v \in N^* - \{1\}$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ.

ii. $\lim\limits_{x \to \rho} \dfrac{f(x) + f'(x) - f(\rho)}{x - \rho} = e^{\rho} + 1$**, όπου ρ η ρίζα του Δ1 ερωτήματος.**

iii. α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $g'(x_0)=1$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α(0,f(0)), εφάπτεται στην C_g στο σημείο Β(x_0,g(x_0)).

iv. Η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $(fog)'(x_0) = e^{x_0+1} + x_0 + 1$.

Λύση

i. $f(x) = e^x + \dfrac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (e^x)' + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = e^x + x,\ x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, τότε ισχύει $e^{x_1} < e^{x_2}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει: $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$, δηλαδή $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f'((-\infty,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Όντως, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + x) = -\infty$, γιατί $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Όντως, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + x) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Το $0 \in f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(\rho)=0$.

Ο ρ είναι μοναδικός, διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Τελικά, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ.

ii. Για $x \neq \rho$, έχουμε:

$$\lim_{x \to \rho} \frac{f(x) + f'(x) - f(\rho)}{x - \rho} \overset{f'(\rho)=0}{=} \lim_{x \to \rho}\left(\frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho} + \frac{f'(x) - f'(\rho)}{x - \rho}\right) = f'(\rho) + f''(\rho) = 0 + e^{\rho} + 1 = e^{\rho} + 1$$

, διότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = e^x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

iii.α) Ισχύει: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+vh)-g(x_0)}{h}=v,\ v\in N^*$ και $v\neq 1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσο με 1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+vh)-g(x_0)}{vh}=\frac{1}{v}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+vh)-g(x_0)}{h}=\frac{1}{v}\cdot v=1$$

Θέσαμε $x_0+vh=x \Leftrightarrow x-x_0=vh \Leftrightarrow h=\dfrac{x-x_0}{v}$.

Αν $x\to x_0$ τότε $h\to 0$. Επομένως, $g'(x_0)=1$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$.

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B(x_0, g(x_0))$ έχει εξίσωση:

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0-1=1(x-x_0)\Leftrightarrow y=x+1$.

Προφανώς οι δύο εφαπτόμενες συμπίπτουν.

iv. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $g'(x_0)=1$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)=x_0+1$,

με $f'(g(x_0))=f'(x_0+1)=e^{x_0+1}+x_0+1$.

Η fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με: $(fog)'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)=e^{x_0+1}+x_0+1$.

..πολλοί μαθητές αναρωτιούνται:

«Καλά εγώ τώρα πως θα βρίσκω για κάθε άσκηση ύπαρξης ,ποιο θεώρημα σε ποια συνάρτηση και σε ποιο διάστημα πρέπει να χρησιμοποιήσω;»

Δεν υπάρχει καθηγητής μαθηματικών όσο καλός και αν είναι, που μπορεί να πλασάρει στο μαθητή μια τέτοια γνώση σαν συνταγή. Μόνο η εμπειρία από την επίλυση πολλών ασκήσεων ή την επίλυση ασκήσεων με πολλούς τρόπους έχει αποτελέσματα. Όσο εύγλωττα το λέει ο Yoda:

«Κάνε ή μην κάνεις . Μην προσπαθείς!!

2.91 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\nu}-\eta\mu^{\nu}x}{x^{\nu+2}}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{13}{6}, & x=0\end{cases}$$

Η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ .2.

i.Να δείξετε ότι $\nu=13$.

ii.Να δείξετε ότι η συνάρτηση h με τύπο $h(x)=\ln\left(f(x)\right)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

i. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\nu}-\eta\mu^{\nu}x}{x^{\nu+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\eta\mu x+x^{\nu-3}\eta\mu^2x+..+\eta\mu^{\nu-1}x)}{x^{\nu+2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\frac{x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\eta\mu x+x^{\nu-3}\eta\mu^2x+..+\eta\mu^{\nu-1}x}{x^{\nu-1}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(\frac{x^{\nu-1}}{x^{\nu-1}}+\frac{x^{\nu-2}\eta\mu x}{x^{\nu-1}}+\frac{x^{\nu-3}\eta\mu^2x}{x^{\nu-1}}..+\frac{\eta\mu^{\nu-1}x}{x^{\nu-1}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2..+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^{\nu-1}\right)\right)\quad(1)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\right)\underset{D.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\underset{D.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

$$(1):\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2..+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^{\nu-1}\right)\right)=\frac{1}{6}(1+1+.......+1^{\nu-1})=\frac{\nu}{6}$$

Έτσι $\frac{\nu}{6}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow \nu=13$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Για $\nu=13$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{13}-\eta\mu^{13}x}{x^{15}}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{13}{6}, & x=0\end{cases}$$

Από θεωρία ισχύει η ανισότητα $|\eta\mu x|\le|x|$, $x\in\mathbb{R}$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 0)

Επομένως:

- Για $x=0$ ισχύει $f(0)=\frac{13}{6}$
- Αν $x>0$ τότε $|\eta\mu x|<|x|\Leftrightarrow \eta\mu x\le|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow \eta\mu x<x\Leftrightarrow \eta\mu^{13}x<x^{13}\Leftrightarrow \eta\mu^{13}x-\eta\mu^{13}x>0$ οπότε αν

$x<0$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{\eta\mu^{13}x-\eta\mu^{13}x}{x^{15}}>0$

Άρα σε κάθε περίπτωση $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

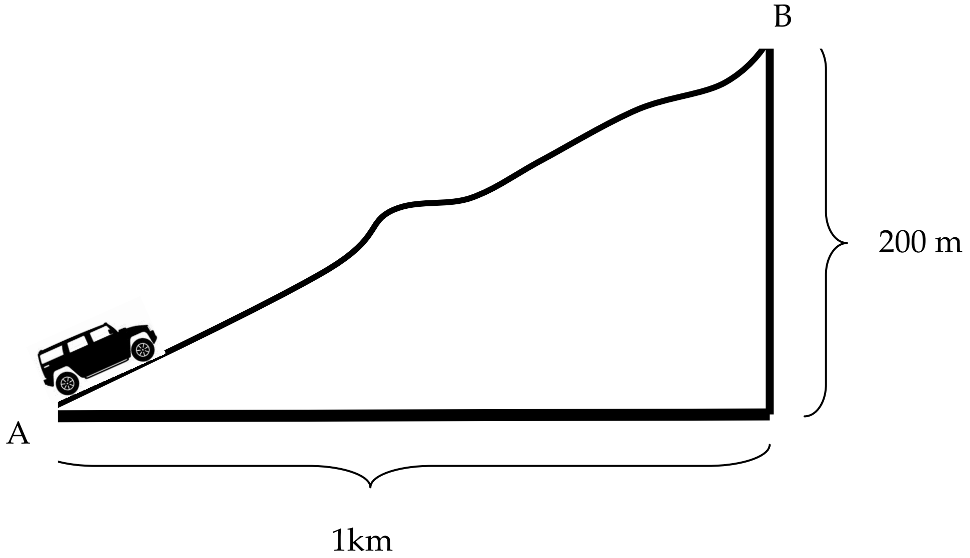
- Αν $x<0$ τότε

$|\eta\mu x|<|x|\Leftrightarrow -\eta\mu x\le|\eta\mu x|<-x\Leftrightarrow -\eta\mu x<-x\Leftrightarrow \eta\mu x>x\Leftrightarrow \eta\mu^{13}x>x^{13}\Leftrightarrow \eta\mu^{13}x-\eta\mu^{13}x<0$ οπότε αν

$x>0$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{\eta\mu^{13}x-\eta\mu^{13}x}{x^{15}}>0$

2.92 Δοκιμές εκτός δρόμου…

Στο παρακάτω σχήμα η πλαγιά ΑΒ ορίζεται από την καμπύλη $y = f(t)$, όπου f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν το τζιπ, μπορεί να αναρριχηθεί σε κλίσεις έως και 20% (δηλαδή σε κλίσεις που αντιστοιχούν σε συντελεστή διεύθυνσης 0,2) τότε να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να ανεβεί την πλαγιά.



Απάντηση

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Γ της πλαγιάς στο οποίο η κλίση είναι ίση με την κλίση της ευθείας ΑΒ. Όμως η κλίση (δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσης) της ευθείας ΑΒ είναι:

$$\frac{200}{1000} = 0.25 \text{ ή } 25\%$$

Άρα, αν το αυτοκίνητο φτάσει στο Γ θα συναντήσει κλίση 25% την οποία δεν θα μπορεί να υπερβεί.

2.93 Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(2) = 2$
- $f''(x) \neq 0$ **για κάθε** $x \in (0,2)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x} = 13$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$f(0) = 0 \quad \textbf{και} \quad f'(0) = 26$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(0,f(0)).

iii) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

iv) Υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2 - x_0$

v) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$

ΛΥΣΗ

i) f παραγωγίσιμη στο 0 άρα f συνεχής το 0 άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Τότε θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x}$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x} = 13$. Είναι $f(x) = g(x)\eta\mu 2x$, με

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu 2x\right)=13\cdot 0=0$

και

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\eta\mu 2x-g(0)\eta\mu\left(2\cdot 0\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\eta\mu 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot 2\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot 2\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)=13\cdot 2\cdot 1=26$$

Άρα $f'(0)=26$

ii) $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=26x$

iii) Έστω η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δυο ρίζες στο διάστημα $\left[0,2\right]$ τις x_1,x_2 με $0<x_1<x_2<2$ αν όμως $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα και στο $\left[x_1,x_2\right]$ οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_3\in\left(0,2\right)$ τέτοιο ώστε $f''(x_3)=0$, άτοπο καθώς $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(0,2\right)$.

iv) Έστω $h(x)=f(x)-2+x$ είναι $h(0)=-2<0$ και $h(2)=2>0$. Άρα $h(0)\cdot h(2)<0$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(0,2\right)$ τέτοιο ώστε

$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-2+x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=2-x_0$.

v) Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $\left[0,x_0\right],\left[x_0,2\right]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(0,x_0\right),\xi_2\in\left(x_0,2\right)$ αντίστοιχα ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\overset{(iv)}{=}\frac{2-x_0}{x_0}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x_0)}{x_0-2}\overset{f(2)=2}{=}\frac{2-(2-x_0)}{x_0-2}=\frac{x_0}{x_0-2}$$

Έτσι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{2-x_0}{x_0}\cdot\dfrac{x_0}{x_0-2}=1$.

2.94 A) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη , τότε και αντίστροφη της f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

B)Δίνεται συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\left[0,2\right]\to\mathbb{R}$ με $f(2)=2$ και ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x-x^2 f(x)}{1-\sqrt{x^2+1}}=-2$$

i) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με τύπο $g(x)=f^{-1}(2-x)-f^2(x)$

iv) Με την βοήθεια του ερωτήματος (A) να αποδείξετε ότι $-4\leq f^{-1}(2-x)-f^2(x)\leq 2$ **για κάθε** $x\in D_g$**.**

ΛΥΣΗ

A) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα θα αποδείξουμε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $y_1,y_2\in D_{f^{-1}}$ με $y_1<y_2$.Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}\left(y_1\right)<f^{-1}\left(y_2\right)$.Υπάρχουν $x_1,x_2\in D_f$ τέτοια ώστε $f\left(x_1\right)=y_1,f\left(x_2\right)=y_2$

Από όπου προκύπτει ότι

$$f^{-1}\left(y_1\right)=x_1,f^{-1}\left(y_2\right)=x_2$$

Θα εργαστούμε με άτοπο. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει: $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.Τότε, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)\Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1))=f(f^{-1}(y_2))\Rightarrow y_1=y_2$ άτοπο,(από υπόθεση $y_1<y_2$)
- $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(f^{-1}(y_1))>f(f^{-1}(y_2))\Rightarrow y_1>y_2$ άτοπο

Τελικά, $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ οπότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

B) i) Θέτουμε $g(x)=\dfrac{\eta\mu^2x-x^2f(x)}{1-\sqrt{x^2+1}}$, $x\in(0,2]$. Έτσι:

$$g(x)(1-\sqrt{x^2+1})=\eta\mu^2x-x^2f(x)\Leftrightarrow g(x)(1-\sqrt{x^2+1})-\eta\mu^2x=-x^2f(x)\Leftrightarrow x^2f(x)=\eta\mu^2x-g(x)(1-\sqrt{x^2+1})$$

$f(x)=\dfrac{\eta\mu^2x-g(x)(1-\sqrt{x^2+1})}{x^2}$ για $x\neq 0$.

Λαμβάνουμε τα όρια

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu^2x-g(x)(1-\sqrt{x^2+1})}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu^2x}{x^2}-\lim_{x\to0}g(x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{x^2+1})}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-\lim_{x\to0}g(x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x^2(1+\sqrt{x^2+1})}=\left(\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-\lim_{x\to0}g(x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-(x^2+1)}{x^2(1+\sqrt{x^2+1})}=$$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-\lim_{x\to0}g(x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2(1+\sqrt{x^2+1})}=\left(\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-\lim_{x\to0}g(x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{-1}{1+\sqrt{x^2+1}}=1^2-(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

(Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιότητες των ορίων εφαρμόζονται διότι τα όρια υπάρχουν)
Η f είναι συνεχής στο 0 άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

ii) Η f από υπόθεση είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $f(0)<f(2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,2]$ άρα το σύνολο τιμών της είναι $[f(0),f(2)]=[0,2]$. Επίσης ισχύει $f^{-1}(0)=0, f^{-1}(2)=2$ το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι $D_{f^{-1}}=[0,2]$.Άρα η συνάρτηση g ορίζεται όταν

$\begin{cases}2-x\in D_{f^{-1}}\\ x\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 2-x\le 2\\ 0\le x\le 2\end{cases}$ από όπου προκύπτει $D_g=[0,2]$.

iv)Η f είναι γνησίως αύξουσα ,άρα από το ερώτημα Α και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Θα εργαστούμε συνθετικά:

Έστω $x_1,x_2\in[0,2]$ με $x_1<x_2$.Έχουμε:

- $x_1<x_2\Leftrightarrow -x_1>-x_2\Leftrightarrow 2-x_1>2-x_2\overset{f^{-1}\nearrow}{\Rightarrow}f^{-1}(2-x_1)>f^{-1}(2-x_2)$ (1)
- $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)\overset{f(x_1),f(x_2)\in[0,2]}{\Rightarrow}f^2(x_1)<f^2(x_2)\Rightarrow -f^2(x_1)>-f^2(x_2)$ (2)

(1) +(2)$\Rightarrow f^{-1}(2-x_1)-f^2(x_1)>f^{-1}(2-x_2)-f^2(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο D_g.

Συνεπώς, όταν $0\le x\le 2\Rightarrow g(0)\ge g(x)\ge g(2)\Leftrightarrow 2\ge f^{-1}(2-x)-f^2(x)\ge -4$

94)Quickie.Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.Επίσης ισχύει $f'(1)=1$ και η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της A(0f(0)) έχει εξίσωση $y=2x+1$.

i.Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

ii.Να αποδείξετε ότι $2<f(1)<3$.

iii.Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$, ώστε:

$$(2-3\xi)f(\xi)=f(1-\xi)-4\xi .$$

ΛΥΣΗ

i) Η εξίσωση της εφαπτόμενης τα Cf στο σημείο A(0,f(0)) έχει εξίσωση:

$$y-f(0)=f'())(x-0)\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow y=f'(0)x+f(0)$$

Η οποία ταυτίζεται με την $y=2x+1$ άρα $f'(0)=2, f(0)=1$

ii.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ οπότε από το Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,1]$ υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$

Η f′ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε έχουμε:

$$0<x_0<1\Leftrightarrow f'(0)>f'(x_0)>f'(1)\Leftrightarrow f'(0)>f'(x_0)>f'(1)\Leftrightarrow 2>f'(x_0)>1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2>f(1)-f(0)>1\Leftrightarrow 2>f(1)-1>1\Leftrightarrow 3>f(1)>2 \ (1)$$

iii.Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=(2-3x)f(x)-f(1-x)+4x$, $x\in[0,1]$

Είναι:

$g(0)=2f(0)-f(1)=2\cdot 1-f(1)=2-f(1)<0$ από (1)

$g(1)=-f(1)-f(0)+4=3-f(1)>0$ από (1)

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως παραγωγίσιμη, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$g(\xi)=0\Leftrightarrow(2-3\xi)f(\xi)-f(1-\xi)+4\xi=0\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow(2-3\xi)f(\xi)=f(1-\xi)-4\xi$$

95) (Δεν βγαίνουν όλα με παράγωγο…)

Δίνεται μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την όποια ισχύει :

- $f(0)\ge\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{x\dfrac{\eta\mu x}{4}}$
- $f^2(x)\ne 4$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>2$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

ii) Η εξίσωση $e^x+f(x)=e^xf(x)$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

i) Αρχικά υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{x\dfrac{\eta\mu x}{4}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2x}{x\dfrac{\eta\mu x}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}4\frac{\eta\mu^2x}{x\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}4\frac{\eta\mu x}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=4\cdot 1=4$$, οπότε η δοθείσα γίνεται $f(0)\ge 4$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-2$, $x\in\mathbb{R}$.Θα αποδείξουμε ότι $g(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$: $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-2=0 \Leftrightarrow f(x_0)=2 \Rightarrow f^2(x_0)=4$ άτοπο από υπόθεση άρα η g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής οπότε διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0)\geq 4 \Leftrightarrow f(0)-2\geq 2 \Leftrightarrow g(0)\geq 2$, θα ισχύει ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δηλαδή $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-2>0 \Leftrightarrow f(x)>2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Μετασχηματίζουμε την εξίσωση

$$e^x+f(x)=e^x f(x) \overset{e^x f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{e^x+f(x)}{e^x f(x)}=1 \Leftrightarrow \frac{e^x+f(x)}{e^x f(x)}-1=0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x f(x)}+\frac{f(x)}{e^x f(x)}-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}+\frac{1}{e^x}-1=0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{e^x}-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$

$$h(0)=\frac{1}{f(0)}+\frac{1}{e^0}-1=\frac{1}{f(0)}>0$$

$h(1)=\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{e}-1$. Από το ερώτημα (i) και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα

$$f(1)>f(0)\geq 4 \Rightarrow f(1)>4 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)}<\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{e}-1<\frac{1}{4}+\frac{1}{e}-1 \Leftrightarrow h(1)<\frac{4-3e}{4e}<0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον λύση της $h(x)=0$ στο $(0,1)$.

Για την μοναδικότητα θα μελετήσουμε συνθετικά την μονοτονία της f στο $\mathbb{R}$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)}$ (3)

$$x_1<x_2 \overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow} e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}>\frac{1}{e^{x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}-1>\frac{1}{e^{x_2}}-1 \quad (4)$$

(3)+(4) $\Rightarrow \frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{e^{x_1}}-1>\frac{1}{f(x_2)}+\frac{1}{e^{x_2}}-1 \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε η $h(x)=0$ έχει μοναδική λύση, οπότε κατ' επέκταση έχει μοναδική λύση και η $e^x+f(x)=e^x f(x)$.

Σχόλιο

Στο τελευταίο ερώτημα με την εξίσωση η μεταφορά των όρων στο πρώτο μέλος $e^x+f(x)=e^x f(x) \Leftrightarrow e^x+f(x)-e^x f(x)=0$ *δίνει κατεύθυνση βοηθητικής συνάρτησης* $f(x)=e^x+f(x)-e^x f(x)$ *για την όποια δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε Bolzano στο* $[0,1]$ *καθώς δεν γνωρίζουμε τίποτα για το πρόσημο των τιμών της στα άκρα του διαστήματος,* $f(0),f(1)$. *Επίσης , σημειώνουμε σε κανένα ερώτημα δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε, καθώς στην εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η f είναι παραγωγίσιμη.*

Προχθές στο σπίτι..
-Γιατί δεν λύνεις ασκήσεις; Τι κάνεις;
-Γράφω τουιτ.
-Αυτός ο Ιτ δεν μπορεί να τα γράψει μόνος του..

Μαρία 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

96) Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την όποια ισχύουν οι ιδιότητες :

- $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$
- $f(x)<1$ **για κάθε** $x\in(1,+\infty)$
- $f(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$

Να δείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ **και** $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$

ii) $f(x)>0$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$

iii)Η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv)Η εξίσωση $f(e^{1-x})=f(\frac{1}{666x})\cdot f(222x^2+444x)$ **έχει μοναδική ρίζα στο** $(0,+\infty)$**.**

v)Αν είναι γνωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ **τότε ισχύει**

$$f'(x)=\frac{f'(1)f(x)}{x} \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

ΛΥΣΗ

i) Η ισότητα $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ ισχύει για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα θα ισχύει και για $x=y=1$

$$f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)\Leftrightarrow f(1)=\left(f(1)\right)^2\Leftrightarrow f(1)-\left(f(1)\right)^2=0\Leftrightarrow f(1)(1-f(1))=0\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} f(1)=1$$

Η ισότητα $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ ισχύει για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα θα ισχύει και για $y=\frac{1}{x}$

$$f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 1=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

ii) Η ισότητα $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ ισχύει για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα θα ισχύει και για

$y=x=\sqrt{x},x>0$ άρα $f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=f(\sqrt{x})\cdot f(\sqrt{x})\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\left(f(\sqrt{x})\right)^2>0$ για $x\in(0,+\infty)$, αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

iii) Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow\frac{x_2}{x_1}>1$, άρα από υπόθεση

$f(\frac{x_2}{x_1})<1\Leftrightarrow f(x_2\cdot\frac{1}{x_1})<1\Leftrightarrow f(x_2)f(\frac{1}{x_1})<1\overset{(i)}{\Leftrightarrow} f(x_2)\frac{1}{f(x_1)}<1\overset{(ii)}{\Leftrightarrow} f(x_2)<f(x_1)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv) $f(e^{1-x})=f(\frac{1}{666x})\cdot f(222x^2+444x)\Leftrightarrow f(e^{1-x})=f(\frac{1}{666x}\cdot\left(222x^2+444x\right))\Leftrightarrow f(e^{1-x})=f(\frac{222x^2+444x}{666x})\Leftrightarrow$

$f(e^{1-x})=f(\frac{222x(x+2)}{666x})\Leftrightarrow f(e^{1-x})=f(\frac{x+2}{3})\overset{f\searrow \text{άρα } f1-1}{\Leftrightarrow} e^{1-x}=\frac{x+2}{3}$

$3e^{1-x}=x+2\Leftrightarrow 3e^{1-x}-x-2=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=3e^{1-x}-x-2$,με $x\in\mathbb{R}$. Βρίσκουμε προφανή ρίζα το 1(θετικός) καθώς $h(1)=3e^{1-1}-1-2=0$.Για την μοναδικότητα της ρίζας εξετάζουμε την μονοτονία της h. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα $h'(x)=-3e^{1-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,έτσι η h γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε η ρίζα x=1 είναι μοναδική.

v) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}\in\mathbb{R}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0\in(0,+\infty)$

Δηλαδή ότι $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$

Έτσι

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{h=\frac{x}{x_0}}{=}\lim_{h\to1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}\overset{(i)}{=}$$

$$\lim_{h\to1}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}==\lim_{h\to1}\frac{f(x_0)\left(f(h)-1\right)}{x_0\left(h-1\right)}=$$

$$\frac{f(x_0)}{x_0}\lim_{h\to1}\frac{\left(f(h)-1\right)}{\left(h-1\right)}=\frac{f(x_0)}{x_0}f'(1)\in\mathbb{R}$$

Άρα, καταλήγουμε ότι

$f'(x)=\dfrac{f'(1)f(x)}{x}$ για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$.

Να θυμίσω ότι για θεωρητικά θέματα παραγώγων από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο με κατάλληλη αντικατάσταση προκύπτουν οι σχέσεις:

- $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda h}$ $(\lambda\neq0)$
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to1}\dfrac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0\left(h-1\right)}=\dfrac{1}{x_0}\lim\limits_{h\to1}\dfrac{f(x_0h)-f(x_0)}{h-1}, x_0\neq0$

97) Δίνεται παραγωγίσιμη

ισχύει η ιδιότητα

(1) $\sigma\upsilon\nu x\left(f'(x)+\eta\mu x\right)=\sigma\upsilon\nu x-f(x)$ **για κάθε** $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x \text{ **για κάθε** } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$g(x)+g'(x)\sigma\upsilon\nu x=0 \text{ **για κάθε** } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

ii)Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο , τα οποία και να βρείτε .

iii)Με την βοήθεια του ερωτήματος (ii)να βρείτε το τύπο της f.

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x$ προφανώς είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.Παραγωγίζουμε

$g'(x)=\left(f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)'=f'(x)+\eta\mu x$

Έτσι

$$g(x)+g'(x)\sigma\upsilon\nu x=f(x)-\sigma\upsilon\nu x+\left(f'(x)+\eta\mu x\right)\sigma\upsilon\nu x\overset{(1)}{=}f(x)-\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

ii)Η g είναι συνεχής στο κλειστό $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ άρα θα παίρνει μια ελάχιστη τιμή μ και μια μέγιστη τιμή Μ. Επειδή όμως η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,οι πιθανές θέσεις ολικών ακρότατων είναι :

- τα άκρα $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ του πεδίου ορισμού $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

- κάποιο $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ για το οποίο θα ισχύει $g'(x_0)=0$

Όμως από την σχέση του ερωτήματος (i)

Για $x=-\frac{\pi}{2}$

$$g(-\frac{\pi}{2})+g'(-\frac{\pi}{2})\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow g(-\frac{\pi}{2})=0$$

Για $x=\frac{\pi}{2}$

$$g(\frac{\pi}{2})+g'(\frac{\pi}{2})\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow g(\frac{\pi}{2})=0$$

Για $x=x_0$

$$g(x_0)+g'(x_0)\sigma\upsilon\nu x_0=0\Leftrightarrow g(x_0)=0$$

Επομένως είναι $\mu=M=0$

iii)Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\mu\le g(x)\le M\Leftrightarrow 0\le g(x)\le 0\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow f(x)=\sigma\upsilon\nu x$$

98)Α. Αν f,g,h συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο Α τότε ισχύει :

α) $\left(f(x)g(x)h(x)\right)'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)-f(x)g(x)h'(x)$

β) $\left(f(x)g(x)h(x)\right)'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

γ) $\left(f(x)g(x)h(x)\right)'=f'(x)g(x)h(x)-f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

δ) $\left(f(x)g(x)h(x)\right)'=f'(x)g'(x)h(x)-f(x)g'(x)h'(x)+f'(x)g(x)h'(x)$

Να σημειώσετε στο τετράδιο σας την σωστή απάντηση .

Β. Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ **με** $f(e)=1$ **και** $f'(e)=\frac{1}{2e}$ **τέτοια ώστε:**

$$xf(x)f''(x)+x\left(f'(x)\right)^2+f(x)f'(x)=0 \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty)$$

Με την βοήθεια του ερωτήματος (Α) να βρείτε τον τύπο της f.

ΛΥΣΗ

Α) β) θεωρία σχολικό βιβλίο σελ 230

Β) Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε:

$$xf(x)f''(x)+x\left(f'(x)\right)^2+f(x)f'(x)=0\Leftrightarrow xf(x)f''(x)+xf'(x)f'(x)+(x)'f(x)f'(x)=0\overset{(A)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(xf(x)f'(x)\right)'=0$$

άρα $xf(x)f'(x)=c$, c πραγματικός σταθερός αριθμός (1)

Η (1) για $x=e$ παίρνει την μορφή:

$ef(e)f'(e)=c\Leftrightarrow e\cdot 1\cdot\frac{1}{2e}=c\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$ άρα η (1) για $c=\frac{1}{2}$ γίνεται

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2} \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty) \quad (2)$$

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}\overset{x>1}{\Leftrightarrow}2f(x)f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(\left(f(x)\right)^2\right)'=\left(\ln x\right)'\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^2=\ln x+c_1$, c_1 πραγματικός σταθερός αριθμός (3)

Η (3) για $x=e$ γίνεται:

$$\left(f(e)\right)^2=\ln e+c_1\Leftrightarrow 1=1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$$

Άρα τελικά η (3) :

$$\left(f(x)\right)^2 = \ln x \text{ για κάθε } x \in (1,+\infty) \quad (4)$$

Από την (2) παρατηρούμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$ και επειδή η f είναι συνεχής , θα διατηρεί πρόσημο. Όμως από υπόθεση $f(e) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$.Έτσι

$$\left(f(x)\right)^2 = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{\ln x} \text{ για κάθε } x > 1$$

100) (εξετάσεις 2009) Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1) \text{ , } x > -1 \text{ , } \alpha > 0 \textbf{ και } \alpha \neq 1$$

Α) Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Β) Για $\alpha = e$

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$

iii) αν $\beta,\gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$,να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

Έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

ΛΥΣΗ

Α) Για κάθε $x > -1$ ισχύει ότι :

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$$

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$.Επίσης το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,+\infty)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(0) = 0$.

Για κάθε $x > -1$:

$$f'(x) = \left(\alpha^x - \ln(x+1)\right)' = \alpha^x \ln\alpha - \frac{1}{x+1}$$

Άρα έχουμε:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

Άρα η συνάρτηση παίρνει την μορφή: $f(x) = e^x - \ln(x+1)$

Β) i) Για κάθε $x > -1$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \quad , \quad f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$, οπότε η f είναι κυρτή.

ii) Η f είναι κυρτή οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα έτσι έχουμε:

Για $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$

Για $-1 < x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = \left(f(\beta)-1\right)\left(x-2\right) + \left(f(\gamma)-1\right)\left(x-1\right)$$

> Πολλοί μαθητές την συγκεκριμένη χρονιά που έπεσε το θέμα δεν σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν την κυρτότητα για να βρουν την μονοτονία της f. Προσπάθησαν να βρουν το πρόσημο της f′ από τον τύπο κάτι το οποίο δεν ήταν εφικτό και σε μια λογική *κάντο και ότι γίνει* κατασκεύασαν το πίνακα μεταβολών και έβαλαν τα πρόσημα όπως τους υποδείκνυε η εκφώνηση. Μια τέτοια λύση δεν έπαιρνε μονάδες.

(Η συνάρτηση πρόεκυψε από απαλοιφή παρονομαστών στην αρχική εξίσωση)

Στο διάστημα $[1,2]$ η f είναι συνεχής ως πράξη συνέχων συναρτήσεων, επίσης $g(1) = -\left(f(\beta)-1\right) < 0$, $g(2) = \left(f(\gamma)-1\right) > 0$ (από υπόθεση $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ και το '' ='' ισχύει μόνο για $x = 0$, ενώ $\beta,\gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$). Συνεπώς $g(1)g(2) < 0$, άρα από θεώρημα Bolzano προκύπτει το ζητούμενο.

Περί κυρτότητας και μονοτονίας ...

101) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$(x^2+e^x)f'(x)=x^2+2e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

ii) Να εξετάσετε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$ ως προς την μονοτονία.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+2)-f(x)\right)$$

ΛΥΣΗ

i) Από την δοθείσα ισότητα λαμβάνουμε:

$(x^2+e^x)f'(x)=x^2+2e^x \overset{x^2+e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x)=\dfrac{x^2+2e^x}{x^2+e^x}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+2e^x}{x^2+e^x}\right)'=\frac{\left(x^2+2e^x\right)'\left(x^2+e^x\right)-\left(x^2+2e^x\right)\left(x^2+e^x\right)'}{\left(x^2+e^x\right)^2}=\frac{\left(2x+2e^x\right)\left(x^2+e^x\right)-\left(x^2+2e^x\right)\left(2x+e^x\right)}{\left(x^2+e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2xe^x+2e^xx^2+2e^{2x}-\left(2x^3+e^xx^2+4xe^x+2e^{2x}\right)}{\left(x^2+e^x\right)^2}=\frac{2x^3+2xe^x+2e^xx^2+2e^{2x}-2x^3-e^xx^2-4xe^x-2e^{2x}}{\left(x^2+e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^xx^2-2xe^x}{\left(x^2+e^x\right)^2}=\frac{e^x(x^2-2x)}{\left(x^2+e^x\right)^2}=\frac{e^xx(x-2)}{\left(x^2+e^x\right)^2}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της f''

x	$-\infty$	0		2		$-\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$	
		Σ.Κ		Σ.Κ		

Από τον πίνακα τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή είναι $\left(-\infty,0\right],\left[2,+\infty\right)$ ενώ είναι κοίλη στο $\left[0,2\right]$.

ii) $g'(x)=\left(f(x)-x\right)'=\dfrac{x^2+2e^x}{x^2+e^x}-1=\dfrac{e^x}{x^2+e^x}>0$ άρα η g γνησίως αύξουσα.

iii) Αν $x>0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0)\Leftrightarrow f(x)-x>f(0)\Leftrightarrow f(x)>f(0)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(0)+x\right)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Ανάλογα αν $x<0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x)<g(0)\Leftrightarrow f(x)-x<f(0)\Leftrightarrow f(x)<f(0)+x$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(0)+x\right)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ως παραγωγίσιμη, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

iv) Η διάφορα $f(x+2)-f(x)$ μας υποψιάζει για Θ.Μ.Τ

Η f ικανοποίει τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $\left[x,x+2\right]$.

Έτσι υπάρχει $\xi\in\left(x,x+2\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+2)-f(x)}{x+2-x}=\frac{f(x+2)-f(x)}{2}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x+2)-f(x)}{2}\ (1)$$

Άρα

$$x<\xi<x+2\overset{f'\nearrow[2,+\infty)}{\Rightarrow}f'(x)<f'(\xi)<f'(x+2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f'(x)<\frac{f(x+2)-f(x)}{2}<f'(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+2e^x}{x^2+e^x}<\frac{f(x+2)-f(x)}{2}<\frac{(x+2)^2+2e^{x+2}}{(x+2)^2+e^{x+2}}\Leftrightarrow2\frac{x^2+2e^x}{x^2+e^x}<f(x+2)-f(x)<2\frac{(x+2)^2+2e^{x+2}}{(x+2)^2+e^{x+2}}\quad(2)$$

Όμως

- $\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{x^2+2e^x}{x^2+e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{2x+2e^x}{2x+e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{2+2e^x}{2+e^x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{2e^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4=4$

Ανάλογα προκύπτει:

- $\lim\limits_{x\to\infty}2\dfrac{(x+2)^2+2e^{x+2}}{(x+2)^2+e^{x+2}}=\ldots=4$

Από την (2) σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+2)-f(x)\right)=4$

103)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\lambda}-(x-\lambda)^2-2,\lambda>0$

α) Να βρείτε τα σημεία καμπής της Cf.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της Cf στο σημείο (λ,f(λ)).

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(2x)-x}{x-\lambda}-\frac{2\lambda+f(x)}{x}=0$$

Έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(0,\lambda\right)$

δ) Να υπολογίσετε το όριο

$$L=\lim_{x\to\lambda^+}\frac{\sqrt{x^2+3\lambda^2}+\sqrt{10x^2-\lambda^2}-5\lambda}{\left(\lambda^2-x^2\right)\left(f(x)-2x+2\lambda\right)}$$

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$f'(x)=\left(2e^{x-\lambda}-(x-\lambda)^2-2\right)'=2e^{x-\lambda}-2(x-\lambda)$, $f''(x)=\left(2e^{x-\lambda}-2(x-\lambda)\right)'=2e^{x-\lambda}-2$

Έχουμε: $f''(x)=0\Leftrightarrow2e^{x-\lambda}-2=0\Leftrightarrow e^{x-\lambda}=1\Leftrightarrow x-\lambda=0\Leftrightarrow x=\lambda$

x	$-\infty$ λ	$+\infty$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	∩	∪

Άρα έχει σημείο καμπής στο $x_0=\lambda$

β.Η εφαπτομένη στης cf στο σημείο (α,f(α)) έχει εξίσωση :

$y-f(\lambda)=f'(\lambda)(x-\lambda)\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow y=2x-2\lambda$

γ.Για $x\neq 0$ και $x\neq\lambda$ η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$xf(2x)-x^2-(x-\lambda)(2\lambda+f(x))=0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=xf(2x)-x^2-(x-\lambda)(2\lambda+f(x))$

Έχουμε: $g(0)=\lambda(2\lambda+f(0))$, $g(\lambda)=\lambda(f(2\lambda)-\lambda)$

Η εφαπτομένη της Cf στο $x_0=\lambda$ είναι η ευθεία $y=2x-2\lambda$, συνεπώς:

-Η f είναι κυρτή στο $[\lambda,+\infty)$,άρα για κάθε $x>\lambda$ ισχύει: $f(x)>2x-2\lambda$ (1) συνεπώς για x=2λ έχουμε $f(2\lambda)>4\lambda-2\lambda=2\lambda$ δηλαδή $f(2\lambda)>2\lambda>\lambda$ άρα $f(2\lambda)-\lambda>0$.οπότε $g(\lambda)>0$

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$, άρα για κάθε $\chi<\lambda$ ισχύει: $f(x)<2x-2\lambda$ συνεπώς για x=0 έχουμε $f(0)<-2\lambda$ δηλαδή $f(0)+2\lambda<0$ οπότε $g(0)<0$

Δηλαδή $g(0)\cdot g(\lambda)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,\lambda]$, έχουμε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει $x_0\in(0,\lambda)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$

δ)

$$L=\lim_{x\to\lambda^+}\frac{\sqrt{x^2+3\lambda^2}+\sqrt{10x^2-\lambda^2}-5\lambda}{\left(\lambda^2-x^2\right)\left(f(x)-2x+2\lambda\right)}=\lim_{x\to\lambda^+}\frac{\sqrt{x^2+3\lambda^2}-2\lambda+\sqrt{10x^2-\lambda^2}-3\lambda}{\left(\lambda^2-x^2\right)\left(f(x)-2x+2\lambda\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\lambda^+}\left(\frac{1}{\left(f(x)-2x+2\lambda\right)}\left(\frac{\sqrt{x^2+3\lambda^2}-2\lambda}{\left(\lambda^2-x^2\right)}+\frac{\sqrt{10x^2-\lambda^2}-3\lambda}{\left(\lambda^2-x^2\right)}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to\lambda^+}\left(\frac{1}{\left(f(x)-2x+2\lambda\right)}\left(\frac{(\sqrt{x^2+3\lambda^2}-2\lambda)\left(\sqrt{x^2+3\lambda^2}+2\lambda\right)}{\left(\lambda^2-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+3\lambda^2}+2\lambda\right)}+\frac{\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}-3\lambda\right)\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}+3\lambda\right)}{\left(\lambda^2-x^2\right)\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}+3\lambda\right)}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\lambda^+}\left(\frac{1}{f(x)-2x+2\lambda}\left(\frac{x^2+3\lambda^2-4\lambda^2}{\left(\lambda^2-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+3\lambda^2}+2\lambda\right)}+\frac{10x^2-\lambda^2-9\lambda^2}{\left(\lambda-x\right)\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}+3\lambda\right)}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\lambda^+}\left(\frac{1}{f(x)-2x+2\lambda}\left(\frac{x^2-\lambda^2}{\left(\lambda^2-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+3\lambda^2}+2\lambda\right)}+\frac{x^2-\lambda^2}{\left(\lambda-x\right)\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}+3\lambda\right)}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to\lambda^+}\left(\frac{1}{f(x)-2x+2\lambda}\left(-\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+3\lambda^2}+2\lambda\right)}-\frac{1}{\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}+3\lambda\right)}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\lambda^+}\left(\frac{1}{f(x)-2x+2\lambda}\right)\cdot\lim_{x\to\lambda^+}\left(-\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+3\lambda^2}+2\lambda\right)}-\frac{1}{\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}+3\lambda\right)}\right)$$

Όμως

$$\lim_{x\to\lambda^+}\left(\frac{1}{f(x)-2x+2\lambda}\right)\overset{f(x)-2x+2\lambda>0}{=}+\infty$$

$$\lim_{x\to\lambda^+}\left(-\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+3\lambda^2}+2\lambda\right)}-\frac{1}{\left(\sqrt{10x^2-\lambda^2}+3\lambda\right)}\right)=-\frac{1}{4\lambda}-\frac{1}{6\lambda}<0$$

Τελικά

$L=\left(-\frac{1}{4\lambda}-\frac{1}{6\lambda}\right)(+\infty)=-\infty$

102) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

(1) $f^3(x)+f(x)=8x^3-12x^2+8x-2$ **, για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(0,1)$**.**

iii) Αν για την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **ισχύει:**

$$f(g(x)-3x)=f(x^2+2)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **, να βρείτε το** x_0**, στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.**

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα παραγωγίζουμε την (1)

$$\left(f^3(x)+f(x)\right)'=\left(8x^3-12x^2+8x-2\right)'\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+f'(x)=24x^2-24x+8\Leftrightarrow$$

$$f'(x)(3f^2(x)+1)=24x^2-24x+8 \overset{3f^2(x)+1\neq 0 \text{ για καθε } x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{24x^2-24x+8}{3f^2(x)+1}$$

Όμως το τριώνυμο $24x^2-24x+8>0$ ($\Delta<0,\alpha>0$)

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,άρα και 1-1.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε θα είναι και συνεχής στο $[0,1]$.Επίσης:

Η (1) για x=0

$$f^3(0)+f(0)=-2\Leftrightarrow f(0)(f^2(0)+1)=-2 \overset{f^2(0)+1>0 \text{ για καθε } x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(0)<0$$

Η (1) για x=1

$$f^3(1)+f(1)=2\Leftrightarrow f(1)(f^2(1)+1)=2 \overset{f^2(1)+1>0 \text{ για καθε } x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(1)>0$$

Οπότε $f(0)\cdot f(1)<0$

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ και αφού η f είναι 1-1, η ρίζα είναι μοναδική.

iii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$f(g(x)-3x)=f(x^2+2)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)-3x=x^2+2\Leftrightarrow g(x)=x^2+3x+2\ldots\ldots\ldots$$

….η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\frac{3}{2}$.

2.103 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
α. Αν $f(0)=1$, να βρείτε την παράγωγο $f'(0)$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=(x^2+x+1)f(x)+2\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την παράγωγο $g'(0)$.

ΛΥΣΗ

α. Αφού f παραγωγίσιμη στο μηδέν είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (1).

Θεωρούμε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ και θέτουμε $x=-y$. Έτσι όταν $x\to 0^-$ το $y\to 0^+$ ενώ $f(-y)=f(y)$ αφού η f άρτια. Επομένως:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{y\to 0^+}\frac{f(-y)-f(0)}{-y}=-\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\overset{(1)}{=}-f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0.$$

β. Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{(x^2+x+1)f(x)+2\sigma\upsilon\nu x-[f(0)+2\sigma\upsilon\nu 0]}{x}=\frac{(x^2+x+1)f(x)+2\sigma\upsilon\nu x-f(0)-2}{x}=$$

$$=\frac{(x^2+x)f(x)+f(x)-f(0)+2\sigma\upsilon\nu x-2}{x}=\frac{x(x+1)f(x)}{x}+\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}=$$

$$=(x+1)f(x)+\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}$$ (2). Αλλά:

- $\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)f(x)]=(0+1)\cdot f(0)=f(0)=1$ αφού f συνεχής ως παργωγίσιμη.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

οπότε από τη (2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=1+0+2\cdot 0\Leftrightarrow g'(0)=1.$$

2.104 Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy$ (1). Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

- Θα χρειαστούμε το $f(0)$ και θα το βρούμε από την (1) $x=y=0$. Είναι $f(0+0)=f(0)+f(0)+5\cdot 0\Leftrightarrow f(0)=0$.
- Η f παραγωγίσιμη στο μηδέν άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ (2).
- Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}^*$. Τότε για κάθε $x\neq x_0$ υπάρχει $h\neq 0$ τέτοιο ώστε $x=x_0+h$. Από αυτή προκύπτει ότι, όταν το $x\to x_0$, τότε το $h\to 0$. Άρα για $h\neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}\frac{f(x_0)+f(h)+5x_0h-f(x_0)}{h}=\frac{f(h)}{h}+\frac{5x_0h}{h}=\frac{f(h)}{h}+5x_0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h}+5x_0\right]=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+5x_0\overset{(2)}{=}f'(0)+5x_0\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς $f'(x_0)=f'(0)+5x_0$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}^*$, άρα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (αφού είναι παραγωγίσιμη και στο μηδέν).

2.105 Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $[f(x)]^2+[g(x)]^2=4x^4$ (1). Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο μηδέν και μάλιστα οι παράγωγοι αυτές είναι ίσες.

ΛΥΣΗ

- Θα χρειαστούμε τα $f(0),g(0)$ και θα τα βρούμε από τη δοσμένη σχέση για $x=0$. Είναι: $[f(0)]^2+[g(0)]^2=0\Leftrightarrow f(0)=g(0)=0$.
- Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ (2), οπότε αρκεί να βρούμε το όριο αυτό.
- Από την (1): $[g(x)]^2=4x^4-[f(x)]^2\ge 0\Rightarrow 4x^4\ge[f(x)]^2\Leftrightarrow[f(x)]^2\le 4x^4\Leftrightarrow[f(x)]\le 2|x|^2$

$$\overset{(x\neq 0)}{\Leftrightarrow}\frac{|f(x)|}{|x|}\le 2|x|\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le 2|x|\Leftrightarrow -2|x|\le\frac{f(x)}{x}\le 2|x|.$$ Έτσι αφού

$\lim\limits_{x\to 0}(-2|x|)=\lim\limits_{x\to 0}(2|x|)=0$, από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Άρα λόγω της (2) είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $g'(0)=0$. Άρα $f'(0)=g'(0)=0$.

2.106 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και περιττή. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x-f(\sigma\upsilon\nu x)$. Αν $f'(-1)=-2$, δείξτε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο μηδέν και βρείτε την $g''(0)$.

ΛΥΣΗ

- Οι συναρτήσεις f και συνx είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ άρα και η σύνθεσή τους $f(\sigma\upsilon\nu x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και:

$$g'(x)=[f(x)\sigma\upsilon\nu x]'-[f(\sigma\upsilon\nu x)]'=f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'-f'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'=$$
$$=f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)\eta\mu x+f'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x.$$

- Αλλά και η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε:

$$g''(x)=[f'(x)\sigma\upsilon\nu x]'-[f(x)\eta\mu x]'+[f'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x]'=f''(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+f'(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'-f'(x)\eta\mu x-f(x)(\eta\mu x)'+$$
$$+[f'(\sigma\upsilon\nu x)]'\cdot\eta\mu x+f'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot(\eta\mu x)'=f''(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\eta\mu x-f'(x)\eta\mu x-f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f''(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu x+$$
$$+f'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow g''(x)=f''(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-2f'(x)\eta\mu x-f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f''(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu^2 x+f'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x.\quad(1)$$

Για $x=0$ παίρνουμε: $g''(0)=f''(0)-f(0)+f'(1)$ (2). Χρειαζόμαστε τώρα τα $f''(0),f(0),f'(1)$.

- Η f περιττή άρα $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in R$. Για $x=0$ είναι: $f(-0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.
- Επειδή f περιττή και παραγωγίσιμη η f' θα είναι άρτια. Πραγματικά $f(-x)=-f(x)$. Άρα $[f(-x)]'=[-f(x)]'\Leftrightarrow f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)$ για κάθε $x\in R$, άρα f άρτια. Για $x=1$ είναι $f'(-1)=f'(1)$, οπότε λόγω της υπόθεσης είναι $f'(1)=-2$.
- Ομοίως βρίσκουμε ότι αν f άρτια, η f' είναι περιττή. Έτσι αφού η f' είναι άρτια η f'' θα είναι περιττή, οπότε $f''(-x)=-f''(x)$. Έτσι για $x=0$ είναι $f''(-0)=-f''(0)\Leftrightarrow 2f''(0)=0\Leftrightarrow f''(0)=0$. Τελικά από τη (2): $g''(0)=0-0+(-2)\Leftrightarrow g''(0)=-2$.

2.107 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει ότι $f(0)=f(1)$.

i) Αν $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{(f'(0))^2\alpha^2+\alpha-f'(0)f'(1)\alpha\sqrt{4\alpha^2+1}}{\alpha^2+\alpha+1974}\le-(f'(1))^2$ να δειξετε ότι $f'(0)=f'(1)$

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση g με $g(x)=\begin{cases}f(2x), & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ f(2x-1), & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$, είναι συνεχής και στη συνέχεια αν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$.

ΛΥΣΗ

i) $$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(f'(0))^2\alpha^2+\alpha-f'(0)f'(1)\alpha\sqrt{4\alpha^2+1}}{\alpha^2+\alpha+1974}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha^2\left((f'(0))^2+\frac{1}{\alpha}-f'(0)f'(1)\frac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{\alpha}\right)}{\alpha^2(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1974}{\alpha^2})}=$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(f'(0))^2+\frac{1}{\alpha}-f'(0)f'(1)\frac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{\alpha}}{1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1974}{\alpha^2}}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(f'(0))^2+\frac{1}{\alpha}-f'(0)f'(1)\frac{|\alpha|\sqrt{4+\frac{1}{\alpha^2}}}{\alpha}}{1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1974}{\alpha^2}}\overset{\alpha\to+\infty}{\underset{\text{οπου } \alpha>0 \text{ τελικα}}{=}}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(f'(0))^2+\frac{1}{\alpha}-f'(0)f'(1)\frac{\alpha\sqrt{4+\frac{1}{\alpha^2}}}{\alpha}}{1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1974}{\alpha^2}}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(f'(0))^2+\frac{1}{\alpha}-f'(0)f'(1)\sqrt{4+\frac{1}{\alpha^2}}}{1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1974}{\alpha^2}}=$$

$$=\frac{(f'(0))^2+0-f'(0)f'(1)\sqrt{4+0}}{1+0+0}=(f'(0))^2-2f'(0)f'(1)$$

Αλλά

$$(f'(0))^2-2f'(0)f'(1)\le-(f'(1))^2\Leftrightarrow(f'(0))^2-2f'(0)f'(1)+(f'(1))^2\le0\Leftrightarrow(f'(0)-f'(1))^2\le0$$

$$f'(0)-f'(1)=0\Leftrightarrow f'(0)=f'(1)$$

ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι η f ως παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ είναι και συνεχής.

α. Συνέχεια της g.

- Στο $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $g(x)=f(2x)$, άρα είναι συνεχής ως σύνθεση της συνεχούς συνάρτησης 2x με τη συνεχή f.
- Στο $\left(\frac{1}{2},1\right]$ είναι $g(x)=f(2x-1)$, άρα η g είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (της πολυωνυμικής 2x-1 με την f).
- Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $\frac{1}{2}$. Έχουμε:

i) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(2x)$. Θέτουμε $2x=y$, οπότε αν $x\to\frac{1}{2}^-$ το $y\to1^-$. Άρα

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x)=\lim\limits_{y\to1^-} f(y)=f(1)$ (1), αφού f συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη.

ii) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(2x-1)$. Θέτουμε $2x-1=y$, οπότε για $x\to\frac{1}{2}^+$ το $y\to0^+$. Άρα

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x)=\lim\limits_{y\to0^+} f(y)=f(0)$ (2), γιατί f συνεχής στο μηδέν.

iii) $g\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=f(1)$ (3). Από τις (1), (2), (3) και την υπόθεση είναι

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)=g\left(\frac{1}{2}\right)$, άρα g συνεχής και στο $\frac{1}{2}$ άρα συνεχής στο $[0,1]$.

β. Παραγωγισιμότητα της g.

- Στο $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $g(x)=f(2x)$, οπότε η g παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα αυτό (της $2x$ με την f) με $g'(x)=f'(2x)(2x)'=2f'(2x)$.
- Στο $\left(\frac{1}{2},1\right]$ είναι $g(x)=f(2x-1)$, οπότε η g παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα αυτό (της 2x-1 με την f) με $g'(x)=f'(2x-1)(2x-1)'=2f'(2x-1)$
- Εξετάζουμε χωριστά την παραγωγισιμότητα της g στο $\frac{1}{2}$.

i) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{f(2x)-f(1)}{x-\frac{1}{2}}$. Θέτουμε $y=2x$, οπότε για $x\to\frac{1}{2}^-$ το $y\to1^-$. Έτσι

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\dfrac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{y\to1^-}\dfrac{f(y)-f(1)}{\frac{y}{2}-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{y\to1^-}\dfrac{2\left[f(y)-f(1)\right]}{y-1}=2f'(1)$ (4) αφού η f παραγωγίσιμη στο 1

ii) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{f(2x-1)-f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$. Θέτουμε $2x-1=y$, οπότε για $x\to\dfrac{1}{2}^+$ το $y\to 0^+$,

άρα $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f(y)-f(1)}{\frac{y+1}{2}-\frac{1}{2}}=2\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f(y)-f(1)}{y}=2\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{f(y)-f(0)}{y}=2f'(0)$ (5),

αφού από υπόθεση $f(0)=f(1)$ και f παραγωγίσιμη στο μηδέν.

Αλλά από (α) $f'(0)=f'(1)$ οπότε η g παραγωγίσιμη στο $\dfrac{1}{2}$. Τελικά:

$$g'(x)=\begin{cases}2f'(2x), & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 2f'(2x-1), & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$

2.108 Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $f(x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\alpha x$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+\beta}$ εφάπτονται στο σημείο $P(0,1)$ να βρείτε τα α, β.

ΛΥΣΗ

- Σύμφωνα με την άσκηση το σημείο $P(0,1)$ ανήκει στις γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τους τύπους τους: $f(0)=0\cdot\eta\mu 0+\sigma\upsilon\nu 0+\alpha\cdot 0$ και $g(0)=\dfrac{0+1}{0^2+\beta}=\dfrac{1}{\beta}$ και $f(0)=g(0)=1$, οπότε $\dfrac{1}{\beta}=1\Leftrightarrow\beta=1$.
- Επειδή εφάπτονται στο σημείο P δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη, θα είναι $f'(0)=g'(0)$ (1). Είναι

$f'(x)=(x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\alpha x)=(x)'\cdot\eta\mu x+x\cdot(\eta\mu x)'-\eta\mu x+\alpha=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\alpha\Leftrightarrow f'(x)=x\sigma\upsilon\nu x+\alpha$ (2).

Επίσης

$$g'(x)=\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)'=\frac{(x+1)'\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}\quad(3)$$

Από τις (2), (3) και την (1): $0\cdot\sigma\upsilon\nu 0+\alpha=\dfrac{-0^2-2\cdot 0+1}{(0^2+1)^2}\Leftrightarrow\alpha=1$.

2.109 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ καθώς επίσης και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- **η Cg είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O(0,0)**
- **η κλίση της g στο 2 είναι $-\frac{2}{3}$.**
- $f(0)=-60g'(-2)$
- $f'(x)>f(x)$ **για κάθε** $x\geq 0$.

(*)Ονομάζουμε κλίση μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ σε κάποιο $x_0\in A$ την κλίση της εφαπτομένης του διαγράμματός της στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$.

i) Να δείξετε ότι $f(0)=40$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1974e^{-x}}{f(x)e^{-x}-40}$

ΛΥΣΗ

i)Σύμφωνα με τα δεδομένα, κλίση της g στο 2 είναι η $g'(2)$. Ζητούμε την $g'(-2)$ και από υπόθεση $g'(2)=-\dfrac{2}{3}$.

- Η Cg είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O(0,0), άρα είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ οπότε $g(-x)=-g(x)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}\overset{(2)}{=}\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-g(-x)-[-g(2)]}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-[g(-x)-g(2)]}{x+2}$. Θέτουμε το $-x=y$, οπότε όταν $x\to-2$ το $y\to 2$. Άρα

$$\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}\overset{(2)}{=}\lim_{y\to2}\frac{-[g(y)-g(2)]}{-y+2}=\lim_{y\to2}\frac{g(y)-g(2)}{y-2}=g'(2).$$

Άρα $g'(-2)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(2)$, οπότε και $g'(-2)\overset{(1)}{=}-\dfrac{2}{3}$

Άρα $f(0)=-60g'(-2)=-60\left(-\dfrac{2}{3}\right)=40$

ii) $f'(x)>f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)>0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)+\left(e^{-x}\right)'f(x)>0\Leftrightarrow$

$\left(e^{-x}f(x)\right)'>0$ για κάθε $x\geq 0$.

Άρα η συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Έτσι

$x\geq 0\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)\geq e^{-0}f(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)\geq 40\Leftrightarrow f(x)\geq 40e^{x}>0\quad(1)$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ όμως από υπόθεση $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\geq 0$ οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

iii) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1974e^{-x}}{f(x)e^{-x}-40}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1974e^{-x}}{e^{-x}(f(x)-40e^{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1974}{f(x)-40e^{x}}=+\infty$

Διότι από (1) όταν $x>0$ ισχύει $f(x)-40e^{x}>0$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)-40e^{x}\right)=0$

2.110 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{5}{x+3}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ σχηματίζει με την ευθεία $x=-3$ και τον άξονα x'x τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν.

ΛΥΣΗ

- Η f έχει πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{-3\}$.
- Για κάθε $x_0\in A$ η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο τυχαίο σημείο της $M(x_0,f(x_0))$ είναι η: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ (1). Αλλά

$f'(x)=\frac{5'\cdot(x+3)-5\cdot(x+3)'}{(x+3)^2}=-\frac{5}{(x+3)^2}$. Έτσι η (1) γράφεται:

$y-\frac{5}{x_0+3}=\frac{-5}{(x_0+3)^2}\cdot(x-x_0)$ (2).

- Το κοινό σημείο Β της εφαπτομένης στο Μ με τον x'x έχει $y=0$, και από τη (2) είναι:

$-\frac{5}{x_0+3}=\frac{-5\cdot(x-x_0)}{(x_0+3)^2}$ και διαιρώντας με $-\frac{5}{x_0+3}$

είναι: $1=\frac{x-x_0}{x_0+3}\Leftrightarrow x-x_0=x_0+3\Leftrightarrow x=2x_0+3$, άρα $B(2x_0+3,\ 0)$.

- Η κατακόρυφη ευθεία $x=-3$ τέμνει τον x'x άρα $A(-3,0)$.
- Το κοινό σημείο Γ της ευθείας $x=-3$ με την εφαπτομένη στο Μ θα λυθεί από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x=-3 \\ y-\frac{5}{x_0+3}=\frac{-5}{(x_0+3)^2}\cdot(x-x_0) \end{cases}$$ άρα

$$y-\frac{5}{x_0+3}=\frac{-5}{(x_0+3)^2}\cdot(-3-x_0)\Leftrightarrow y=\frac{5}{x_0+3}+\frac{-5\cdot(-3-x_0)}{(x_0+3)^2}=\frac{5}{x_0+3}+\frac{5}{x_0+3}=\frac{10}{x_0+3}$$, άρα

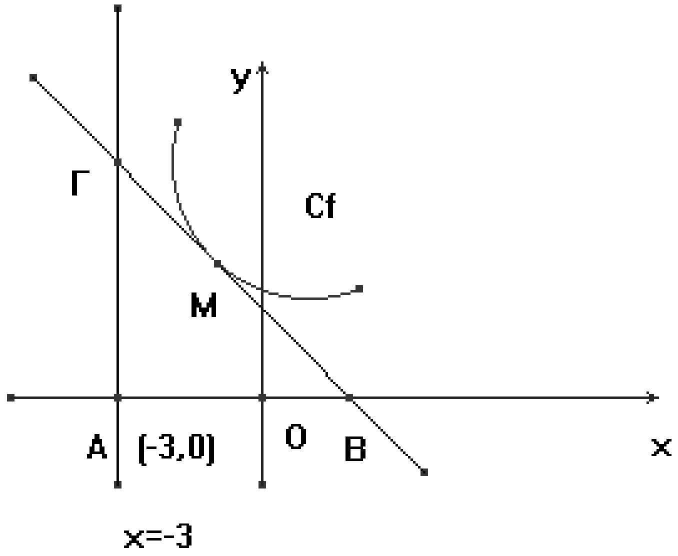
$\Gamma\left(-3,\frac{10}{x_0+3}\right)$.

- Το ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ θα έχει εμβαδόν: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$.

Αλλά $\overrightarrow{AB}=(2x_0+3+3,0)=(2x_0+6,0)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(-3+3,\frac{10}{x_0+3}\right)=\left(0,\frac{10}{x_0+3}\right)$, οπότε:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2x_0+6 & 0\\ 0 & \frac{10}{x_0+3}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(2x_0+6)\cdot\frac{10}{x_0+3}-0\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|2(x_0+3)\cdot\frac{10}{x_0+3}\right|=\frac{1}{2}\cdot 20$$. Άρα

$(AB\Gamma)=10$ τ.μ. σταθερό.



2.111 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ δείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

ΛΥΣΗ

- Από τη μορφή της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε υποπτευόμαστε ότι πρέπει να εφαρμόσουμε για την f δύο φορές το Θ. Μ. Τ. σε υποδιαστήματα του $[\alpha,\beta]$. Ο αριθμητικός μέσος $\frac{\alpha+\beta}{2}$ των α, β χωρίζει το διάστημα αυτό σε δύο ισομήκη υποδιαστήματα που είναι τα πιο πιθανά.
- Η f συνεχής στο $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\subseteq[\alpha,\beta]$ λόγω της υπόθεσης.
- Η f παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\subseteq(\alpha,\beta)$ λόγω της υπόθεσης.

Άρα από Θ. Μ. Τ. υπάρχει $x_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)=f'(x_1)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)=f'(x_1)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\qquad(1)$$

Με όμοιο τρόπο από θεώρημα Θ. Μ. Τ. στο διάστημα $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ παίρνουμε:

$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f'(x_2)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}$ (2) για κάποιο $x_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$. Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) παίρνουμε: $f(\beta)-f(\alpha)=\left[f'(x_1)+f'(x_2)\right]\frac{\beta-\alpha}{2}$ και αφού $f(\beta)=f(\alpha)$ και $\beta\neq\alpha$ παίρνουμε: $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

2.112 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν είναι $g(\alpha)-g(\beta)=\ln\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}=g'(x_0)$.

ΛΥΣΗ

- Έχουμε

$$g(\alpha)-g(\beta)=\ln\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\Leftrightarrow g(\alpha)-g(\beta)=\ln f(\alpha)-\ln f(\beta)\Leftrightarrow g(\alpha)-\ln f(\alpha)=g(\beta)-\ln f(\beta)$$

(1)

- Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x)=g(x)-\ln f(x), x\in[\alpha,\beta]$. Η συνάρτηση $\ln f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως σύνθεση της $f(x)$ και $\ln x$ που είναι συνεχείς στο διάστημα αυτό. Επομένως:

i) Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $g(x)$ και $\ln f(x)$.

ii) Η h παραγωγίσιμη στο (α,β) ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(x)$ και $\ln f(x)$.

iii) $h(\alpha)=g(\alpha)-\ln f(\alpha)\overset{(1)}{=}g(\beta)-\ln f(\beta)=h(\beta)$. Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0$. Αλλά $h'(x)=g'(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε:

$$h'(x_0)=0\Leftrightarrow g'(x_0)-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}=0\Leftrightarrow g'(x_0)=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

2.113 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), μηδενίζεται στα α, β και μόνο σε αυτά. Θεωρούμε και τη συνάρτηση g με $g(x)=e^{-\kappa x}\cdot f(x)$ με $\kappa\in R$, Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in R$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\kappa$.

ΛΥΣΗ

Από υπόθεση $f(\alpha)=f(\beta)=0$, οπότε και $g(\alpha)=g(\beta)=0$. Αυτό μας οδηγεί στο να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle για τη g. Πραγματικά:

i) Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα αυτό $y=e^{-\kappa x}$ και f. (η $y=e^{-\kappa x}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών).

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $e^{-\kappa x}$ και f στο διάστημα αυτό.

iii) $g(\alpha)=g(\beta)=0$.

Επομένως από το θεώρημα Rolle για τη g υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$. Αλλά:

$$g'(x)=\left[e^{-\kappa x}\cdot f(x)\right]'=\left(e^{-\kappa x}\right)'\cdot f(x)+e^{-\kappa x}\cdot f'(x)=e^{-\kappa x}\cdot(-\kappa x)'\cdot f(x)+e^{-\kappa x}\cdot f'(x)=-\kappa e^{-\kappa x}\cdot f(x)+e^{-\kappa x}\cdot f'(x)$$

άρα $g'(x)=e^{-\kappa x}\cdot\left[f'(x)-\kappa f(x)\right]$.

Έτσι $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{-\kappa\xi}\cdot[f'(\xi)-\kappa f(\xi)]=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-\kappa f(\xi)=0$, αφού $e^{-\kappa\xi}\neq 0$.

Άρα $f'(\xi)=\kappa f(\xi)$. Λόγω όμως υπόθεσης είναι μόνο $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και αφού $\xi\neq\alpha,\beta$ είναι $f(\xi)\neq 0$, οπότε από την τελευταία ισότητα είναι $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\kappa$.

2.114 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Θεωρούμε και μια συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $f(x)\cdot g(x)=\eta\mu x$.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η g ορίζεται στο διάστημα $[0,\pi]$ και ότι γι' αυτή ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα αυτό.

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\sigma\varphi\xi$.

ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, άρα από $f(x)\cdot g(x)=\eta\mu x$ παίρνουμε $g(x)=\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ άρα η g ορίζεται στο διάστημα αυτό.

- Η g είναι συνεχής στο διάστημα αυτό ως πηλίκο των συνεχών στο $[0,\pi]$ συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $f(x)$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων ($\eta\mu x$ και $f(x)$).
- $g(0)=\dfrac{\eta\mu 0}{f(0)}=0$ και $g(\pi)=\dfrac{\eta\mu\pi}{f(\pi)}=\dfrac{0}{f(\pi)}=0$. Άρα $g(0)=g(\pi)$. Παρατηρούμε ότι η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0.\pi]$.

β) Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$. Αλλά

$$g'(x)=\left[\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right]'=\frac{(\eta\mu x)'\cdot f(x)-\eta\mu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)-\eta\mu x\cdot f'(x)}{f^2(x)}.$$ Έτσι

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu\xi\cdot f(\xi)-\eta\mu\xi\cdot f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi\cdot f(\xi)=\eta\mu\xi\cdot f'(\xi)$. Όμως $\xi\in(0,\pi)$ οπότε $f(\xi)\neq 0$ και $\eta\mu\xi\neq 0$, άρα $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu\xi}=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}$ και έτσι $\sigma\varphi\xi=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}$ με $\xi\in(0,\pi)$.

2.115 Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ τέτοια ώστε $f(1)=f(0)+\mu$ και $f'(1)=f'(0)=\mu$ με $\mu\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν διακεκριμένα (δηλαδή διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε $f''(x_1)=f''(x_2)$.

ΛΥΣΗ

- Η f ως παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ είναι και συνεχής.
- Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Άρα από το Θ. Μ. Τ. υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(0)+\mu-f(0)}{1}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\mu \quad (1).$$

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως παραγωγίσιμη.
- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Επομένως η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[0,\xi_1]$ και $[\xi_1,1]$. Επειδή ακόμη ισχύουν: $f'(0)=f'(\xi_1)\overset{(1)}{=}\mu$ και $f'(\xi_1)\overset{(1)}{=}\mu=f'(1)$ ισχύει το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[0,\xi_1]$, $[\xi_1,1]$. Άρα υπάρχουν $x_1\in(0,\xi_1)$, $x_2\in(\xi_1,1)$ τέτοια ώστε $f''(x_1)=0$ και $f''(x_2)=0$. Δηλαδή $f''(x_1)=f''(x_2)$ με $x_1\neq x_2$ και $x_1,x_2\in(0,1)$.

2.116 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2]$ και ισχύει $f(2)=2f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(1,2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση (C) της f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ με $x\in[1,2]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $g(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)$ και $g(2)=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{2f(1)}{2}=f(1)$, άρα $g(1)=g(2)$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει το θεώρημα Rolle για τη g άρα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$.

Αλλά $g'(x)=\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$, οπότε

$$g'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x_0)\cdot x_0-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x_0-f(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}\text{ αφού } x_0\neq 0$$

β) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι:

$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ (1).

Για να διέρχεται η εφαπτομένη αυτή από την αρχή των αξόνων θα πρέπει το $(0,0)$ να επαληθεύει την (1), δηλαδή

$0-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(0-x_0)\Leftrightarrow -f(x_0)=-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$ αφού $x_0\neq 0$ επειδή $x_0\in(1,2)$. Αλλά τέτοιο x_0 υπάρχει και είναι εκείνο που προσδιορίσαμε στο ερώτημα (α).

2.117 Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ ισχύουν:
$f'(x^2)=4x^2+5$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=8$. Να βρείτε τον τύπο της f.

ΛΥΣΗ

Το $x\neq 0$ αφού $x>0$. Έτσι η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\frac{\left[f\left(x^2\right)\right]'}{2x}=4x^2+5\Leftrightarrow\left[f\left(x^2\right)\right]'=2x\left(4x^2+5\right)\Leftrightarrow$$

$$\left[f\left(x^2\right)\right]'=8x^3+10x=\left(8\cdot\frac{x^4}{4}+10\cdot\frac{x^2}{2}\right)'\Leftrightarrow\left[f\left(x^2\right)\right]'=\left(2x^4+5x^2\right)'$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c\in R$ τέτοια ώστε $f\left(x^2\right)=2x^4+5x^2+c$ (1).

Θέτουμε $x^2=\omega,\omega>0$ και η (1) γίνεται $f(\omega)=2\omega^2+5\omega+c$ (2).

Για $\omega=1$ είναι $f(1)=2\cdot1^2+5\cdot1+c$ και από υπόθεση: $8=2+5+c\Leftrightarrow 8-2-5=c\Leftrightarrow c=1$.

Έτσι από τη (2): $f(\omega)=2\omega^2+5\omega+1,\ \omega>0$ και ισοδύναμα $f(x)=2x^2+5x+1,\ x>0$.

2.118 Για μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει: $xf'(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=f^2(x)+f^2\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

β) Αν $f(1)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu3x}{x}$, να βρείτε τον τύπο της g.

ΛΥΣΗ

α)

- Η συνάρτηση $f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση της παραγωγίσιμης συνάρτησης $\frac{1}{x}$ με την f. Άρα η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ αφού αποτελείται από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για να είναι σταθερή αρκεί να έχει παράγωγο μηδέν. Είναι:

$$g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=2f(x)\cdot f'(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\text{ άρα}$$

$$g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\quad(1)$$

- Από υπόθεση: $xf'(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=xf'(x)$ και από την (1):

$$g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)-2xf'(x)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}=2f'(x)\cdot\left[f(x)-\frac{1}{x}\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]\quad(2).$$

Η σχέση $xf'(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ισχύει για κάθε x στο $(0,+\infty)$ άρα θα ισχύει και αν θέσουμε αντί x το $\frac{1}{x}$, οπότε: $\frac{1}{x}\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=0$, οπότε από τη (2): $g'(x)=2f'(x)\cdot0=0$ άρα η g σταθερή στο $(0,+\infty)$. Συνεπώς υπάρχει σταθερά c έτσι ώστε: $g(x)=c,\ c\geq 0$ αφού $f^2(x)+f^2\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0$.

β)

- Για να βρούμε τον τύπο της g αρκεί να βρούμε το c.

Είναι $g(x)=f^2(x)+f^2\left(\frac{1}{x}\right)=c$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα θα ισχύει και $x=1$. Τότε $f^2(1)+f^2\left(\frac{1}{1}\right)=c \Leftrightarrow 2f^2(1)=c$ (3).

- Όμως $f(1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\eta\mu 3x}{3x}\right)=3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\cdot 1=3$. (Θέτουμε $3x=u$. Όταν

$x\to 0,\ u\to 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$). Έτσι από την (3): $2\cdot 3^2=c\Leftrightarrow c=18$. Και τελικά $g(x)=18,\ x\in(0,+\infty)$.

2.119 Η τιμή $f(t)$ ενός προϊόντος συναρτήσει του χρόνου $t\in[0,3]$ είναι ίση με το διπλάσιο του ρυθμού μεταβολής της ως προς το χρόνο. Αν η αρχική τιμή του προϊόντος είναι 5€ τότε:

α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος θα τριπλασιαστεί σε σχέση με την αρχική τιμή.

γ) Δείξτε ότι σε κάποια χρονική στιγμή η αξία του προϊόντος θα είναι 11€ (δίνεται $e\approx 2{,}7$).

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $f(t)=2f'(t)\Leftrightarrow\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{1}{2}$ [η τιμή του προϊόντος είναι $f(t)\neq 0$] άρα $\left[\ln f(t)\right]'=\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)'\Leftrightarrow \ln f(t)=\frac{1}{2}t+c\Leftrightarrow f(t)=e^{\frac{1}{2}t+c}$ (1) με $c\in R$ σταθερά.

Αλλά η αρχική τιμή του προϊόντος είναι 5 δηλαδή $f(0)=5$ και από (1):

$f(0)=5=e^{\frac{1}{2}0+c}\Leftrightarrow e^c=5$, οπότε $f(t)\overset{(1)}{=}e^c\cdot e^{\frac{1}{2}t}\Leftrightarrow f(t)=5\cdot e^{\frac{1}{2}t},\ t\in[0,3]$.

β) Η τιμή του προϊόντος θα τριπλασιαστεί τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία

$f(t_0)=3f(0)\Leftrightarrow 5\cdot e^{\frac{t_0}{2}}=3\cdot 5\Leftrightarrow e^{\frac{t_0}{2}}=3\Leftrightarrow \ln e^{\frac{t_0}{2}}=\ln 3\Leftrightarrow\frac{t_0}{2}=\ln 3\Leftrightarrow t_0=2\ln 3$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ ως σύνθεση των συνεχών $\frac{t}{2}$ με την $5e^t$. Επειδή $f(0)=5$ και $f(3)=5\cdot e^{\frac{3}{2}}$ είναι $f(0)\neq f(3)$ άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η f θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ $f(0)=5$ και $f(3)=5\cdot e^{\frac{3}{2}}=5\cdot\sqrt{e^3}=5e\sqrt{e}$.

Αλλά $5e\sqrt{e}\approx 5\cdot 2{,}7\cdot\sqrt{2{,}7}>11$. Δηλαδή υπάρχει $t_1\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f(t_1)=11$€.

2.120 Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:
i) Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.
ii) Για κάθε x ισχύει $f''(x)=g''(x)$.
iii) $f(0)=g(0)$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x\in R$ να ισχύει $f(x)-g(x)=cx$.

β. Αν ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<0<\rho_2$ είναι ρίζες της f, τότε η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

ΛΥΣΗ

α). Έχουμε $f''(x)=g''(x)\Leftrightarrow f''(x)-g''(x)=0\Leftrightarrow (f''-g'')(x)=0\Leftrightarrow (f-g)''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $(f-g)'$ είναι σταθερή συνάρτηση στο R συνεπώς ισχύει $(f-g)'(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και c, σταθερά.

Επειδή $(cx+c_1)'=c$ παίρνουμε ότι: $(f-g)(x)=(cx+c_1)$ (1) με c,c_1 σταθερές και $x\in\mathbb{R}$.
Από την (1): $f(x)-g(x)=cx+c_1$ (2) και για $x=0$ είναι $f(0)-g(0)=c0+c_1$ και λόγω υπόθεσης είναι $c_1=0$. Από τη (2): $f(x)-g(x)=cx,\ x\in\mathbb{R}$ (3).

β). Επειδή ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της f έχουμε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$. Από την (3)

$$\left.\begin{aligned}f(\rho_1)-g(\rho_1)=c\cdot\rho_1\\ f(\rho_2)-g(\rho_2)=c\cdot\rho_2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}0-g(\rho_1)=c\cdot\rho_1\\ 0-g(\rho_2)=c\cdot\rho_2\end{aligned}\right\}\ \text{Πολλαπλασιάζουμε:}$$

$g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=c^2\cdot\rho_1\rho_2$. Αλλά $\rho_1<0<\rho_2$ άρα $\rho_1\rho_2<0\Rightarrow g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)\le 0$. Η g ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής. Έτσι:

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\text{Η g συνεχης στο }[\rho_1,\rho_2]\\ &\bullet\text{Το }g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)\le 0\end{aligned}\right\}\ \text{Επομένως:}$$

i) Αν $g(\rho_1)=0$ ή $g(\rho_2)=0$ τότε $x_0=\rho_1$ ή $x_0=\rho_2$ είναι ρίζες της g στο $[\rho_1,\rho_2]$.
ii) Αν $g(\rho_1)\cdot g(\rho_1)\neq 0$ τότε $g(\rho_1)\cdot g(\rho_1)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).
Τελικά η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$.

2.121 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(1)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και από υπόθεση $f'(1)=0$.
Έτσι :

- για $x<1$ είναι $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$, άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και
- για $x>1$ είναι $f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

2.122 Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $f(0)=0$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h με $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και $h'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$ (1). Χρειαζόμαστε το πρόσημο της παράστασης $f'(x)\cdot x-f(x)$.
- Για τυχαίο $x>0$ έχουμε:

i) Η f συνεχής στο $[0,x]\subseteq[0,+\infty)$.

ii) Η f παραγωγίσιμη στο $(0,x)\subseteq(0,+\infty)$.

Από Θ. Μ. Τ. υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-0}{x}=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)}{x}$ (2).

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα $(0,+\infty)$. Έτσι αφού $\xi<x$ είναι $f'(\xi)<f'(x)$ και από τη (2):

$\frac{f(x)}{x}<f'(x)\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}f(x)<xf'(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>0$. Τώρα από την (1): $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

2.123 Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=g(\alpha)$. Αν είναι $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ δείξτε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

ΛΥΣΗ

- Θεωρούμε τη συνάρτηση F με $F(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η F συνεχής και παραγωγίσιμη

στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο διάστημα αυτό. Προφανώς $F'(x)=f'(x)-g'(x)$, για καθε $x\in[\alpha,\beta]$.

- Λόγω της υπόθεσης είναι $F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=g(\alpha)-g(\alpha)$, άρα $F(\alpha)=0$ (1). Επίσης αφού

$f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)>0\Leftrightarrow F'(x)>0$ για καθε $x\in(\alpha,\beta)$ οπότε η F γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Συνεπώς για κάθε x με $\alpha<x<\beta$ είναι

$F(\alpha)<F(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}0<f(x)-g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

2.124 Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, της οποίας η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,2)$.

ΛΥΣΗ

- Είναι $f'(x)>x\Leftrightarrow f'(x)-x>0\Leftrightarrow\left[f(x)-\frac{x^2}{2}\right]'>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ (1). Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-x$, όμως από υπόθεση είναι $f'(x)>x\Leftrightarrow f'(x)-x>0$ άρα $g'(x)>0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι αφού $-2<0<2$ είναι

$g(-2)<g(0)<g(2) \Leftrightarrow f(-2)-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2<f(0)-\frac{1}{2}\cdot 0^2<f(2)-\frac{1}{2}\cdot 2^2 \Leftrightarrow f(-2)-2<0<f(2)-2$

(2) αφού $f(0)=0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x)=f(x)-2,\ x\in[-2,2]$.

  i) Η h συνεχής στο $[-2,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

  ii) $h(-2)\cdot h(2)=[f(-2)-2]\cdot[f(2)-2]<0$ λόγω της (2) οπότε από το θεώρημα Bolzano

υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της h στο $(-2,2)$ π.χ. η ξ

οπότε $h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)-2=0 \Leftrightarrow f(\xi)=2$, δηλαδή η $f(x)=2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,2)$.

2.125 Οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $[0,\alpha]$ και είναι τρεις φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα αυτό. Αν ισχύουν:

$f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$, $f''(0)=g''(0)$ και $f^{(3)}(x)>g^{(3)}(x)$ **για κάθε** $x\in(0,\alpha)$ **δείξτε ότι** $f(x)>g(x)$ **για κάθε** $x\in(0,\alpha)$.

ΛΥΣΗ

- Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,\alpha]$. Για κάθε $x\in(0,\alpha)$ είναι:

$h'(x)=f'(x)-g'(x) \qquad h''(x)=f''(x)-g''(x) \qquad h^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)-g^{(3)}(x)$

- Από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x)>g^{(3)}(x) \Leftrightarrow f^{(3)}(x)-g^{(3)}(x)>0 \Leftrightarrow h^{(3)}(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\alpha)$ και η h'' συνεχής στο $[0,\alpha]$, άρα η h'' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$ οπότε για $0<x<\alpha$ είναι $h''(0)<h''(x)<h''(\alpha)$. Αλλά $h''(0)=f''(0)-g''(0)=0$ (υπόθεση) και έτσι $0<h''(x),\ x\in(0,\alpha)$.
- Επειδή $h''(x)>0,\ x\in(0,\alpha)$ και η h' συνεχής στο $[0,\alpha]$, η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$ άρα για $0<x<\alpha$ είναι $h'(0)<h'(x)<h'(\alpha)$. Αλλά $h'(0)=f'(0)-g'(0)$ (υπόθεση) και έτσι $0<h'(x)<h'(\alpha), x\in(0,\alpha)$.
- Επειδή $h'(x)>0,\ x\in(0,\alpha)$ και η h συνεχής στο $[0,\alpha]$, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$ άρα για $0<x<\alpha$ είναι

$h(0)<h(x)<h(\alpha)$ και $h(0)=f(0)-g(0)=0$ (υπόθεση).

Τελικά $h(x)>0,\ x\in(0,\alpha)$, δηλαδή $f(x)-g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>g(x),\ x\in(0,\alpha)$.

2.126 Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

i) $f'(x)<f''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $f'(0)=f(0)=0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $f'(x)<f(x)$ για καθε $x\in(-\infty,0)$

β. $f'(x)>f(x)$ για καθε $x\in(0,+\infty)$

γ. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση g με $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ για $x\in\mathbb{R}^*$

ΛΥΣΗ

α. Είναι $f'(x)-f''(x)<0 \Leftrightarrow [f(x)-f'(x)]'<0$ (1).

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση h με $h(x)=f(x)-f'(x), x\in\mathbb{R}$. Επειδή υπάρχει στο $\mathbb{R}$ η f'' οι συναρτήσεις f, f' παραγωγίζονται και είναι συνεχείς, άρα υπάρχει η παράγωγος της h και είναι $h'(x)=f'(x)-f''(x)$ οπότε λόγω της (1): $h'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Μάλιστα λόγω υπόθεσης είναι $h(0)=f(0)-f'(0)=0-0\Leftrightarrow h(0)=0$ (2).

- Για $x\in(-\infty,0)$ είναι $x<0$ και h γνησίως φθίνουσα άρα

$h(x)>h(0)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}h(x)>0\Leftrightarrow f(x)-f'(x)>0$, άρα $f'(x)<f(x), x\in(-\infty,0)$ (3).

β. Για $x\in(0,+\infty)$ ομοίως είναι $x>0$ και h γνησίως φθίνουσα, άρα

$h(x)<h(0)\Leftrightarrow h(x)<0\Leftrightarrow f(x)-f'(x)<0$, άρα $f'(x)>f(x), x\in(0,+\infty)$ (4).

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$h'(x)$	-	-
$h(x)$	γν. φθιν.	γν. φθιν.

γ. Έχουμε

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^x\text{-}f(x)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)\cdot e^x\text{-}f(x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x[f'(x)\text{-}f(x)]}{(e^x)^2}\Leftrightarrow g'(x)=\frac{f'(x)\text{-}f(x)}{e^x}\quad (5).$$

- Για $x<0$ λόγω της (3) είναι $f'(x)<f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)<0$ και από την (5) είναι $g'(x)<0$ άρα

g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

- Για $x>0$ λόγω της (4) είναι $f'(x)>f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0\overset{(5)}{\Leftrightarrow}g'(x)>0$ άρα g είναι γνησίως

αύξουσα στο $(0,+\infty)$ (προφανώς $e^x>0$).

2.127 Α. Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποια ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $g(g'(x))+g(x)=0$ **,για κάθε** $x>0$ **(1)**
- $g'(x)>0,$ **,για κάθε** $x>0$ **(2)**
- $g(1)=0$ **,για κάθε** $x>0$ **(3)**

i) Να βρειτε το $g'(1)$

ii) Να αποδειξετε ότι $g'(g'(x))=x$ **,για κάθε** $x>0$

iii) Να αποδειξετε ότι $g(x)=\ln x, x>0$

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=g(x)+x-1$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να εξεταστεί αν αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $x+\ln x=1$.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $\ln(x^2+x)+x^2+x<\ln(3-x)+3-x$.

iv) Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της f.

ΛΥΣΗ

Α i) Από την σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Από την σχέση (1) που ισχύει για κάθε $x>0$ θα ισχύει και για $x=1$

$$g(g'(1))+g(1)=0\overset{(3)}{\Rightarrow}g(g'(1))=0\overset{(3)}{\Rightarrow}g(g'(1))=g(1)\overset{g\,1-1}{\Rightarrow}g'(1)=1$$

ii) Από την σχέση (1) θα θέσουμε όπου x το $g'(x)$ και θα έχουμε:

$$g(g'(g'(x)))+g(g'(x))=0 \overset{g(g'(x))+g(x)=0\Leftrightarrow g(g'(x))=-g(x)}{\Leftrightarrow} g(g'(g'(x)))-g(x)=0 \Leftrightarrow g(g'(g'(x)))=g(x) \overset{g\ 1-1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{g\ 1-1}{\Rightarrow} g'(g'(x))=x \quad \text{για κάθε } x>0$$

iii) Η συνάρτηση g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g′ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε και η συνάρτηση $g(g'(x))$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) :

$$\left(g(g'(x))+g(x)\right)'=0 \Rightarrow g'(g'(x))g''(x)+g'(x)=0 \overset{g'(g'(x))=x}{\Rightarrow} xg''(x)+g'(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(g'(x)\right)'+x'g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(xg'(x)\right)'=0 \Rightarrow xg'(x)=c, x\in\left(0,+\infty\right), c\in\mathbb{R} \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά ,για x=1 η παραπάνω γίνεται

$$1g'(1)=c \Leftrightarrow c=1$$

Οπότε η σχέση (4) γίνεται

$$xg'(x)=1, x\in\left(0,+\infty\right)$$

Έχουμε: $xg'(x)=1 \overset{x\in(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} g'(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow g'(x)=\left(\ln x\right)', x\in\left(0,+\infty\right)$ αρα

$$g(x)=\ln x+c', x\in\left(0,+\infty\right), c'\in\mathbb{R}$$

Αλλά ,για x=1 η παραπάνω γίνεται

$$g(1)=\ln 1+c' \Leftrightarrow c'=0$$

Τελικά $g(x)=\ln x, x>0$

B i)

- Επειδή ο $\ln x$ ορίζεται μόνο για $x>0$ η f έχει πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α και $f'(x)=(\ln x+x-1)' \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$ (1). Επειδή $x>0$ είναι

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο Α. Η f ως γνησίως μονότονη είναι «1 – 1» άρα αντιστρέφεται.

ii)

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A=(0,+\infty)$, άρα σύνολο τιμών

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+x-1)=-\infty$ επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(-x+1)=1$. Επίσης αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα $f(A)=(-\infty,+\infty)$, δηλαδή $f(A)=\mathbb{R}$.

- Είναι $x+\ln x=1 \Leftrightarrow \ln x+x-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$. Μια προφανής ρίζα της f είναι η $x=1$ επειδή

$f(1)=\ln 1+1-1=0$. Η f έχει μία ρίζα την $x=1$ και είναι γνησίως μονότονη στο Α άρα δεν έχει άλλη ρίζα. Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x+\ln x=1$ έχει μοναδική ρίζα τη $x=1$.

iii) Η ανίσωση ορίζεται για ($x^2+x>0$ και $3-x>0$) δηλ για ($x<-1$ ή $x>0$ και $x<3$) άρα τελικα για $x\in(-\infty,-1)\cup(0,3)$.Τότε είναι:

$\ln\left(x^2+x\right)+x^2+x<\ln(3-x)+3-x \Leftrightarrow \ln\left(x^2+x\right)+\left(x^2+x\right)-1<\ln(3-x)+(3-x)-1$

$\Leftrightarrow f\left(x^2+x\right)<f(3-x)$, f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και 1-1.

$\Leftrightarrow x^2+x<3-x \Leftrightarrow x^2+2x-3<0$. Έχει ρίζες -3 και 1 άρα επαληθεύεται για $-3<x<1$.
Όμως και $x\in(-\infty,-1)\cup(0,3)$, άρα $x\in(-3,-1)\cup(0,1)$.

iv. Λόγω της (1): $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$. Αφού $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και f′ συνεχής (ως παραγωγίσιμη), θα είναι f′ γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $f^{(3)}(x)=\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)'=\dfrac{2}{x^3}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και f′′ συνεχής, άρα f′′ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

2.128 Υποθέτουμε ότι το κόστος $K(x)$ σε € για την παραγωγή x χιλιάδων μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)=0,1+2x$ και η τιμή πώλησης της μονάδος είναι $M(x)=4-e\cdot x$€.
α. Ποιο επίπεδο παραγωγής μεγιστοποιεί το κέρδος;
β. Ποια είναι τότε η τιμή πώλησης της μονάδος;
γ. Ποιο είναι το κέρδος γι' αυτό το επίπεδο παραγωγής;
δ. Αν η κυβέρνηση φορολογήσει το κάθε κομμάτι που πωλείται με t €, να σχολιάσετε τη διαφορά της αρχικής τιμής πώλησης και εκείνης που θα διαμορφωθεί μετά την επιβολή του φόρου.
ΛΥΣΗ
α. Έστω $P(x)$ η συνάρτηση κέρδους και $E(x)$ η συνάρτηση εσόδων. Τότε:
$P(x)=E(x)-K(x)$ (1)
Αλλά έσοδα = (πλήθος μονάδων) * (τιμή μονάδος) άρα
$E(x)=x\cdot M(x)=x\cdot(4-ex)=4x-ex^2 \Leftrightarrow E(x)=4x-e\cdot x^2$ (2).
$P(x)=4x-ex^2-(0,1+2x)=4x-ex^2-0,1-2x \Leftrightarrow P(x)=-ex^2+2x-0,1$ (3).
Αρκεί να βρούμε το μέγιστο της $P(x)$. Η $P(x)$ ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη και $P'(x)=-2ex+2$. Έστω $P'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -2ex+2\geq 0 \Leftrightarrow -2ex\geq -2 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{1}{e}$. Έτσι σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της $P(x)$ από όπου συμπεραίνουμε ότι η παραγωγή $x=\dfrac{1}{e}$ χιλιάδων μονάδων μεγιστοποιεί το κέρδος.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$P'(x)$		+	-
$P(x)$		γν. αυξ.	γν. φθιν.

β. Είναι τότε $M\left(\dfrac{1}{e}\right)=4-e\cdot\dfrac{1}{e}$, άρα $M\left(\dfrac{1}{e}\right)=3$€ τιμή πώλησης της μονάδος.

γ. Από τη συνάρτηση κέρδους (3):

$$P\left(\frac{1}{e}\right)=-e\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^2+2\cdot\frac{1}{e}-0,1=-\frac{e}{e^2}+\frac{2}{e}-0,1=-\frac{1}{e}+\frac{2}{e}-0,1\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-0,1 \text{ ή}$$

$$P\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0,37-0,1\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0,27€ .$$

δ. Αν το κάθε κομμάτι φορολογηθεί με t €, τότε ο φόρος που αντιστοιχεί με x κομμάτια είναι tx και η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$\Pi(x)=E(x)-K(x)-tx\overset{(2)}{=}4x-ex^2-(0,1+2x)-tx=4x-ex^2-0,1-2x-tx\Leftrightarrow\Pi(x)=-ex^2+(2-t)x-0,1$$

Άρα $\Pi'(x)=-2ex+(2-t)$.

Έστω $\Pi'(x)\geq 0\Leftrightarrow -2ex+(2-t)\geq 0\Leftrightarrow -2ex\geq-(2-t)\Leftrightarrow x\leq\dfrac{2-t}{2e}$.

Τώρα η τιμή πώλησης της μονάδος που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι

$$M\left(\frac{2-t}{2e}\right)=4-e\frac{2-t}{2e}=4-\frac{2-t}{2}=\frac{8-2+t}{2}=3+\frac{t}{2}\Leftrightarrow M\left(\frac{2-t}{2e}\right)=3+\frac{t}{2} .$$

Άρα η τιμή πώλησης της μονάδος είναι αυξημένη κατά $\dfrac{t}{2}$ από αυτή της αρχικής.

«Δεν λυνονται όλα με Θ.Μ.Τ. Παραδείγματος χάρην, τα κορδόνια«

Κορνήλιος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

2.129 Δίνεται ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy και το ορθογώνιο στο Α τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $\Gamma(-4,0)$, το Α είναι σημείο του x'x με $x\in[0,4]$ και την κορυφή Β να ανήκει στην παραβολή $f(x)=-x^2+4x$.

α. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του Β όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μέγιστο;

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ (με μεταβλητή το x) όταν το Β βρίσκεται στην κορυφή Κ της παραβολής.

ΛΥΣΗ

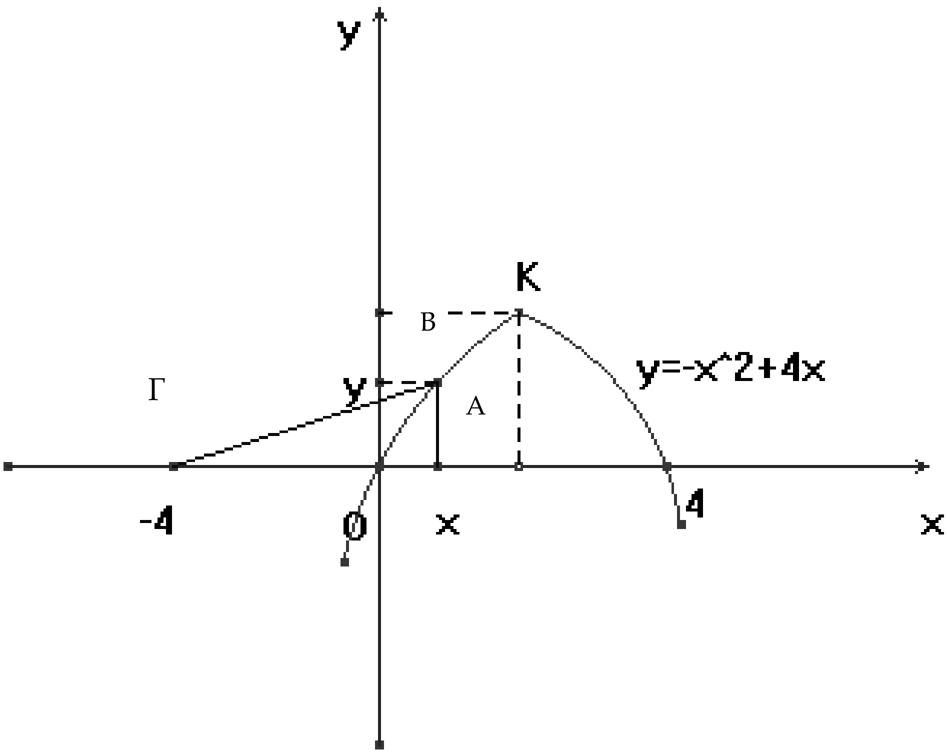
α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$ (1).

Αλλά $A(x,0)$, $B\left(x,4x-x^2\right)$ και $\Gamma(-4,0)$, οπότε

$\overrightarrow{AB}=\left(x\text{-}x,4x\text{-}x^2\text{-}0\right)=\left(0,4x\text{-}x^2\right)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\text{-}4\text{-}x,0)$, οπότε από την (1):

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & 4x-x^2\\ -4-x & 0\end{vmatrix}\right|=\left|-\frac{1}{2}(-4-x)\cdot\left(4x-x^2\right)\right|=\left|\frac{1}{2}(4+x)\cdot x(4-x)\right|$ και αφού

$0\le x\le 4$ είναι $x\ge 0$, $x+4>0$ και $4-x\ge 0$, άρα $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}x\cdot\left(16-x^2\right)$.



Θέτουμε (ΑΒΓ) = Ε(x) οπότε: $E(x)=\frac{1}{2}x\cdot\left(16-x^2\right)$, $0\le x\le 4$ (2).

- Θα βρούμε το μέγιστο της $E(x)$. Για $0<x<4$ η $E(x)$ παραγωγίσιμη με

$E'(x)=\left(8x-\frac{x^3}{2}\right)'=8-\frac{3x^2}{2}$ (3). Έστω

$E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 8-\frac{3x^2}{2}\geq 0 \Leftrightarrow 16-3x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq\frac{16}{3}\Leftrightarrow |x|\leq\sqrt{\frac{16}{3}}\Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Αλλά $x>0$ οπότε $0<x\leq\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Από τον πίνακα μεταβολών βλέπουμε ότι στο $(0,4)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x_B=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Αλλά η $E(x)$ ορίζεται στο $[0,4]$. Άρα πρέπει να εξετάσουμε τα ακρότατά της και στα άκρα 0 και 4. Για $x=0$ είναι $E(0)\overset{(2)}{=}0=E(4)$. Τελικά το $E(x)$ εμφανίζει ολικό μέγιστο στο $[0,4]$ για $x_B=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ και αφού $y_B=-x_B^2+4x_B$ είναι

$y_B=-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=-\frac{16}{3}+\frac{16\sqrt{3}}{3}=\frac{16}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$ άρα $B\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{16\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}\right)$.

x	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	4
$E'(x)$		+	-	
$E(x)$		γν. αυξ.	γν. φθ.	

β.

- Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι $E'(x)\overset{(2)}{=}8-\frac{3x^2}{2}$.
- Η κορυφή της παραβολής είναι το μέγιστό της. Αλλά $f'(x)=\left(-x^2+4x\right)=-2x+4$ και $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow -2x+4\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$. Η f λοιπόν έχει μέγιστο για

$x=2$ το $y=f(2)=-2^2+4\cdot 2\Leftrightarrow K(2,4)$. Στο σημείο αυτό ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου είναι: $E'(2)\overset{(3)}{=}8-\frac{3\cdot 2^2}{2}$, άρα $E'(2)=2\frac{\text{τ.μ.}}{\text{μοναδα χρονου}}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	γν. αυξ.		γν. φθιν.

2.130 Για μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δίνεται ότι:

α. Είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

β. Η f′ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

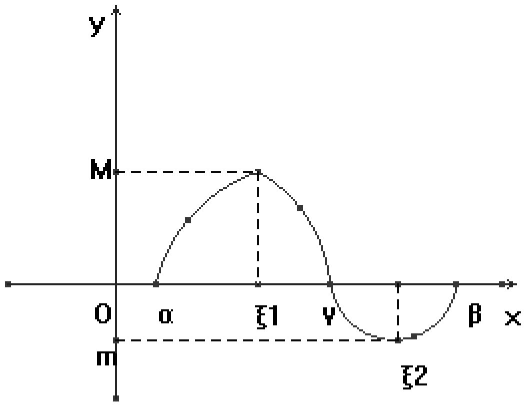
γ. Η C_f τέμνει τον x′x σε ένα ακριβώς σημείο του (α,β).

δ. Ισχύει: $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα δεδομένα η C_f θα έχει «ποιοτικά» τη γραφική παράσταση του σχήματος (ή την συμμετρική της ως προς τον x′x).



- Από τη υπόθεση είναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ άρα η f έχει τρεις ακριβώς ρίζες τι α, β, γ με

$\alpha<\gamma<\beta$. Η f ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ είναι και συνεχής.

- Η f συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ και δεν έχει σε αυτό άλλη ρίζα άρα διατηρεί πρόσημο. Ομοίως διατηρεί πρόσημο και στο $[\gamma,\beta]$. Μάλιστα αφού η C_f τέμνει τον x′x στο γ αν είναι $f(x)>0$ στο (α,γ), θα είναι $f(x)<0$ στο (γ,β), όπως δηλαδή στο σχήμα.
- Η f ως συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Άρα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$f(\xi_1)=M, f(\xi_2)=m$ και $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Μάλιστα αφού η f παίρνει αρνητικές τιμές θα είναι $f(\xi_1)=M>0$ και $f(\xi_2)=m<0$.

- Παρατηρούμε ότι:

i) Το ξ_1 εσωτερικό σημείο του (α,β).

ii) Η f παραγωγίσιμη στο ξ_1 (υπόθεση).

iii) Η f έχει ακρότατο στο ξ_1. Άρα από θεώρημα Fermat θα είναι $f'(\xi_1)=0$. Για τον ίδιο λόγο $f'(\xi_2)=0$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=f'(x)+f(x)$.

i) Η g συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

ii) $g(\xi_1)\cdot g(\xi_2)=[f'(\xi_1)+f(\xi_1)]\cdot[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=(0+M)\cdot(0+m)=Mm<0$. Άρα από θεώρημα

Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 = f'(\xi) + f(\xi)$, πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

2.131 Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} + 2$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

- Αρκεί να δείξουμε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- Είναι:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left[\frac{f(x)}{x} + 2\right]' = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)\cdot (x)'}{x^2} + 0 =$$

$$= \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{\left[\dfrac{f(x)}{x} + 2\right]x - f(x)}{x^2} = \frac{f(x) + 2x - f(x)}{x^2} = \frac{2x}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x}$$

Αλλά $x > 0$, οπότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα f κυρτή.

2.132 Μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάποιο $x_0 \in \Delta$ είναι $f''(x_0) = 0$ και $f^{(3)}(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Sigma(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f.

ΛΥΣΗ

Είναι $f^{(3)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x) - 0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x)}{x - x_0}$ (1)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α. $f^{(3)}(x_0) > 0$. Τότε από την (1): $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$.

Άρα για τα x «κοντά» στο x_0 είναι $\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ (2).

x		x_0		
$f''(x)$		-	+	

- Αν $x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$, από τη (2) προκύπτει $f''(x) < 0$.
- Αν $x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$, από τη (2) προκύπτει $f''(x) > 0$.

Παρατηρούμε ότι η f'' μηδενίζεται στο x_0 και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, άρα το σημείο x_0 είναι σε θέση σημείου καμπής της f.

β. $f^{(3)}(x_0) < 0$. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

2.133 Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και στρέφει τα κοίλα άνω στο (α,β). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

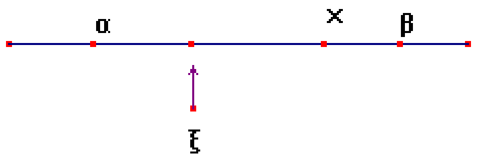
ΛΥΣΗ

- Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο (α,β), η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).
- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει:

$$g'(x)=\frac{[f(x)-f(\alpha)]'\cdot(x-\alpha)-[f(x)-f(\alpha)]\cdot(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2}=\frac{f(x)\cdot(x-\alpha)-[f(x)-f(\alpha)]}{(x-\alpha)^2}=$$

$$=\frac{f'(x)\cdot(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}-\frac{f(x)-f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}\Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{x-\alpha}\cdot\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] \quad (1).$$

- Το πηλίκο $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ θυμίζει Θ. Μ. Τ. στο $[\alpha,x]$.



Πραγματικά για τυχαίο σημείο $x\in(\alpha,\beta)$, έχουμε:

i) Η f συνεχής στο $[\alpha,x]\subseteq[\alpha,\beta]$ (υπόθεση).

ii) Η f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,x)\subseteq(\alpha,\beta)$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(\alpha,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, οπότε τώρα η (1) γίνεται:

$$g'(x)=\frac{1}{x-\alpha}\cdot[f'(x)-f'(\xi)] \quad (2)$$

Αλλά:

- $x>\alpha\Leftrightarrow x-\alpha>0$.
- Η f' γνησίως αύξουσα στο (α,β) και $\xi<x$ άρα $f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$, οπότε από τη (2) είναι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, άρα η g γνησίως αύξουσα στο (α,β).

2.134 Να δειχθεί ότι η ασύμπτωτη (πλάγια) της γραφικής παράστασης της f με $f(x)=x+\dfrac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2017}}$ έχει 2016 κοινά σημεία με τη C_f.

ΛΥΣΗ

- Η f έχει πεδίο ορισμού $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$ (1).

Είναι:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\dfrac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2017}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2018}}\right]=1+0$$

γιατί ο αριθμητής του κλάσματος έχει βαθμό 2016 δηλαδή μικρότερο από το βαθμό του παρονομαστή. Έτσι $\lambda=1$, οπότε:

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2017}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2017}}=0,$$ άρα

πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η $y=x$.

Επειδή τα παραπάνω όρια είναι ίδια και στο $-\infty$ η C_f έχει ίδια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

- Τα κοινά σημεία της C_f με την $y=x$ θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=x \quad (2) \\ y=x+\dfrac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2017}} \end{cases}$$ οπότε

$$x+\frac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2017}}=x\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-2)...(x-2016)}{x^{2017}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)...(x-2016)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } \dots \text{ ή } x=2016.$$

Άρα η C_f έχει με την $y=x$ 2016 κοινά σημεία τα

$(1,1),(2,2),...,(2016,2016)$.

2.135 Η συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και ισχύουν:

α. $f(0)=0$ και

β. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}\in\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 0,\ x=0\end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ **τέτοιο ώστε** $g'(\xi)=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.

ΛΥΣΗ

- Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για την g το Θ.Μ.Τ. στο $[-1,1]$.
- Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής.

- Για $x\in[-1,0)\cup(0,1]$ είναι $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ άρα συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για $x_0=0$ είναι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0=g(0)$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ και τελικά συνεχής στο $[-1,1]$.

-Για $x\neq0$ είναι

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}\in\mathbb{R}$$ (β) [είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ λόγω της συνεχείας της f]. Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ενώ για $x\neq0$ είναι $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων. Τελικά η g παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε: $g'(\xi) = \dfrac{g(1)-g(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{\dfrac{f(1)}{1} - \dfrac{f(-1)}{-1}}{2} = \dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$.

2.136 Η συνάρτηση f ορίζεται στο $(-1,1)$, η συνάρτηση g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και γι' αυτές ισχύουν:

α. Είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

β. $f(0) = g(0) = 0$ και f' συνεχής.

γ. $-1 < g(x) < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) \neq 0$ για $x \neq 0$.

δ. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο μηδέν.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(g(x))}{g(x)}$.

ΛΥΣΗ

- Το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1,1)$, η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν και παρουσιάζει ακρότατο. Άρα από θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$ (1).
- Η g ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Άρα $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$.
- Είναι $f(g(x)) = (fog)(x)$ με πεδίο ορισμού το $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in (-1,1)\} = \mathbb{R}$ (αφού από (γ) $-1 < g(x) < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$) και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση συνεχών

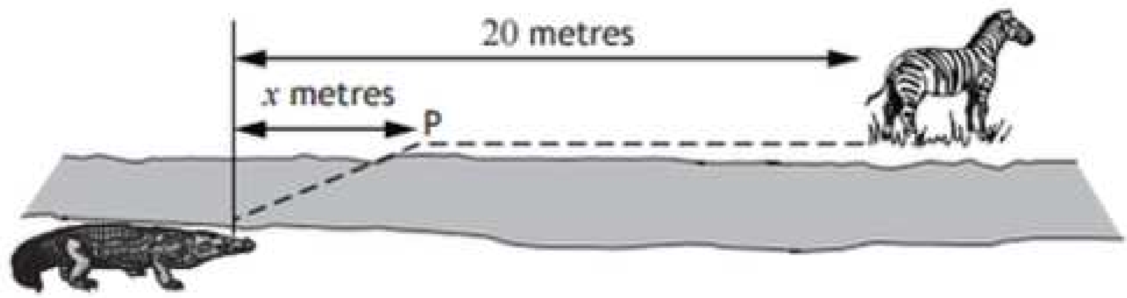
συναρτήσεων. Άρα $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x)) = f(g(0)) = f(0) = 0$.

Έτσι το ζητούμενο όριο οδηγεί σε απροσδιοριστία του τύπου $\dfrac{0}{0}$. Γι' αυτό εφαρμόζουμε τον κανόνα De l' Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(g(x))}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{[f(g(x))]'}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(g(x)) \cdot g'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} f'(g(x)) = f'(g(0)) = f'(0) \overset{(1)}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(g(x))}{g(x)} = 0$$

2.137. (Θέμα εισαγωγικών εξετάσεων από Σκωτία) Ένας κροκόδειλος-ο Σήφης-καραδοκεί μια ζέβρα. Βρίσκεται στην αντίπερα όχθη του ποταμού από την ζέβρα και αν διασχίσει κάθετα τον ποταμό και βρεθεί στην ιδια οχθη με την ζεβρα θα απέχει από το θύμα του 20 μέτρα. Είναι γνωστό ότι ο κροκόδειλος κολυμπά στο νερό ή σέρνεται στο έδαφος με διαφορετική σταθερή ταχύτητα. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν αυτή παραμείνει στο ίδιο σημείο ελαχιστοποιείται αν κολυμπήσει μέχρι ένα σημείο P στην αντίπερα όχθη και κατόπιν συρθεί στο έδαφος μέχρι την ζέβρα. Το P απέχει x μέτρα από το σημείο που ο κροκόδειλος θα έφτανε αν κολυμπούσε κάθετα στο ποτάμι.



Ο χρόνος T μετριέται σε δέκατα του δευτερολέπτου (!) και δίνεται από την συνάρτηση:

$$T(x)=5\sqrt{36-x^2}+4(20-x)$$

i) Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν δεν κινηθεί καθόλου στην ξηρά.

ii) Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν κολυμπήσει την λιγοτερη δυνατη αποσταση.

iii) Να βρείτε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα.

Λύση

i) Ο χρόνος που απαιτείται να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν δεν κινηθεί καθόλου στην ξηρά προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης για x = 20:

$T(20)=5\sqrt{36-20^2}+4(20-20)=..=2\sqrt{436}\approx 104$ δέκατα του δευτερολέπτου ή 10,4 δευτερόλεπτα

ii) Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει ο κροκόδειλος την ζέβρα αν διανύσει την ελάχιστη απόσταση κολυμπώντας-δηλαδή κάθετα στον ποταμο-και κατόπιν συρθεί κατά μήκος της όχθης προκύπτει από τον τύπο της συνάρτησης για $x = 0$:

$\mathrm{T}(0) = 5\sqrt{36-0^2} + 4(20-0) = .. = 110$ δέκατα του δευτερολέπτου ή 11 δευτερόλεπτα.

iii)Για $x > 0$. Θα βρούμε το ακρότατο της συνάρτησης Τ. Παραγωγίζουμε την $T(x)$

$$T'(x) = \left(5\sqrt{36+x^2} + 4(20-x)\right)' = 5\frac{\left(36+x^2\right)'}{2\sqrt{36+x^2}} + (80-4x)' = 5\frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}} - 4 = \frac{5x}{\sqrt{36+x^2}} - 4$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36+x^2}} - 4 \Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36+x^2}} = 4 \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{36+x^2}\ \ (x>0)$$

$$5x = 4\sqrt{36+x^2} \Leftrightarrow 25x^2 = 16\left(36+x^2\right) \Leftrightarrow 25x^2 = 16\cdot 36 + 16x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 = 16\cdot 36 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16\cdot 36}{9} \Leftrightarrow x = \pm\frac{4\cdot 6}{3} \Leftrightarrow x = \pm 8$$

Όμως $0 < x < 20$ άρα $x = 8$. $T'(8) = 0$

- $T'(x) < 0$ οταν $x < 8$
- $T'(x) > 0$ οταν $x > 8$

Οπότε η ελάχιστη απόσταση που μπορεί να κάνει ο κροκόδειλος για να φτάσει την ζέβρα είναι 8 μέτρα και ο ελάχιστος χρόνος που θα απαιτηθεί $T(8) = 5\sqrt{36+8^2} + 4(20-8) = 5\sqrt{36+64} + 4(12) = 5\sqrt{100} + 4(12) = 50 + 48 = 98$ δεκατα του δευτερολέπτου ή 9.8 δευτερόλεπτα.

«Έχω την πεποίθηση ότι τις ασκήσεις για το σπίτι, πρέπει να τις κάνει το σπίτι μόνο του.»

Πασχάλης 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

2.138.Δινεται η συνάρτηση $g(x)=e^x+x-5$ **,**

i)Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

ii)Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ **έχει μοναδική λύση β στο** $\mathbb{R}$ **.**

iii)Να μελετήσετε στο πεδίο ορισμού της την συνάρτηση $f(x)=\ln(5-x)$ **ως προς την μονοτονία και κατόπιν να βρείτε τα όρια** $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ **.**

iv)Να αποδείξετε ότι $f(\beta)=\beta$ **.**

v)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cg στο σημείο της με τετμημένη $\ln\alpha, \alpha>0$ **.**

vi)Να αποδείξετε :

$$e^x+x\ge(\alpha+1)(x-\ln\alpha)+\alpha+\ln\alpha \ \textbf{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Λύση

i)Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα

$g'(x)=e^x+1>0$, $g''(x)=e^x>0$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-5\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-5\right)=+\infty$ οπότε το σύνολο τιμών της g είναι το $\left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}$, $0\in\mathbb{R}$ άρα λόγω της συνέχειας της g από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $\beta\in\mathbb{R}$,τέτοιο ώστε $g(\beta)=0$.Η ρίζα β είναι μοναδική διότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.(εναλλακτικά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano σε κατάλληλο διάστημα π.χ $\left[0,2\right]$)

iii)Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\left(-\infty,5\right)$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A.
Έτσι: $f'(x)=-\dfrac{1}{5-x}<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to5^-} f(x)=-\infty$

iv)Ισχύει

$$g(\beta)=0\Leftrightarrow e^\beta+\beta-5=0\Leftrightarrow e^\beta=5-\beta \overset{5-\beta>0}{\Leftrightarrow} \ln e^\beta=\ln\left(5-\beta\right)\Leftrightarrow\beta=\ln\left(5-\beta\right)\Leftrightarrow\beta=f(\beta)$$

v) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$\varepsilon: y-g(\ln\alpha)=g'(\ln\alpha)(x-\ln\alpha)\Leftrightarrow y-\left(e^{\ln\alpha}+\ln\alpha-5\right)=\left(e^{\ln\alpha}+1\right)(x-\ln\alpha)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-\left(\alpha+\ln\alpha-5\right)=\left(\alpha+1\right)(x-\ln\alpha)\Leftrightarrow y=\left(\alpha+1\right)(x-\ln\alpha)+\alpha+\ln\alpha-5$

vi)Η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η παραπάνω εφαπτομένη της βρίσκεται "κάτω" από την Cg έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$g(x)\ge y\Leftrightarrow e^x+x-5\ge\left(\alpha+1\right)(x-\ln\alpha)+\alpha+\ln\alpha-5\Leftrightarrow e^x+x\ge\left(\alpha+1\right)(x-\ln\alpha)+\alpha+\ln\alpha$

(εναλλακτικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε νέα συνάρτηση και να χρησιμοποιήσουμε την μονοτονία)

«Είμαι πολύ χαρούμενος,σήμερα μάθαμε στο σχολείο για το θεώρημα Μέσης τιμής και ο μαθηματικός, μας διαβεβαίωσε ότι θα αποτελέσει βασικό και συνεχές εφόδιο ζωής.»

Αλέξανδρος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

2.139.(Μεζεδάκια De L'Hospital ….1974)

Α.Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-xf'(x)\right]=1974$

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Β. Αν α,β,γ τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ και η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\beta x)-\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{987x^2}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{\gamma^2}{1974}, & x=0\end{cases}$$

Είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\widehat{A}=90^0$)

Γ. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δυο φόρες παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f''(1)=\dfrac{1}{1974}$. Να βρείτε το όριο:

$$L=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{2\left(f(1+h)-hf'(1)-f(1)\right)}$$

Λύση

Α. Από υπόθεση $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L, L\neq0$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-xf'(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x)'f(x)-xf'(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)'=1974\ \ (1)$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(xf(x)\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)'\overset{(1)}{=}1974$

Β. Η f συνεχής στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu(\beta x)-\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{987x^2}\underset{\text{DE LHOSPITAL}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\left(\sigma\upsilon\nu(\beta x)-\sigma\upsilon\nu(\alpha x)\right)'}{\left(987x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\beta\eta\mu(\beta x)+\alpha\eta\mu(\alpha x)}{1974x}\underset{\text{DE LHOSPITAL}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\left(-\beta\eta\mu(\beta x)+\alpha\eta\mu(\alpha x)\right)'}{\left(1974x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\beta^2\sigma\upsilon\nu(\beta x)+\alpha^2\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{1974}=\frac{-\beta^2+\alpha^2}{1974}$$

Άρα $\dfrac{\gamma^2}{1974}=\dfrac{-\beta^2+\alpha^2}{1974}\Leftrightarrow\alpha^2=\beta^2+\gamma^2\overset{\text{Πυθαγορειο Θεωρημα}}{\Rightarrow}\widehat{A}=90^0$

Γ. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και συνεχής. Αρα η f θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$.Συνεπώς:

$\lim\limits_{h\to0} f(1+h)=f(1)$ και $\lim\limits_{h\to0} 2\left(f(1+h)-hf'(1)-f(1)\right)=2(f(1)-0-f(1))=0$

Οπότε έχουμε:

$$L=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{2\left(f(1+h)-hf'(1)-f(1)\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to0}\frac{2h}{2\left(f'(1+h)-f'(1)\right)}=\lim_{h\to0}\frac{h}{f'(1+h)-f'(1)}\quad(1)$$

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, δηλαδή η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$,οπότε η f′ είναι συνεχής στο $x_0=1$.Έτσι:

$$\lim_{h\to 0} f'(1+h)=f'(1) \quad άρα \quad \lim_{h\to 0}\left(f'(1+h)-f'(1)\right)=0$$

Από την (1) έχουμε πάλι απροσδιοριστία .Όμως η f′ δεν είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα και επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L′ Hospital.
Το χειριζόμαστε διαφορετικά

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{h}{f'(1+h)-f'(1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}}=\frac{1}{f''(1)}=\frac{1}{\frac{1}{1974}}=1974$$

2.139b*Ο Τοτός σε νέες περιπέτειες…*

Δόθηκε στον Τοτό η παρακάτω άσκηση :
«Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α,β) για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:
- $f(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$
- **Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο** $x_0\in(\alpha,\beta)$ **.**

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **παρουσιάζει στο** x_0 **τοπικό ελάχιστο το** $\frac{1}{f(x_0)}$ **.»**

Ο Τοτός-ο γνωστός μαθηματικός γίγαντας-έγραψε:
…η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο** $x_0\in(\alpha,\beta)$ **άρα από το Θ.Fermat
$f'(x_0)=0$ ***(1)***

Η g είναι παραγωγίσιμη στο** (α,β) **άρα για κάθε** $x\in(\alpha,\beta)$**: $g'(x)=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$ ***(2)***

Η (2) ισχύει για** $x=x_0$ **: $g'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{\left(f(x_0)\right)^2}=0$ ***άρα η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο** x_0*
και συγκεκριμένα τοπικό ελάχιστο…»
Όμως η λύση του είναι λανθασμένη. Να βρείτε το λάθος και να λύσετε την άσκηση σωστά.

Λύση

Ο Τοτός θεώρει εσφαλμένα ότι ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat .Ο μηδενισμός της g′ δεν εξασφαλίζει το ακρότατο σε σημείο.
Να δούμε μια ορθή λύση της άσκησης:
Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ άρα διατηρεί πρόσημο στο (α,β).Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in(\alpha,\beta)$ άρα υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$ (1)
Οι αριθμοί $f(x),f(x_0)$ είναι ομόσημοι άρα $f(x)\cdot f(x_0)>0$.Από την (1):

$$f(x)\le f(x_0)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{f(x)f(x_0)}\le\frac{f(x_0)}{f(x)f(x_0)}\Leftrightarrow\frac{1}{f(x_0)}\le\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow g(x_0)\le g(x) \text{ για κάθε } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$$

άρα η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $\frac{1}{f(x_0)}$.

2.140 Έστω $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ με $\alpha\beta\gamma = 1$. θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x + \beta^x + \gamma^x,\ x \in \mathbb{R}$$

i)Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii)Να δείξετε ότι:

$$\alpha^{\sqrt[3]{\pi}} + \beta^{\sqrt[3]{\pi}} + \gamma^{\sqrt[3]{\pi}} < \alpha^{\sqrt{e}} + \beta^{\sqrt{e}} + \gamma^{\sqrt{e}}$$

iv)Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x} = 0$$

v)(Ερώτημα bonus)Να δείξετε ότι:

$$\alpha^{e^\pi} + \beta^{e^\pi} + \gamma^{e^\pi} < \alpha^{\pi^e} + \beta^{\pi^e} + \gamma^{\pi^e}$$

ΛΥΣΗ

i)Είναι:

$$f'(x) = \left(\alpha^x + \beta^x + \gamma^x\right)' = \alpha^x \ln\alpha + \beta^x \ln\beta + \gamma^x \ln\gamma$$

$$f''(x) = \left(\alpha^x \ln\alpha + \beta^x \ln\beta + \gamma^x \ln\gamma\right)' = \alpha^x\left(\ln\alpha\right)^2 + \beta^x\left(\ln\beta\right)^2 + \gamma^x\left(\ln\gamma\right)^2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii)Επειδή είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(0) = \alpha^0\ln\alpha + \beta^0\ln\beta + \gamma^0\ln\gamma = \ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = \ln\left(\alpha\beta\gamma\right) = \ln 1 = 0$

Επειδή η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι

- για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) > f'(0) = 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$
- για κάθε $x < 0$ ισχύει $f'(x) < f'(0) = 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$

Οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ολικό ελάχιστο το $f(0) = \alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 3$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$$

iii)Είναι $\sqrt[3]{\pi} < \sqrt{e} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\pi}\right)^6 < \left(\sqrt{e}\right)^6 \Leftrightarrow \pi^2 < e^3$ που ισχύει

Έτσι,

$$0 < \sqrt[3]{\pi} < \sqrt{e} \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\sqrt[3]{\pi}) < f(\sqrt{e}) \Leftrightarrow \alpha^{\sqrt[3]{\pi}} + \beta^{\sqrt[3]{\pi}} + \gamma^{\sqrt[3]{\pi}} < \alpha^{\sqrt{e}} + \beta^{\sqrt{e}} + \gamma^{\sqrt{e}}$$

iv)Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(f(x)-3\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\left(\alpha^x\ln\alpha + \beta^x\ln\beta + \gamma^x\ln\gamma\right) = \ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = \ln\left(\alpha\beta\gamma\right) = \ln 1 = 0$$

v)Πρέπει να βρούμε αρχικά την σχέση ανάμεσα στους αριθμούς π^e, e^π

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ και με χρήση παραγώγων βρίσκουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$.

Οι αριθμοί π,e ανήκουν στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$, όπου από υπόθεση η f γνησίως φθίνουσα

Επειδή e <π ισχύει:

$$g(\pi) < g(e) \Leftrightarrow \frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow e\ln\pi < \pi\ln e \Leftrightarrow \ln\pi^e < \ln e^\pi \overset{g(x)=\ln x \text{ γνησιως αυξουσα στο}\left(0,+\infty\right)}{\Leftrightarrow} \pi^e < e^\pi$$

Άρα $\pi^e < e^\pi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\pi^e) < f(e^\pi) \Leftrightarrow \alpha^{e^\pi} + \beta^{e^\pi} + \gamma^{e^\pi} < \alpha^{\pi^e} + \beta^{\pi^e} + \gamma^{\pi^e}$

2.141(Παραλλαγή στην προηγούμενη από μαθηματικά γενικής τότε που ήταν στα ντουζένια της..) Έστω $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+^* - \{1\},\ i = 1,2,3...,1974$ **τέτοια ώστε να ισχύει:**

(1) $\alpha_1\beta_1^{\ x} + \alpha_2\beta_2^{\ x} + ... + \alpha_{1974}\beta_{1974}^{\ x} \geq \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{1974}$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

$$\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \cdot ..... \cdot \beta_{1974}^{\ \alpha_{1974}} = 1$$

Λύση

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = \alpha_1\beta_1^{\ x} + \alpha_2\beta_2^{\ x} + ... + \alpha_{1974}\beta_{1974}^{\ x}$ όπου παρατηρούμε ότι

$f(0) = \alpha_1\beta_1^{\ 0} + \alpha_2\beta_2^{\ 0} + ... + \alpha_{1974}\beta_{1974}^{\ 0} = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{1974}$.

Δηλαδή, η (1) παίρνει την μορφή:

$$f(x) \geq f(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f παρουσιάζει ακρότατο στο 0 έτσι από το θεώρημα Fermat έπεται ότι:

$$f'(0) = 0$$

Παραγωγίζουμε την f.

$$f'(x) = \left(\alpha_1\beta_1^{\ x} + \alpha_2\beta_2^{\ x} + ... + \alpha_{1974}\beta_{1974}^{\ x}\right)' = \alpha_1\beta_1^{\ x}\ln\beta_1 + \alpha_2\beta_2^{\ x}\ln\beta_2 + ... + \alpha_{1974}\beta_{1974}^{\ x}\ln\beta_{1974}$$

$$f'(0) = \alpha_1\beta_1^{\ 0}\ln\beta_1 + \alpha_2\beta_2^{\ 0}\ln\beta_2 + ... + \alpha_{1974}\beta_{1974}^{\ 0}\ln\beta_{1974} = \alpha_1\ln\beta_1 + \alpha_2\ln\beta_2 + ... + \alpha_{1974}\ln\beta_{1974} =$$

$$= \ln\beta_1^{\alpha_1} + \ln\beta_2^{\alpha_2} + ... + \ln\beta_{1974}^{\ \alpha_{1974}} = \ln\left(\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \beta_{1974}^{\ \alpha_{1974}}\right)$$

Έτσι

$$\ln\left(\beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \beta_{1974}^{\ \alpha_{1974}}\right) = 0 \Leftrightarrow \beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \beta_{1974}^{\ \alpha_{1974}} = 1$$

2.142(Δείτε και αυτό) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0,1\right]$ **.Να αποδείξετε ότι :**

i)αν η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο 0,τοτε $f'(0) \geq 0$ **,ενώ αν η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο 1 τότε** $f'(1) \leq 0$**.**

ii)αν $f'(0) < 0 < f'(1)$ **,τότε υπάρχει** $x_0 \in \left(0,1\right)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(x_0) = 0$**.**

Λύση

i)Έστω ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο 0,τοτε για κάθε $x \in \left[0,1\right]$ θα είναι:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) \geq 0$$

Έτσι, για $x > 0$ θα είναι: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq 0$, οπότε :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq 0 \text{ ή } f'(0) \geq 0$$

Αν η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο 1,τοτε για κάθε $x \in \left[0,1\right]$ θα είναι:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$$

Έτσι, για $x < 1$ θα είναι: $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq 0$, οπότε :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq 0 \text{ ή } f'(1) \leq 0$$

ii)Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$, θα παίρνει ελάχιστη τιμή στο $\left[0,1\right]$.Αν την ελάχιστη τιμή την παίρνει στο 0 , τότε από το ερώτημα (i) θα ήταν $f'(0) \geq 0$, άτοπο. Αφού $f'(0) < 0$.Όμοια, αποκλείουμε η f να παίρνει στο 1 την ελάχιστη τιμή, γιατί θα ήταν

$f'(1)\le 0$,που είναι άτοπο, αφού $f'(1)>0$.Έτσι η f θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0\in(0,1)$.Άρα από το θεώρημα Fermat θα ισχύει : $f'(x_0)=0$

(Γιατί δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Bolzano;;)

2.143Δινεται η συνάρτηση $f(x)=e^{g(x^2)+2}$**.Αν η συνάρτηση g είναι δυο φορες παραγωγίσιμη στο** $\mathbb{R}$ **και ισχύει η ιδιότητα :**

(1) $2x^2[(g'(x^2))^2+g''(x^2)]+g'(x^2)\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η f έχει το πολύ ένα ακρότατο.

Λύση

Έστω ότι η f έχει δυο θέσεις ακρότατων, έστω x_1,x_2 με $x_1<x_2$.Εφόσον η f θα είναι παραγωγίσιμη θα ισχύει το θεώρημα Fermat οπότε θα έχουμε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Επίσης

$f'(x)=\left(e^{g(x^2)+2}\right)'=e^{g(x^2)+2}\left(g(x^2)+2\right)'=2x\cdot e^{g(x^2)+2}g'(x^2)$

Τώρα βλέπουμε ότι

- f′ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$ με

$f''(x)=\left(2x\cdot e^{g(x^2)+2}g'(x^2)\right)'=..=e^{g(x^2)+2}(2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)+4x^2\left(g'(x^2)\right)^2)$

- $f'(x_1)=f'(x_2)$

Οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$f''(\xi)=0\Leftrightarrow 2e^{g(\xi^2)+2}(g'(\xi^2)+2x^2g''(\xi^2)+2\xi^2\left(g'(\xi^2)\right)^2)=0\Leftrightarrow g'(\xi^2)+2\xi^2g''(\xi^2)+2\xi^2\left(g'(\xi^2)\right)^2=0$

$\Leftrightarrow g'(\xi^2)+2\xi^2\left[g''(\xi^2)+\left(g'(\xi^2)\right)^2\right]=0$ άτοπο από την (1).

2.144Δινεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{2}-\ln x, x>0$

i)Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της Cf στο οποίο η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον x'x.

ii)Να αποδείξετε ότι $f(x)>1$ **για κάθε** $x\ge 1$**.**

iii)Να αποδείξετε ότι $e^{2016}-e^{2015}>\ln\left(\dfrac{2016}{2015}\right)^2$ **.**

iv)Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$**.**

Λύση

i)Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα

$$f'(x)=\frac{e^x}{2}-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-2}{2x}, x>0$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0\Leftrightarrow\dfrac{x_0e^{x_0}-2}{2x_0}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x_0e^{x_0}-2=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=xe^x-2$, $x\in\left[\dfrac{1}{4},1\right]$.Έχουμε:

$g(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}-2<0$, $g(1)=e^{1}-2>0$ η g συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},1\right]$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{4},1\right)$ τέτοιο ώστε : $g(x_0)=x_0e^{x_0}-2=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$

ii)Για κάθε $x>1$

$e^{x}>e^{1}\Rightarrow\frac{e^{x}}{2}>\frac{e}{2}$ (1) και $\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow-\frac{1}{x}>-1$ (2)

(1) +(2) $\frac{e^{x}}{2}-\frac{1}{x}>\frac{e}{2}-1>0\Rightarrow f'(x)>0$ για κάθε $x>1$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$ άρα $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{e}{2}>1$ για κάθε $x\in\left[1,+\infty\right)$.

iii) Από την μονοτονία της f

$$f(2016)>f(2015)\Rightarrow\frac{e^{2016}}{2}-\ln2016>\frac{e^{2015}}{2}-\ln2015\Leftrightarrow\frac{e^{2016}}{2}-\frac{e^{2015}}{2}>\ln2016-\ln2015\Leftrightarrow\frac{e^{2016}-e^{2015}}{2}>\ln\frac{2016}{2015}$$

$$e^{2016}-e^{2015}>2\ln\frac{2016}{2015}\Leftrightarrow e^{2016}-e^{2015}>\ln\left(\frac{2016}{2015}\right)^{2}$$

iv)Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^{x}}{2}-\ln x\right)+\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}-\ln\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{x}}{2}-\ln x+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}+\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{x}}{2}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+e^{\frac{1}{x}}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+e^{\frac{1}{x}}}{2}=+\infty$$

2.145 Να λυθεί στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση $9^{x}+14^{x}=17^{x}+6^{x}$.

Λύση

Θεωρούμε συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^{\kappa}, x>0,\kappa\in\mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού $D_f=\left(0,+\infty\right)$

Είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ ως πολυωνυμική με παράγωγο :

$$f'(x)=\kappa x^{\kappa-1}$$

Η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$9^{\kappa}+14^{\kappa}=17^{\kappa}+6^{\kappa}\Leftrightarrow9^{\kappa}-6^{\kappa}=17^{\kappa}-14^{\kappa}\Leftrightarrow f(9)-f(6)=f(17)-f(14)\ (1)$$

Δυο απανωτά Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $\left[9,6\right],\left[17,14\right]$, ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις (συνέχεια στο κλειστό, παραγωγισιμότητα στο ανοιχτό) άρα υπάρχουν

$$\xi_1\in\left(9,6\right):f'(\xi_1)=\frac{f(9)-f(6)}{9-6}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{f(9)-f(6)}{3}\ (2)$$

$$\xi_2\in\left(17,14\right):f'(\xi_2)=\frac{f(17)-f(14)}{17-14}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{f(17)-f(14)}{3}\ (3)$$

Όμως από την σχέση (1) προκύπτει

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\Leftrightarrow\kappa\xi_1^{\ \kappa-1}=\kappa\xi_2^{\ \kappa-1}\Leftrightarrow\kappa\xi_1^{\ \kappa-1}-\kappa\xi_2^{\ \kappa-1}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\kappa\left(\xi_1^{\ \kappa-1}-\xi_2^{\ \kappa-1}\right)=0\Leftrightarrow\kappa\left(\frac{\xi_1^{\ \kappa-1}}{\xi_2^{\ \kappa-1}}-1\right)=0\overset{\xi_1\neq\xi_2}{\Leftrightarrow}\kappa\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{\kappa-1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=0\\\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{\kappa-1}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=0\\\acute{\eta}\\\kappa=1\end{cases}$$

2.146Δινεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

(1) $\left(f(x)\right)^3+\left(f(x)\right)^2+f(x)=8x^3, x>0$

i)Να αποδείξετε ότι $0<f(x)<2x$ για κάθε $x>0$

ii)Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$.

iii)(Bonus ερώτημα) Αν $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ τότε να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγωνικών ριζών δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από λ^2, είναι μικρότερη του $\frac{1}{2\lambda}$.

Λύση

i)Η σχέση (1) για $x>0$ γράφεται

$$\left(f(x)\right)^3+\left(f(x)\right)^2+f(x)=8x^3 \Leftrightarrow f(x)\left(\left(f(x)\right)^2+\left(f(x)\right)+1\right)=8x^3 \quad (2)$$

Όμως $\left(f(x)\right)^2+\left(f(x)\right)+1>0$ για κάθε $x>0$.Άρα η (2) παίρνει την μορφή

$$\left(f(x)\right)^3+\left(f(x)\right)^2+f(x)=8x^3 \Leftrightarrow f(x)=\frac{8x^3}{\left(f(x)\right)^2+\left(f(x)\right)+1}>0 \text{ για κάθε } x>0$$

Ξαναγυρίζουμε στην (1) :

$$\left(f(x)\right)^3+\left(f(x)\right)^2+f(x)=8x^3 \Leftrightarrow 8x^3-\left(f(x)\right)^3=\left(f(x)\right)^2+f(x)>0 \text{ για κάθε } x>0$$

Οπότε $8x^3-\left(f(x)\right)^3>0 \Leftrightarrow \left(2x-f(x)\right)\left(4x^2+4xf(x)+\left(f(x)\right)^2\right)>0$ για κάθε $x>0$ (3)

Όμως $4x^2+4xf(x)+\left(f(x)\right)^2>0$ για κάθε $x>0$.Έτσι $2x-f(x)>0 \Leftrightarrow 2x>f(x)$

Τελικά $0<f(x)<2x$ για κάθε $x>0$.

ii)Αρχικά θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

Η (1) :

$$\left(f(x)\right)^3+\left(f(x)\right)^2+f(x)=8x^3 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\left(f(x)\right)^3+\left(f(x)\right)^2+f(x)}{x^3}=\frac{8x^3}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x}+\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x^2}=8$$

Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{f(x)}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right)=8 \text{ ή } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3=8 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

Άρα για την ασύμπτωτη $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$

Και (3) : $f(x)-2x=\dfrac{-\left(f(x)\right)^2-f(x)}{\left(f(x)\right)^2+4xf(x)+4x^2}$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(f(x)\right)^2-f(x)}{\left(f(x)\right)^2+4xf(x)+4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\left(f(x)\right)^2-f(x)}{x^2}}{\frac{\left(f(x)\right)^2+4xf(x)+4x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\left(f(x)\right)^2}{x^2}-\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{\left(f(x)\right)^2}{x^2}+\frac{4xf(x)}{x^2}+\frac{4x^2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\left(f(x)\right)^2}{x^2}-\frac{f(x)}{x}\frac{1}{x}}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\frac{4f(x)}{x}+4}=\frac{-4-0}{4+8+4}=-\frac{1}{4}$$

Άρα η ζητούμενη πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι $y=2x-\frac{1}{4}$.

iii)Από το προηγούμενο ερώτημα $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$

Έστω, ότι $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\nu > \lambda^2 \Rightarrow \nu > 4$ (*) και $\nu+1>4$ πρέπει να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu} < \frac{1}{4}\ ,\ \nu>4$$ (αυτό μας γυρίζει σε γνωστά μοτίβα ...Θ.Μ.Τ)

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Για την g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[\nu,\nu+1]$ άρα υπάρχει

$$\xi\in(\nu,\nu+1) \text{ τέτοιο ώστε : } g'(\xi)=\frac{g(\nu+1)-g(\nu)}{\nu+1-\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu} \quad (4)$$

Όμως

$$\nu<\xi \overset{(*)}{\Rightarrow} 4<\xi \Rightarrow \frac{1}{4}>\frac{1}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{\sqrt{\xi}} \Rightarrow \frac{1}{4}>\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{1}{4}>\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}\ ,\ \nu>4$$

2.147(Ασυμπτωτικά…μεζεδάκια)

1)Η ευθεία $y=2016x+1974$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της περιττής συνάρτησης f όταν $x\to+\infty$.Να βρείτε την ασύμπτωτη της f όταν $x\to-\infty$.

2)Αν η συνάρτηση f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση να δείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης g με τύπο $g(x)=\frac{xf(x)+1974}{f(x)}$ και δεν τέμνει την γραφική παράσταση της g.

Λύση

1)Από θεωρία είναι γνωστό ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2016 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=1974$$

Από υπόθεση, όμως η f είναι περιττή άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(-x)=-f(x)$ (1)

Έστω τώρα ότι η ασύμπτωτη της f όταν $x\to-\infty$ είναι $y=ax+\beta$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-f(x)}{-x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{-x}\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=2016$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-2016x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\left(-f(x)+2016x\right)\right)=-\lim_{u\to+\infty}\left(f(u)-2016u\right)\overset{u=-x}{=}-1974$$

Άρα, η ασύμπτωτη της f όταν $x\to-\infty$ είναι $y=2016x-1974$

2)Η f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση και έστω $\alpha_\nu x^\nu$ ο μεγιστοβάθμιος όρος της τότε θα έχουμε :

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\alpha_\nu x^\nu=\alpha_\nu\cdot\pm\infty=\pm\infty$$

Έστω $y=ax+\beta$ η ασύμπτωτη της g όταν $x\to+\infty$.Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{xf(x)+1974}{f(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)+1974}{xf(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1974}{xf(x)}\right)=1+0=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xf(x)+1974}{f(x)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xf(x)+1974-xf(x)}{f(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1974}{f(x)}\right)=0$$

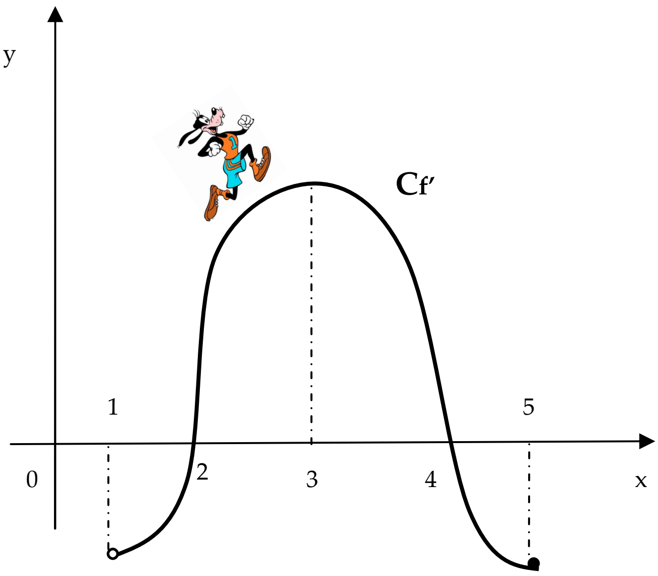
Οπότε, η ασύμπτωτη της g όταν $x\to+\infty$ είναι η $y=x$.Την ίδια ασύμπτωτη βρίσκουμε και όταν $x\to-\infty$.

Αν τώρα, η ασύμπτωτη $y=x$ έτεμνε την Cg στο σημείο (x_0,y_0) θα ίσχυε $g(x_0)=x_0$ ή

$$\frac{x_0f(x_0)+1974}{f(x_0)}=x_0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow 1974=0$$,άτοπο.

2.148Η συνάρτηση $f:(1,5]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,5)$ και στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f′ της f.
Επίσης ισχύει

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$
- $f(2)=-1$
- $f(3)=1$
- $f(4)=3$
- $f(5)=-2$



i)Να μελετήσετε την μονοτονία και τα κοίλα της f.
ii)Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή η κοίλη.
iii)Να βρείτε τα σημεία καμπής της Cf.
iv)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
Έχει η f ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο;

v)(Bonus)Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2]$ που να ικανοποιεί την ισότητα

$$2\left(f(x_0)\right)^3-3\left(f(x_0)\right)^2+7f(x_0)-3=0$$

Λύση
i)Από την Cf′ βρίσκουμε το πρόσημο της f′ και από το πρόσημο της f′ την μονοτονία της f. Κατασκευάζουμε τον πίνακα

x	1		2		4		5
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)		↘		↗		↘	
			Τ.Ε		Τ.Μ		Τ.Ε

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(1,2],[4,5]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,4]$.
Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο:

- $x_1=2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-1$
- $x_2=4$ τοπικό μέγιστο το $f(4)=3$
- $x_3=5$ τοπικό ελάχιστο το $f(5)=-2$

ii)Από την Cf′ βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f′ και από την μονοτονία της f′ βρίσκουμε την κυρτότητα της f.
Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(1,3]$ και κοίλη στο διάστημα $[3,5]$.

iii)Το σημείο $x_0=3$ είναι θέση σημείου καμπής της f (δηλαδή στο σημείο $(3,f(3))$ η Cf δέχεται εφαπτομένη ως παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ και η f είναι κυρτή αριστερά του $x_0=3$ και κοίλη δεξιά του $x_0=3$) Είναι $f(3)=1$ οπότε το σημείο καμπής είναι $(3,1)$

iv)Από τα διαστήματα μονοτονίας της f και επειδή η f είναι συνεχής στο $(1,5]$:

- $f((1,2]) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right) = [-1,2)$
- $f([2,4]) = [f(2), f(4)] = [-1,3]$
- $f([4,5]) = [f(5), f(4)] = [-2,3]$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f((1,5]) = [-1,2)\cup[-1,3]\cup[-2,3] = [-2,3]$

Από το σύνολο τιμών είναι σαφές ότι η f έχει ολικό μέγιστο το $f(4)=3$ και ολικό ελάχιστο το $f(5)=-2$.

v) $2\left(f(x_0)\right)^3 - 3\left(f(x_0)\right)^2 + 7f(x_0) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(2f(x_0)-1\right)\left(\left(f(x_0)\right)^2 - f(x_0)+3\right) = 0 \underset{\Delta=-11<0}{\overset{\left(f(x_0)\right)^2 - f(x_0)+3>0 \text{ για καθε } x\in(1,5]}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left(2f(x_0)-1\right)\left(\left(f(x_0)\right)^2 - f(x_0)+3\right) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0)-1=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\frac{1}{2}$$

Από το σύνολο τιμών της f προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση x_0 με $x_0\in(1,2]$.

2.149 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f(\beta)=g(\beta)$.Αν $f''(x)>0$ και $g''(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

i)Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $B(x_0,g(x_0))$ να είναι παράλληλες .

ii)Τυχαία ευθεία (ε) παράλληλη στον άξονα y'y τέμνει την Cf και την Cg στα σημεία $M(\xi,f(\xi))$ και $N(\xi,g(\xi))$.Να αποδείξετε ότι η απόσταση (MN) γίνεται ελάχιστη όταν $\xi=x_0$.

Λύση

i)Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=g'(x_0)$.Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και έχουμε:

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β)

$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=f(\beta)-g(\beta)=h(\beta)$

Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$h'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$

Για την μοναδικότητα έχουμε:

Η $h''(x)=f''(x)-g''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα οπότε το $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι μοναδικό .

ii)Έστω η ευθεία $x=\xi$ παράλληλη στον άξονα y'y η οποία τέμνει την Cf και την Cg στα σημεία $M(\xi,f(\xi))$ και $N(\xi,g(\xi))$

Τότε

$$(MN)=\sqrt{(\xi-\xi)^2+\left(f(\xi)-g(\xi)\right)^2}=\sqrt{\left(f(\xi)-g(\xi)\right)^2}=\left|f(\xi)-g(\xi)\right|=\left|h(\xi)\right|$$

Για την συνάρτηση h έχουμε:

$h'(x) = f'(x) - g'(x)$

$h'(x_0) = 0$

$h''(x) = f''(x) - g''(x) > 0$

Άρα η h′ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε, προκύπτει ότι:

Αν $x < x_0$ τότε $h'(x) < h'(x_0) = 0$ h γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_0]$

Αν $x > x_0$ τότε $h'(x) > h'(x_0) = 0$ h γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta]$

Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 δηλαδή η απόσταση (ΜΝ) γίνεται ελάχιστη όταν $\xi = x_0$.

2.150Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \lambda x^4 + 2x^3 + 3\kappa x^2 - 12\kappa^2 x + 6\kappa$$

όπου κ,λ μη μηδενικοί πραγματικοί σταθεροί αριθμοί

Α. Αν η f έχει τρία διακεκριμένα τοπικά ακρότατα τότε να δείξετε ότι $\kappa \cdot \lambda < \frac{1}{2}$

Β. Αν $\lambda = 0$,έστω Α,Β,Γ οι προβολές των τοπικών ακρότατων και του σημείου καμπής της f στον x′x αντίστοιχα.

i)Να δείξετε ότι το σημείο Γ διχοτόμει το τμήμα ΑΒ για κάθε $\kappa \neq 0$.

ii)Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ και η εφαπτομένη (ε) της Cf στο σημείο καμπής σχηματίζουν με τον x′x αμβλεία γωνία. Ποια από τις δυο γωνίες((ε,x′x),(x′x,AB) είναι μεγαλύτερη;

Λύση

Α.Η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Η f έχει τρία διακεκριμένα τοπικά ακρότατα με τετμημένες x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$.Από το θεώρημα Fermat σε καθένα από τα x_1, x_2, x_3 ισχύει:

$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$ (1)

Είναι $f'(x) = 4\lambda x^3 + 6x^2 + 6\kappa x - 12\kappa^2$ (2)

Η f′ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική

Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πολυωνυμική

$f'(x_1) = f'(x_2)$

Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_4 \in (x_1, x_2) : f''(x_4) = 0$

Η f′ είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$ ως πολυωνυμική

Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) ως πολυωνυμική

$f'(x_2) = f'(x_3)$

Άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_5 \in (x_2, x_3) : f''(x_5) = 0$

Ανάλογα

$f''(x) = 12\lambda x^2 + 12x + 6\kappa$ και $f''(x_5) = f''(x_4) = 0$, $x_5 \neq x_4$

Άρα η $f''(x) = 0$ ως τριώνυμο έχει δυο διακεκριμένες ρίζες όταν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 12\lambda \cdot 6\kappa > 0 \Leftrightarrow 144 - 288\kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow 144(1 - 2\kappa\lambda) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda < \frac{1}{2}$$

Β. Αν $\lambda = 0$ η f παίρνει την μορφή $f(x) = 2x^3 + 3\kappa x^2 - 12\kappa^2 x + 6\kappa$

$f'(x) = 6x^2 + 6\kappa x - 12\kappa^2$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 12x + 6\kappa$, $x \in \mathbb{R}$

Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = \kappa, x = -2\kappa$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = \kappa, x_2 = -2\kappa$ και σημείο καμπής $x_3 = -\frac{\kappa}{2}$.Χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι :

$A(\kappa,0), B(-2\kappa,0), \Gamma(-\frac{\kappa}{2},0)$ και επειδή $\frac{\kappa-2\kappa}{2}=x_2$ άρα το Γ διχοτόμει το τμήμα ΑΒ για $\kappa\neq 0$

$\lambda_{AB}=\frac{f(\kappa)-f(-2\kappa)}{\kappa+2\kappa}=\frac{-\kappa^3-26\kappa^3}{3\kappa}=\frac{-27\kappa^3}{3\kappa}=-9\kappa^2<0$ για κάθε $\kappa\neq 0$,άρα σχηματίζει αμβλεια γωνία με $x'x$

$f'(\frac{\kappa}{2})=-\frac{27}{2}\kappa^2<0$, η εφαπτομένη (ε) της Cf στο σημείο καμπής σχηματίζει με τον x'x αμβλεία γωνία.

Έχουμε $-\frac{27}{2}\kappa^2<-9\kappa^2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\widehat{x'x,AB})>\varepsilon\varphi(\widehat{x'x,\varepsilon}) \underset{\frac{\pi}{2}<(\widehat{x'x,AB})<\pi}{\overset{\frac{\pi}{2}<(\widehat{x'x,\varepsilon})<\pi}{\Leftrightarrow}} (\widehat{x'x,AB})>(\widehat{x'x,\varepsilon})$

2.151Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=1$, $f'(0)=0$ και τέτοια, ώστε

$$2(f(x)+xf'(x))=-f''(x) \quad \textbf{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δίνονται επίσης τα σημεία

$$A(x,0), B(x,f(x)), \Gamma(-x,f(x)), \Delta(-x,0) \quad \textbf{με } x>0$$

i)Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{e^{x^2}}$

ii)Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

iii)Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$E(x)=\frac{2x}{e^{x^2}} \quad \textbf{για κάθε } x>0$$

iv)Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο, όταν τα σημεία Β και Γ είναι σημεία καμπής της Cf.

v)(Bonus ερώτημα) Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις h,g ισχύει

$$\frac{1}{h(x)}+\frac{1}{g(x)}=e^{x^2+x}f(x) \quad \textbf{(1) με } g(x)h(x)\neq 0 \textbf{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

$$\left(h(x)\right)^2[g(x)+g'(x)]+\left(g(x)\right)^2[h(x)+h'(x)]=0$$

Λύση

i)Έχουμε:

$2(f(x)+xf'(x))=-f''(x)\Leftrightarrow 2f(x)+2xf'(x)+f''(x)=0\Leftrightarrow (2x)'f(x)+2xf'(x)+f''(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2xf(x))'+f''(x)=0\Leftrightarrow (2xf(x)+f'(x))'=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Δηλαδή:

$2xf(x)+f'(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με c σταθερό πραγματικό αριθμό.

Θέτουμε όπου x το 0 και λαμβάνουμε

$2\cdot 0\cdot f(0)+f'(0)=c\Leftrightarrow c=0$ Έτσι

$2xf(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow (x^2)'f(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}(x^2)'f(x)+e^{x^2}f'(x)=0\Leftrightarrow$

$\left(e^{x^2}\right)'f(x)+e^{x^2}f'(x)=0\Leftrightarrow \left(e^{x^2}f(x)\right)'=0$

Άρα $e^{x^2}f(x)=c\Leftrightarrow f(x)=\frac{c}{e^{x^2}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με c σταθερό πραγματικό αριθμό.

Θέτουμε όπου x το 0 και λαμβάνουμε

$f(0)=\frac{c}{e^{0^2}}\Leftrightarrow 1=\frac{c}{e^{0^2}}\Leftrightarrow c=1$

Τελικά $f(x)=\frac{1}{e^{x^2}}=-e^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με c σταθερό πραγματικό αριθμό.

ii) $f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\left(-x^2\right)'=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=\left(-2xe^{-x^2}\right)'=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=0 \Leftrightarrow e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)=0 \Leftrightarrow -2+4x^2=0 \Leftrightarrow x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Τα σημεία $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι θέσεις σημείου καμπής της f καθώς η Cf σε αυτά δέχεται εφαπτομένη ως παραγωγίσιμη και

f είναι κυρτή αριστερά του $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ και κοίλη δεξιά του $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f είναι κοίλη αριστερά του $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και κυρτή δεξιά του $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα τα σημεία καμπής της Cf είναι $K(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}),Z(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt{e}})$

iii) $E(x)=(AB)(A\Delta)=f(x)[x-(-x)]=2xf(x)=2x\frac{1}{e^{x^2}}=\frac{2x}{e^{x^2}}$

iv)Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι $E(\frac{\sqrt{2}}{2})$

v) $\frac{1}{h(x)}+\frac{1}{g(x)}=e^{x^2+x}f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{h(x)}+\frac{1}{g(x)}=\frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{h(x)}+\frac{1}{g(x)}=e^x$ με $g(x)h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται

$$\frac{(h(x))^2[g(x)+g'(x)]}{(h(x))^2(g(x))^2}+\frac{(g(x))^2[h(x)+h'(x)]}{(h(x))^2(g(x))^2}=0 \Leftrightarrow \frac{[g(x)+g'(x)]}{(g(x))^2}+\frac{[h(x)+h'(x)]}{(h(x))^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{g(x)}{(g(x))^2}+\frac{g'(x)}{(g(x))^2}+\frac{h(x)}{(h(x))^2}+\frac{h'(x)}{(h(x))^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)}+\frac{1}{h(x)}+\frac{g'(x)}{(g(x))^2}+\frac{h'(x)}{(h(x))^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g(x)}+\frac{1}{h(x)}=-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}-\frac{h'(x)}{(h(x))^2} \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)}+\frac{1}{h(x)}=\left(\frac{1}{g(x)}+\frac{1}{h(x)}\right)' \quad (3)$$

Η (3) ισχύει διότι $\frac{1}{h(x)}+\frac{1}{g(x)}=e^x$

2.152Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x)=\alpha^2x+\ln x-2(8\beta-\alpha)+4\beta^2+17$$

διέρχεται από το σημείο A(1,1) .

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι $\alpha=-1,\beta=2$.

ii)Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

iii)Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f((0,+\infty))=\mathbb{R}$.

iv)Αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $f((0,+\infty))=\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(f^{-1}(x))}{x}$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(xf^{-1}(x)\right)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{e^3},1\right)$ ώστε $f^{-1}(\eta\mu\xi)=\xi$.

Λύση

i) $D_f=(0,+\infty)$

$f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha^2+\ln 1-2(8\beta-\alpha)+4\beta^2+17=1 \Leftrightarrow \alpha^2-16\beta+2\alpha+4\beta^2+17=0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1+4\beta^2-16\beta+16=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+2\alpha+1)+4(\beta^2-4\beta+4)=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2+4(\beta^2-4\beta+4)=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2+4(\beta-2)^2=0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha+1)^2+4(\beta-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(\alpha+1)^2=0\\ \text{και}\\ 4(\beta-2)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+1=0\\ \text{και}\\ \beta-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \text{και}\\ \beta=2\end{cases}$$

ii) Για $\alpha=-1,\beta=2$ ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=x+\ln x$ με $Df=(0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα $f'(x)=x+\ln x=1+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,ως γνησίως μονότονη είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f το $f((0,+\infty))$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+\ln x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\ln x)=+\infty$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ προκύπτει ότι:

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

iii)Υποθέτουμε ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $f((0,+\infty))=\mathbb{R}$

Τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)$

Έχουμε όμως:

$$f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)\overset{f\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_1))\ge f(f^{-1}(x_2))\Rightarrow x_1\ge x_2$$

Συνεπώς η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f((0,+\infty))=\mathbb{R}$

iv)Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $f((0,+\infty))=\mathbb{R}$ προκύπτει ότι:

$$f^{-1}(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x),\lim_{x\to+\infty}f^{-1}(x)\right)$$

Είναι όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=+\infty$

Ακόμη ισχύει :

$f^{-1}(x)\in D_f=(0,+\infty)$ για κάθε $x\in f((0,+\infty))=\mathbb{R}$

Δηλαδή ισχύει : $f^{-1}(x)>0$

α)

Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(f^{-1}(x))}{x}$ θέτουμε $u=f^{-1}(x)$, οπότε είναι $f(u)=x$.Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=0$ και $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,έπεται ότι όταν $x\to-\infty$ έχουμε $u\to0^+$

Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(f^{-1}(x))}{x}=\lim_{u\to0^+}\frac{\ln u}{f(u)}=\lim_{u\to0^+}\frac{\ln u}{u+\ln u}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{(\ln u)'}{(u+\ln u)'}=\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}=\lim_{u\to0^+}\frac{1}{u+1}=1$$

Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf^{-1}(x)\right)$ έχουμε ότι $u\to0^+$

Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xf^{-1}(x)\right)=\lim_{u\to0^+}\left(f(u)u\right)=\lim_{u\to0^+}\left((u+\ln u)u\right)=\lim_{u\to0^+}\frac{u+\ln u}{\frac{1}{u}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{(u+\ln u)'}{\left(\frac{1}{u}\right)'}=\lim_{u\to0^+}\frac{1+\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim_{u\to0^+}(-u^2-u)=0$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta\mu x = x + \ln x - \eta\mu x, x > 0$

Η g συνεχής στο $(0,+\infty)$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) , οπότε η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e^3},1\right]$

Ισχύει:

$$g\left(\frac{1}{e^3}\right) = \frac{1}{e^3} + \ln\frac{1}{e^3} - \eta\mu\frac{1}{e^3} = \frac{1}{e^3} - 3 - \eta\mu\frac{1}{e^3} = \frac{1-3e^3}{e^3} - \eta\mu\frac{1}{e^3} < 0$$

($\frac{1-3e^3}{e^3} < -1 \Leftrightarrow 1-3e^3 < -e^3 \Leftrightarrow 1-2e^3 < 0$ που ισχύει)

$g(1) = 1 + \ln 1 - \eta\mu 1 = 1 - \eta\mu 1 > 0$ $(\eta\mu 1 < 1)$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{e^3},1\right)$ τέτοιο ώστε

$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \eta\mu\xi \Leftrightarrow f^{-1}(\eta\mu\xi) = \xi$

Μια λίστα για τον υποψήφιο

Μια λίστα χρηστικών συμβουλών για τους υποψηφίους των πανελληνίων, μακιαβελικής υφής, εγκεκριμένη από τον διεθνούς φήμης Λαρισαίο ψυχολόγο-μαθηματικό Χανς Λαδ ...

1) Θυμηθείτε δεν λύνονται όλα τα όρια με D.L' Hospital.

2) Αν δεν ξέρετε τι να κάνετε κάντε Bolzano,μετά Rolle και τέλος Θ.Μ.Τ αν δεν δουλέψει αλλάξτε την σειρά, αν πάλι δεν πιάσει,δοκιμάστε άλλο θέμα αν επαναληφθεί το ίδιο,πιάστε τις προσευχές ..

3)Ότι και να γίνει, σκεφτείτε ότι όταν τελειώσουν οι εξετάσεις θα σας ρωτούν τι κάνετε και δεν θα λέτε *δίνω πανελλήνιες* και μετά να σας κοιτούν με οίκτο.

4)Πάρτε μαζί 2ο ή και 3ο στυλό γιατί η πιθανότητα αν πάρετε ένα στυλό να μην γράφει είναι 1.

5) Αν δείτε τα θέματα και δεν καταλαβαίνετε τίποτα,δοκιμάστε να περιστρέψετε την κόλλα κατά 180^o.Ίσως να τα κοιτάτε ανάποδα.

6) Παρότι κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι δεκτή αποφύγετε να κάνετε φιγούρα για τις γνώσεις και την κατάρτιση σας,αν για παράδειγμα ζητηθεί ένα πόρισμα από την ανάλυση στον R εσείς να το αποδείξετε στο R^ν και κατόπιν να πείτε ισχύει για $\nu=1$.Καλό είναι, να μείνετε στην εξεταστέα σχολική ύλη.

7) Αγνοήστε τους ψιθύρους για τα Σ Λ–αν υπάρξουν-την ώρα της εξέτασης.Λάθος μπορείτε να κάνετε και μόνοι σας.

8)Θα χρειαστεί να έχετε μαζί σας ταυτότητα για να πιστοποιήσετε ότι είστε εσείς.Δελτίο ταυτότητας.Φήμες θέλουν μαθητή όταν του ζήτησαν ταυτότητα να λέει: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

9) Αν κάποιο θέμα έχει εκφώνηση μια από τις γνωστές άλυτες εικασίες του Hilbert ,μην ανησυχήσετε, έχετε τρεις ολόκληρες ώρες να την αποδείξετε σημειώνω ότι το τετράδιο που θα σας δοθεί έχει μπόλικα περιθώρια.

10) Να έχετε κατά νου, ότι όλες αυτές τις κρίσιμες μέρες όπου και να γυρίσετε κάποιος θα σας δίνει μια συμβουλή-τώρα καλή ώρα .Μην ψαρώνετε,όλοι γουστάρουν το ρόλο του επαΐοντα.Εσείς τι κάνετε; Follow your heart.

11) Στα πλαίσια ψυχολογικών επιχειρήσεων κατά των άλλων υποψήφιων όταν βγείτε από το σχολείο μετά την εξέταση,στην πρώτη κάμερα που θα συναντήσετε θα πείτε *«Τα θέματα ήταν βατά, έγραψα πολύ καλά»* ακόμα και αν δεν έχετε πάει..τόσο καλά.

12) «.. προσέξτε στα πρόσημα» έγραφε την προηγούμενη εβδομάδα σε ανάλογη λίστα αρθρογράφος εφημερίδας ευρείας κυκλοφορίας.Ποιος είμαι εγώ να διαφωνήσω. Προσέξτε λοιπόν τα πρόσημα.

13)Αν δεν βγαίνουν σαν αποτελέσματα ακέραιοι αριθμοί ή δεν χρησιμοποιήσατε κάποια από τις υποθέσεις για να λύσετε το θέμα ,τότε είτε έχετε κάνει λάθος είτε οι θεματοδοτες έχουν μια περίεργη αίσθηση χιούμορ.

14) Δεν λύνονται όλες οι εξισώσεις θεωρώντας συνάρτηση.

15)Πολλοι λένε για τον θρυλικό υποψήφιο, το όνομα του οποίου δεν σώζεται που κατόρθωσε να μάθει όλη την θεωρία την παραμονή της εξέτασης. Είναι τόσο αληθινός όσο και η διετή που αδυνατίζεις τρώγοντας τα πάντα.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

3.1(Μεζεδάκια)

i)Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ ώστε:

$$\int_1^2 f(x)dx = 3\ ,\ \int_2^4 f(x)dx = 12\ ,\ \int_4^6 f(x)dx = 20$$

Να αντιστοιχίσετε κάθε ολοκλήρωμα της στήλης Α στον αριθμό που εκφράζει η στήλη Β .

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\int_1^4 f(x)dx$	Α.-32
2. $\int_6^2 f(x)dx$	Β.35
3. $\int_1^6 f(x)dx$	Γ.15
4. $2\int_1^2 (1-f(x))dx$	Δ.-4
	Ε.-23
	ΣΤ.-15

ii)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,1]$ τέτοια ώστε:

$2f(x)f'(x) = 1 + f^2(x)$ **για κάθε** $x \in [0,1]$

Να δείξετε ότι

$$\frac{1+(f(1))^2}{1+(f(0))^2} = e$$

iii)Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} (\frac{\pi}{2} - x)^{1974} συνx dx = 0$

iv)Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **έτσι ώστε να ισχύει:**

$$\int_0^{\lambda} (εφ^2x + εφx)e^x dx = 1$$

Λύση

i) $\int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_4^2 f(x)dx = 3 + 2 = 15$ *άρα* $1 \to Γ$

$\int_6^2 f(x)dx = -\int_2^6 f(x)dx = -(\int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx) = -32$ *άρα* $2 \to A$

$\int_1^6 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx = 3 + 12 + 20 = 35$ *άρα* $3 \to B$

$2\int_1^2 (1-f(x))dx = 2(\int_1^2 1dx - \int_1^2 f(x)dx) = 2([x]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx)) = 2((2-1)-3) = -4$

ii)Ισχύει: $2f(x)f'(x) = 1 + f^2(x) \Leftrightarrow \frac{2f(x)f'(x)}{1+f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{(1+f^2(x))'}{1+f^2(x)} = 1$

Άρα

$$\int_0^1 \frac{(1+f^2(x))'}{1+f^2(x)}dx = \int_0^1 1dx \Leftrightarrow \left[\ln(1+f^2(x))\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \ln(1+f^2(1)) - \ln(1+f^2(0)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1+f^2(1)}{1+f^2(0)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1+f^2(1)}{1+f^2(0)} = e$$

iii) $\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)^{1974}\sigma\upsilon\nu x dx = 0$

θέτουμε $u = \frac{\pi}{2} - x$ οπότε $du = -dx$

Για $x = \pi$ τότε $u = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

Για $x = 0$ τότε $u = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)^{1974}\sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u^{1974}\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-u)du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u^{1974}\eta\mu u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} u^{1974}\eta\mu u du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{1974}\eta\mu u du \text{ ή}$$

$$\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)^{1974}\sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} u^{1974}\eta\mu u du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{1974}\eta\mu u du \quad (1)$$

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} u^{1974}\eta\mu u du$ θέτουμε $u = -\alpha$ οπότε $du = -d\alpha$

Για $u = -\frac{\pi}{2}$ τότε $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Για $u = 0$ τότε $\alpha = 0$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} u^{1974}\eta\mu u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\alpha)^{1974}\eta\mu(-\alpha)d\alpha = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^{1974}\eta\mu\alpha d\alpha \ (2)$$

Από (1),(2)

$$\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)^{1974}\sigma\upsilon\nu x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha^{1974}\eta\mu\alpha d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{1974}\eta\mu u du = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{1974}\eta\mu u du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{1974}\eta\mu u du = 0$$

iv)Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{\lambda}(\varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi x)e^x dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\lambda}(\varepsilon\varphi^2 x + 1 - 1 + \varepsilon\varphi x)e^x dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\lambda}((\varepsilon\varphi^2 x + 1)e^x - e^x + e^x\varepsilon\varphi x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\lambda}((\varepsilon\varphi x)'e^x + \left(e^x\right)'\varepsilon\varphi x - e^x)dx = 1 \Leftrightarrow \left[\varepsilon\varphi x \cdot e^x - e^x\right]_0^{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\lambda \cdot e^{\lambda} - e^{\lambda} - (-1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\lambda \cdot e^{\lambda} = e^{\lambda} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\lambda = 1 \overset{\lambda \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \lambda = \frac{\pi}{4}$$

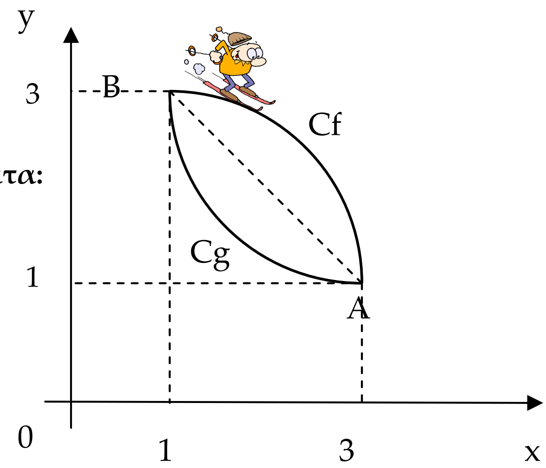
3.2.Εστω οι συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[1,3]$ οι οποίες έχουν γραφικές παραστάσεις τις Cf και Cg που είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ΑΒ του σχήματος.

i.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^3 (f(x)+g(x))dx$$

ii.Αν το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις Cf και Cg είναι 2 , να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_1^3 f(x)dx \quad \textbf{και} \quad \int_1^3 g(x)dx$$



iii.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^3 \left(\int_1^3 f(x)g(t)dt\right)dx$$

Λύση

i.Έστω Α1 το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των Cf και της ευθείας ΑΒ , οπότε Α1 είναι και το αντίστοιχο μεταξύ της Cg και ΑΒ ,Α2 το εμβαδό του χωρίου από την Cg και τις ευθείες χ=1,χ=3 και τον άξονα x'x.Ισχύει:

$$\int_1^3 (f(x)+g(x))dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = (2A1+A2)+A2 =$$

$$= 2(A1+A2) = 2\cdot(\text{ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ ΑΒΓΔ}) = 2\cdot\frac{1+3}{2}\cdot 2 = 8$$

ii.Από το ερώτημα i) έχουμε :

$$\int_1^3 (f(x)+g(x))dx = 8 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 8 \quad (1)$$

Επίσης από υπόθεση:

$$\int_1^3 (f(x)-g(x))dx = 2 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 2 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα και προκύπτει: $\int_1^3 f(x)dx = 5, \int_1^3 g(x)dx = 3$

iii. $\int_1^3 \left(\int_1^3 f(x)g(t)dt\right)dx = \int_1^3 f(x)\left(\int_1^3 g(t)dt\right)dx = \int_1^3 3f(x)dx = 3\int_1^3 f(x)dx = 3\cdot 5 = 15$

3.3Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x>1$

i) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ **για** $x>1$**.**

ii) Να δείξετε ότι: $\ln^2 x\cdot f'(x)+f^2(x)(\ln x-1)=0$ **,** $x>1$**.**

iii) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx$ **.**

iv) Έστω $g(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2(\pi x), 0\le x\le 1\\ f(x)+1 \quad ,x>1\end{cases}$

Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $[0,e]$ **και κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα** $I=\displaystyle\int_0^e g(x)dx$

Λύση

i) για $x>1\Leftrightarrow \ln x>0$,άρα $f(x)>0$.

ii) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$$\ln^2 x\cdot f'(x)+f^2(x)(\ln x-1)=\ln^2 x\frac{1-\ln x}{x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2(\ln x-1)=\frac{\ln^2 x\left(1-\ln x\right)}{x^2}+\frac{\ln^2 x(\ln x-1)}{x^2}=0$$

iii) Από το ερώτημα (ii) $\ln^2 x\cdot f'(x)+f^2(x)(\ln x-1)=0\Leftrightarrow \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ (1)

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx\overset{(1)}{=}\int_e^{e^2}\frac{-f'(x)}{f^2(x)}dx=\left[\frac{1}{f(x)}\right]_e^{e^2}=\frac{1}{f(e^2)}-\frac{1}{f(e)}=\frac{e^2-2e}{2}$$

Υπενθυμίζουμε ότι..

Για συναρτήσεις του τύπου $f(x)=\begin{cases}g(x), x<x_0\\ h(x), x\ge x_0\end{cases}$ *και*

Όπου,g,h συνεχείς συναρτήσεις και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *με* $\alpha<x_0<\beta$*.Για να υπολογίσουμε το* $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ *:*

•Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0

•Γράφουμε :

$$I=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{x_0}g(x)dx+\int_{x_0}^\beta h(x)dx$$

iv) $g(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu^2(\pi x), 0\le x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x}+1 \quad ,x>1\end{cases}$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1)\cup(1,e]$ ως πράξεις συνεχών εξετάζουμε την συνέχεια στο $x_0=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\dfrac{\ln x}{x}+1)=1$, $g(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=1$.

Άρα η g είναι συνεχής στο $[0,e]$.

$$I=\int_0^e g(x)dx=\int_0^1\sigma\upsilon\nu(2\pi x)dx+\int_1^e(\frac{\ln x}{x}+1)dx=\int_0^1\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\pi x)}{2}dx+\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx+\int_1^e 1dx=$$

$$=\int_0^1\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\pi x)}{2}dx+\int_1^e(\ln x)'\ln x dx+\int_1^e 1dx=\frac{1}{2}\left[x\right]_0^1+\frac{1}{4\pi}\left[\eta\mu(2\pi x)\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]_1^e+\left[x\right]_1^e=..=e$$

3.4 Η συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- $f''(x)=2f(x)f'(x)$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f'(0)=2, f(0)=1$

i)Να αποδείξετε ότι : $f'(x)=f^2(x)+1$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

ii)Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

iii)Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ **.**

iv)Να αποδείξετε ότι $I=\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx=\frac{1}{2}$ **.**

v)(Bonus)Να δείξετε ότι $f(x)+f(1-x)\neq 0$ **,για κάθε** $x\in\left[0,1\right]$**.**

Λύση

i)Έχουμε:

$f''(x)=2f(x)f'(x)\Leftrightarrow \left(f'(x)\right)'=\left(f^2(x)\right)'\Leftrightarrow f'(x)=f^2(x)+c,\ x\in\mathbb{R}$,c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αλλά $f'(0)=2, f(0)=1$ οπότε η (1) για $x=0: f'(0)=f^2(0)+c\Leftrightarrow 2=1+c\Leftrightarrow c=1$

άρα, $f'(x)=f^2(x)+1$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $f'(x)=f^2(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii)Παρατηρούμε ότι $f(0)=1$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα παίρνει την τιμή 1 ακριβώς μια φορά οπότε η χ=0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=1$.

iv)Θέτουμε

$1-x=u$ άρα $-dx=du$ με τα νέα άκρα :

- $x=0$ τότε $u=1$
- $x=1$ τότε $u=0$

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx=-\int_1^0\frac{f(1-u)}{f(1-u)+f(u)}du=\int_0^1\frac{f(1-u)+f(u)-f(u)}{f(1-u)+f(u)}du=\int_0^1\frac{f(1-u)+f(u)}{f(1-u)+f(u)}du+\int_0^1\frac{-f(u)}{f(1-u)+f(u)}du=$$

$$\int_0^1 1du-\int_0^1\frac{f(u)}{f(1-u)+f(u)}du=1-0+\int_0^1\frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}dx=1-I$$

Δηλαδή $I=1-I\Leftrightarrow 2I=1\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}$

v)Με άτοπο. Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\left[0,1\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)+f(1-x_1)=0$ (*)

Διακρίνουμε περιπτώσεις

-Αν $x_1\in\left(0,1\right)$ τότε $f(x_1)+f(1-x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=-f(1-x_1)$

Αν $x_1<1-x_1\Leftrightarrow x_1<\frac{1}{2}$ στο διάστημα $\left[x_1,1-x_1\right]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Bolzano αρα υπάρχει ένα $\xi\in\left(x_1,1-x_1\right)$ $(0<x_1<\xi<1-x_1<1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$

Αλλά $\xi>0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\xi)>f(0)\Leftrightarrow 0>1$ άτοπο.

Ανάλογα αν $x_1>1-x_1$

-Αν $x_1=0$ τότε η (*) : $f(0)+f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ δηλαδή $f(0)=f(1)$ άτοπο η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1

-Αν $x_1=1$, ομοίως.

Άρα, σε κάθε περίπτωση δεν θα υπάρχει $x_1\in\left[0,1\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)+f(1-x_1)=0$

3.5(all time classic μεζεδάκια…)

i)Έστω συνεχής συνάρτηση f για τη οποία ισχύει $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta$ για κάθε $x,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\int_0^{2\alpha} f(x)dx=2\alpha\beta$.

ii)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$,για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,όπου c σταθερά, να δείξετε ότι :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=(\beta-\alpha)f\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)$$

iii)Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και αντιστρέφεται, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta xf'(x)dx$$

Λύση

i) Ολοκληρώνουμε την σχέση που μας δόθηκε στο διάστημα $[0,\alpha]$

$$\int_0^\alpha f(\alpha+x)dx+\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx=\int_0^\alpha 2\beta dx \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^\alpha f(\alpha+x)dx$ θέτουμε $u=\alpha+x$ άρα $du=dx$ και τα νέα όρια ολοκλήρωσης είναι

$u_1=\alpha, u_2=2\alpha$ άρα $\int_0^\alpha f(\alpha+x)dx=\int_\alpha^{2\alpha} f(u)du$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx$ θέτουμε $u=\alpha-x$ άρα $du=-dx$ και τα νέα όρια ολοκλήρωσης είναι $u_1=\alpha, u_2=0$ άρα $\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx=-\int_\alpha^0 f(u)du$

Η (1)παιρνει την μορφή : $\int_0^\alpha f(\alpha+x)dx+\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx=\int_0^\alpha 2\beta dx \Leftrightarrow \int_\alpha^{2\alpha} f(u)du-\int_\alpha^0 f(u)du=\int_0^\alpha 2\beta dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{2\alpha} f(u)du=\beta\int_0^{2\alpha} du \Leftrightarrow \int_0^{2\alpha} f(u)du=2\beta[x]_0^\alpha \Leftrightarrow \int_0^{2\alpha} f(u)du=2\beta\alpha$

ii) $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta (c-f(\alpha+\beta-x))dx \quad (1)$

θέτω $\alpha+\beta-x=u \Leftrightarrow -dx=du$

Για $x=\alpha$ τότε $u=\beta$

Για $x=\beta$ τοτε $u=\alpha$

(1)

$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta (c-f(\alpha+\beta-x))dx \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta (c-f(u))du \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta cdu-\int_\alpha^\beta f(u)du \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta cdx-\int_\alpha^\beta f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta cdx \Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(x)dx=c(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx=c(\frac{\beta-\alpha}{2}) \quad (2)$

Η $f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$ ισχύει για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

•Για $x=\alpha$ τότε $f(\alpha)+f(\alpha+\beta-\alpha)=c \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)=c$

Άρα η (2) γίνεται : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (f(\alpha)+f(\beta))\frac{\beta-\alpha}{2}$

•Για $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ τότε $f(\frac{\alpha+\beta}{2})+f(\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{2})=c \Leftrightarrow f(\frac{\alpha+\beta}{2})+f(\frac{\alpha+\beta}{2})=c \Leftrightarrow 2f(\frac{\alpha+\beta}{2})=c$

Άρα η (2) γίνεται: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\frac{\alpha+\beta}{2})(\beta-\alpha)$

(Για δοκιμάστε να λύσετε με την χρήση της παραπάνω ιδιότητας το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \eta\mu^{2017}x dx$)

iii)Είναι:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

Θέτω $x=f(u) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=u$ τότε $dx=f'(u)du$

Για $x=f(\alpha)$ τότε $u=\alpha$

Για $x=f(\beta)$ τότε $u=\beta$

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} uf'(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$$

3.6.Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(1)=f(2)=0$.Να δείξετε ότι:

i)Υπάρχει μοναδικός $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ii)Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο ξ.

iii)Αν επιπλέον ισχύει $f'(1)=1$ και η f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$,να δείξετε ότι:

α) $f(\xi)<1$ **β)** $\int_1^{\xi} xf''(x)dx = 1-f(\xi)$

Λύση

i)Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$ (παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, συνεχής στο $[1,2]$, $f(1)=f(2)=0$) άρα μοναδικός $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ii) Η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ συνεπώς η f′ είναι γνησίως φθίνουσα , έτσι:

$$x<\xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x)>0$$

$$x>\xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x)<0$$

Συνεπώς f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\xi]$ και γνησίως φθίνουσα $[\xi,+\infty)$ με $f'(\xi)=0$ άρα η παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο ξ.

iii)α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0=1$ είναι:

(ε) $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ ή $y=x-1$

Η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ άρα η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την εφαπτομένη (ε) (με εξαίρεση το σημείο επαφής) άρα $f(x)\le x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ισχύει για χ=ξ: $f(\xi)\le\xi-1$, όμως $\xi<2\Leftrightarrow\xi-1<1$ άρα $f(\xi)<1$

β)

$$\int_1^{\xi} xf''(x)dx \overset{\Pi.O}{=} [xf'(x)]_1^{\xi} - \int_1^{\xi} x'f'(x)dx = [xf'(x)]_1^{\xi} - \int_1^{\xi} f'(x)dx = [xf'(x)]_1^{\xi} - [f(x)]_1^{\xi} = [xf'(x)-f(x)]_1^{\xi}$$

$$=(\xi f'(\xi)-f(\xi))-(1f'(1)-f(1)) = (-f(\xi))-(-1) = 1-f(\xi)$$

3.7Εστω η συνάρτηση f,με $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$ ορισμένη στο $(0,+\infty)$.

i)Να εφαρμόσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x$ στο διάστημα $[x,x+1]$ για $x>0$. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

ii)Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

iii)Να λύσετε την ανίσωση $(1+\frac{1}{x^2+1})^{x^2+1}<1,1^{10}$

iv)Να υπολογίσετε τα $h(1),h(2)$.Αν είναι γνωστό ότι $\int_1^2 h(x)dx=\frac{7}{2}$

να υπολογίσετε το $I=\int_2^{\frac{9}{4}} h^{-1}(x)dx$ (

Λύση

i)Θεωρούμε την συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=\ln x$.Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x,x+1]$, $x>0$.Επομένως για την φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[x,x+1]$.Άρα υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ με $x<\xi<x+1$ (1) τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln\frac{x+1}{x}\ (2)$$

Η (1) δίνει: $\frac{1}{x}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{x+1}$ (3)

Από(2),(3) προκύπτει $\frac{1}{x}>\ln\frac{x+1}{x}>\frac{1}{x+1}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα: $\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}>0\Leftrightarrow f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

i)Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.Είναι

$$h(x)=(1+\frac{1}{x})^x\Leftrightarrow\ln h(x)=\ln(1+\frac{1}{x})^x\Leftrightarrow\ln h(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})\Leftrightarrow\frac{h'(x)}{h(x)}=\ln(1+\frac{1}{x})+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\ln(1+\frac{1}{x})+x\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\Leftrightarrow\frac{h'(x)}{h(x)}=\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x+1}\Leftrightarrow\frac{h'(x)}{h(x)}=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$h'(x)=h(x)\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\right)\ (4)$$

Όμως $h(x)=(1+\frac{1}{x})^x>0$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ και από το ερώτημα (i) $\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}>0$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ άρα $h'(x)>0$ για $x>0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

iii)

$$(1+\frac{1}{x^2+1})^{x^2+1}<1,1^{10}\Leftrightarrow(1+\frac{1}{x^2+1})^{x^2+1}<\left(\frac{11}{10}\right)^{10}\Leftrightarrow(1+\frac{1}{x^2+1})^{x^2+1}<\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x^2+1)<h(10)\overset{h\nearrow\text{στο }(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}x^2+1<10\Leftrightarrow x^2<9\Leftrightarrow-3<x<3$$

iv) $h(1)=(1+\frac{1}{1})^1=2,\ h(2)=(1+\frac{1}{2})^2=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$

$I=\int_1^2 h^{-1}(x)dx$

Θέτω $x=h(u)\Leftrightarrow h^{-1}(x)=u$ τότε $dx=h'(u)du$

Για νέα όρια ολοκλήρωσης

$x=\frac{9}{4}\Leftrightarrow h(u)=h(2)\overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=2$

$x=2\Leftrightarrow h(u)=h(1)\overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=1$

$$\int_2^{\frac{9}{4}} h^{-1}(x)dx=\int_1^2 h^{-1}(h(u))\cdot h'(u)du=\int_1^2 u\cdot h'(u)du=\left[u\cdot h(u)\right]_1^2-\int_1^2 h(u)du=2h(2)-1h(1)-\int_1^2 h(u)du=$$

$$=2\frac{9}{4}-1\cdot 2-\frac{7}{2}=-1$$

3.8 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$
- $g(x)=x^3+3x-1$

i)Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$$

ii)Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x))=1$$

iii)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{g(x)-2x^2-4x+1}{e^x+x^3+x^2+x+1}dx$$

Λύση

i)Για κάθε $x\in\mathbb{R}:(f(x)+x)(f'(x)+1)=x\Leftrightarrow 2(f(x)+x)(f'(x)+1)=2x\Leftrightarrow\left[\left(f(x)+x\right)^2\right]'=\left(x^2\right)'$

Άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c$ όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός

Για $x=0$: $f(0)+0=0^2+c\Leftrightarrow c=1$

Άρα ,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$ (1)

Η συνάρτηση $f(x)+x,x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών , ισχύει:

$\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η $f(x)+x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έτσι η $f(x)+x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.Επειδή όμως $f(0)+0=1>0$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $f(x)+x>0$ οπότε από την (1) $f(x)+x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$

ii) $f'(x)=\sqrt{x^2+1}-x\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ για $x\in\mathbb{R}$

$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\geq x\Rightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$ για $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.Η εξίσωση

$f(g(x))=1\Leftrightarrow f(g(x))=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0$

$g'(x)=3x^2+6x$, $g'(x)=0\Leftrightarrow ..\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g΄(x)		+	0	-	0	+	
g (x)		↗		↘		↗	

Αν $x\in(-\infty,-1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $g(-1)=-\dfrac{1}{2}$ άρα $g\left((-\infty,-1]\right)=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$

Αν $x\in(-1,0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=-\dfrac{1}{2}$, $g(0)=-1$ άρα $g\left((-1,0]\right)=\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

Αν $x\in(0,+\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ άρα $g\left((0,+\infty)\right)=(-1,+\infty)$

$0\notin\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $(-\infty,-1]$

$0\notin\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $(-1,0]$

$0\in(-1,+\infty)$ οπότε έχει ρίζα στο $(0,+\infty)$ η οποία είναι μοναδική αφού g γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Τελικά, η εξίσωση $f(g(x))=1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iii) $$\int_0^1\frac{g(x)-2x^2-4x+1}{e^x+x^3+x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{x^3+3x-1-2x^2-4x+1}{e^x+x^3+x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{x^3-2x^2-x}{e^x+x^3+x^2+x+1}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{(e^x+x^3+x^2+x+1)-(e^x+3x^2+2x+1)}{e^x+x^3+x^2+x+1}dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{e^x+3x^2+2x+1}{e^x+x^3+x^2+x+1}dx=$$

$$=\int_0^1 1dx-\int_1^2\frac{(e^x+x^3+x^2+x+1)'}{e^x+x^3+x^2+x+1}dx=\left[x\right]_0^1+ln\left[e^x+x^3+x^2+x+1\right]_0^1=\ldots$$

3.9 i)Έστω η συνάρτηση g ,η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) .Αν ισχύει η σχέση

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx=g(\beta)-g(\alpha)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=g'(\xi)$.

ii)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα .Να αποδείξετε ότι:

$$xf(x)>\int_0^x f(t)dt \text{ **για κάθε** } x>0\,.$$

(Μπορείτε να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά;)

Λύση

i)Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει παράγουσα G της g στο παραπάνω διάστημα. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού ισχύει: $\int_\alpha^\beta g(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)$

Όμως από υπόθεση $\int_\alpha^\beta g(x)dx=g(\beta)-g(\alpha)$

Άρα $G(\beta)-G(\alpha)=g(\beta)-g(\alpha)\Leftrightarrow G(\beta)-g(\beta)=G(\alpha)-g(\alpha)$ (1)

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x)=G(x)-g(x)\,,\, x\in[\alpha,\beta]$$

Τότε

•Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ (διαφορά συνεχών)

•Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$h'(x)=G'(x)-g'(x)=g(x)-g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

$h(\alpha)=G(\alpha)-g(\alpha)=G(\beta)-g(\beta)=h(\beta)$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)-g'(\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)=g'(\xi)$.

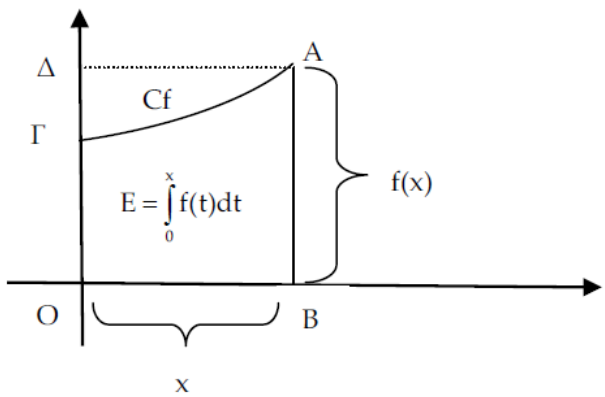
ii)Η ζητούμενη ανισότητα για $x>0$ γράφεται

$$xf(x)>\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow f(x)\int_0^x dt>\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow \int_0^x f(x)dt-\int_0^x f(t)dt>0\Leftrightarrow \int_0^x [f(x)-f(t)]dt>0$$

Η τελευταία ανισότητα είναι αληθής, αφού για κάθε $x>0$ έχουμε $t\in[0,x]$,δηλαδή $0\le t\le x$ Τώρα επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα συμπεραίνουμε ότι $f(t)\le f(x)$.Άρα, η συνεχής συνάρτηση $h(t)=f(x)-f(t), t\in[0,x]$ είναι αρνητική και όχι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,x]$.

Επομένως $\int_0^x h(t)dt>0\Leftrightarrow \int_0^x [f(x)-f(t)]dt>0$

Τι σημαίνει γεωμετρικά η παραπάνω ανισοτική σχέση; Ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cf ,τον αξονα x'x τον άξονα y'y και την ευθεία ΑΒ είναι μικρότερο από το εμβαδό του ορθογωνίου ΟΔΑΒ.



3.10.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{2}-\ln x, x>0$

i)Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της Cf στο οποίο η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον x'x.

ii)Να αποδείξετε ότι $f(x)>1$ **για κάθε** $x\ge 1$.

iii)Να αποδείξετε ότι $e^{2016}-e^{2015}>\ln\left(\dfrac{2016}{2015}\right)^2$.

iv)Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

v) **Η συνάρτηση g έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο** $\mathbb{R}$ **.Αν στο** $x_0=\lambda>0$ **παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με το 0,να αποδείξετε ότι** $\int_0^\lambda \dfrac{2x^2 f(x)}{e^x-2\ln x}g''(x)dx=2\int_0^\lambda g(x)dx$

Λύση

i)Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα

$$f'(x)=\frac{e^x}{2}-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-2}{2x}, x>0$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0\Leftrightarrow \dfrac{xe^x-2}{2x}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} xe^x-2=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=xe^x-2$, $x\in\left[\frac{1}{4},1\right]$. Έχουμε:

$g(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}-2<0$, $g(1)=e^1-2>0$ η g συνεχής στο $\left[\frac{1}{4},1\right]$ άρα από το θεώρημα Bolzano

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{4},1\right)$ τέτοιο ώστε : $g(x_0)=x_0e^{x_0}-2=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$

ii)Για κάθε $x>1$

$e^x>e^1\Rightarrow\frac{e^x}{2}>\frac{e}{2}$ (1) και $\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow-\frac{1}{x}>-1$ (2)

(1) +(2) $\frac{e^x}{2}-\frac{1}{x}>\frac{e}{2}-1>0\Rightarrow f'(x)>0$ για κάθε $x>1$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$[1,+\infty)$ άρα $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{e}{2}>1$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

iii) Από την μονοτονία της f

$$f(2016)>f(2015)\Rightarrow\frac{e^{2016}}{2}-\ln 2016>\frac{e^{2015}}{2}-\ln 2015\Leftrightarrow\frac{e^{2016}}{2}-\frac{e^{2015}}{2}>\ln 2016-\ln 2015\Leftrightarrow\frac{e^{2016}-e^{2015}}{2}>\ln\frac{2016}{2015}$$

$$e^{2016}-e^{2015}>2\ln\frac{2016}{2015}\Leftrightarrow e^{2016}-e^{2015}>\ln\left(\frac{2016}{2015}\right)^2$$

iv)Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^x}{2}-\ln x\right)+\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}-\ln\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{2}-\ln x+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}+\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{2}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{\frac{1}{x}}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{\frac{1}{x}}}{2}=+\infty$$

v) Η συνάρτηση g στο $x_0=\lambda>0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο $g(\lambda)=0$, άρα από το θεώρημα Fermat είναι $g'(\lambda)=0$.

$$\int_0^\lambda\frac{2x^2f(x)}{e^x-2\ln x}g''(x)dx=\int_0^\lambda\frac{2x^2\left(\frac{e^x}{2}-\ln x\right)}{e^x-2\ln x}g''(x)dx=\int_0^\lambda x^2g''(x)dx=\left[x^2g'(x)\right]_0^\lambda-\int_0^\lambda 2xg'(x)dx=$$

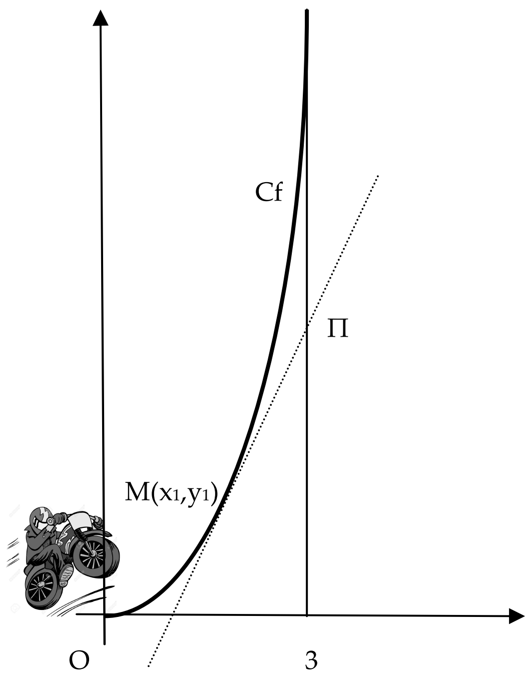
$$=\left[x^2g'(x)\right]_0^\lambda-(\left[x^2g(x)\right]_0^\lambda-\int_0^\lambda 2g(x)dx)=\left[x^2g'(x)\right]_0^\lambda-\left[x^2g(x)\right]_0^\lambda+2\int_0^\lambda g(x)dx\underset{g(\lambda)=0}{\overset{g'(\lambda)=0}{=}}2\int_0^\lambda g(x)dx$$

3.11.Ένας μοτοσικλετιστής,ο Μήτσος ,κινείται στο επίπεδο γράφοντας μια καμπύλη. Οι συντεταγμένες του κατά την χρονική στιγμή t δίνονται από τους τύπους:

$$x=\ln t,\ y=(\ln t)^2$$

i) Να βρείτε την συνάρτηση f ,της οποίας η γραφική παράσταση Cf είναι η τροχιά που γράφει ο μοτοσικλετιστής Μήτσος.
ii)Να βρείτε την εφαπτομένη της τροχιάς αυτής στο τυχαίο σημείο της Cf $M(x_1,y_1)$
iii)Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $M(x_1,y_1)$, $0<x_1<3$ τέμνει στο σημείο Π ένα τοίχο Τ παράλληλο προς τον άξονα y'y που τα σημεία του ικανοποιούν την εξίσωση x=3 (σχήμα). Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θέσεως του Π στον τοίχο Τ (ταχύτητα), όταν το σημείο Μ βρίσκεται στην θέση x=1.
iv)Δυο πόλεις Α,Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση 216 km.Ο Μήτσος με την μοτοσικλέτα του και ο Κώτσος- ένας φίλος του- επίσης με μοτοσικλέτα ξεκινούν ταυτόχρονα ο ένας από την πόλη Α και ο άλλος από την πόλη Β κατευθυνόμενοι ο πρώτος στην πόλη Β και δεύτερος στην πόλη Α ,οι ταχύτητες τους αντίστοιχα είναι $u_1=t^2+3t\ km/h$ **και** $u_2=5t\ km/h$ **αντίστοιχα .Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο οι δυο μοτοσικλετιστές θα συναντηθούν και σε ποιο σημείο μεταξύ των δυο πόλεων;**

Λύση



i) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=(\ln t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln t \\ y=x^2 \end{cases}$ άρα $f(x)=x^2, x>0$

ii)Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της Cf στο M είναι

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y-x_1^2=2x_1(x-x_1) \Leftrightarrow y=2x_1x-x_1^2$

iii)Η ευθεία αυτή τέμνει τον τοίχο Τ στο σημείο όπου χ=3 δηλαδή

$y=2x_1(3)-x_1^2 \Leftrightarrow y=6x_1-x_1^2$ άρα οι συνταγμένες του μεταβλητού σημείου Π είναι: $\Pi(x_1, 6x_1-x_1^2)$

$$x_1(t)=\ln t$$
$$y_1(t)=6\ln t-\ln^2 t$$

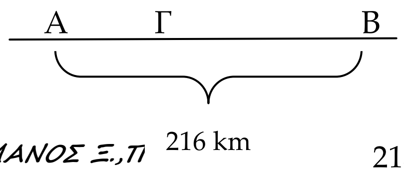
Παραγωγίζουμε εφόσον αναζητούμε τον ρυθμό μεταβολής της θέσεως του Π

$$x_1'(t)=(\ln t)'=\frac{1}{t}$$
$$y_1'(t)=\frac{6}{t}-\frac{2\ln t}{t}$$

Από υπόθεση ,όμως $x_1=1$ άρα $\ln t=1 \Leftrightarrow t=e$

Και με αντικατάσταση $y'(t)=\frac{6}{e}-\frac{2\ln e}{e}=\frac{4}{e}$

iv)Έστω t_0 η διάρκεια της κίνησης των δυο μοτοσικλετιστών μέχρι την συνάντησης τους στο σημείο Γ. Είναι τότε

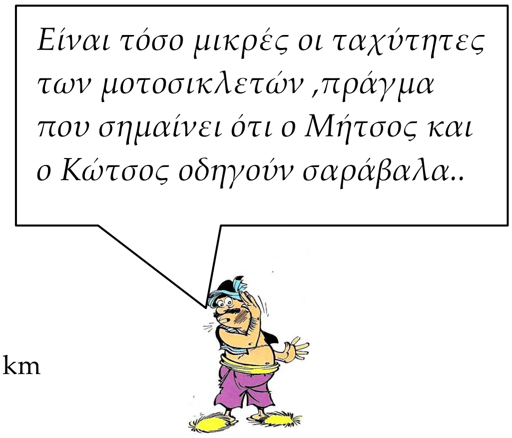


$(ΑΓ)=\int_0^{t_0}(t^2+3t)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right]_0^{t_0}=\frac{t_0^{\ 3}}{3}+\frac{3t_0^{\ 2}}{2}$ km

$(ΒΓ)=\int_0^{t_0}5tdt=\left[\frac{5t^2}{2}\right]_0^{t_0}=\frac{5t_0^{\ 2}}{2}$ km

Όμως $(ΑΓ)+(ΒΓ)=216\Leftrightarrow\frac{5t_0^{\ 2}}{2}+\frac{t_0^{\ 3}}{3}+\frac{3t_0^{\ 2}}{2}=216\Leftrightarrow...\Leftrightarrow t_0=6$ h

Για $t_0=6$ h προκύπτει $(ΑΓ)=\frac{6^3}{3}+\frac{3\cdot 6^2}{2}=126$ km , $(ΒΓ)=\frac{5\cdot 6^2}{2}=90$ km



3.12 Δινεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x-1}{x^2}\in\mathbb{R}$
- $(f'(x))^2+(\lambda f(x))^2\le\lambda(f^2(x))'$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

i)Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

ii)Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{\lambda x}$ **,** $\lambda>0$

iii)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράσταση στης f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv)Να αποδείξετε ότι το εμβαδό $E(\lambda)$ **του χωρίου που περικλείεται από την Cf,την παραπάνω εφαπτομένη και τον άξονα x'x είναι** $E(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$

Λύση

i)Η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, έτσι

θέτω $g(x)=\frac{f(x)-x-1}{x^2}\Leftrightarrow x^2g(x)=f(x)-x-1\Leftrightarrow x^2g(x)+x+1=f(x)$

Λαμβάνουμε όρια και εφαρμόζουμε ιδιότητες ορίων γνωρίζοντας ότι τα όρια υπάρχουν

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2g(x)+x+1\right)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\Leftrightarrow 0^2g(0)+0+1=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ αλλά f συνεχής στο 0 οπότε

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

ii)Έχουμε:

$(f'(x))^2+(\lambda f(x))^2\le\lambda(f^2(x))'\Leftrightarrow(f'(x))^2+(\lambda f(x))^2\le 2\lambda f(x)f'(x)\Leftrightarrow(f'(x))^2+(\lambda f(x))^2-2\lambda f(x)f'(x)\le 0\Leftrightarrow$

$(f'(x)-\lambda f(x))^2\le 0\Leftrightarrow f'(x)-\lambda f(x)=0\Leftrightarrow e^{-\lambda x}f'(x)-\lambda e^{-\lambda x}f(x)=0\Leftrightarrow e^{-\lambda x}f'(x)+(e^{-\lambda x})'f(x)=0\Leftrightarrow$

$\left(e^{-\lambda x}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-\lambda x}f(x)=c\Leftrightarrow f(x)=ce^{\lambda x}$

Αλλά, $f(0)=1$ έτσι $f(0)=ce^{\lambda\cdot 0}\Leftrightarrow c=1$, τελικά $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

iii)Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε η εξίσωση της Cf στο σημείο Α είναι:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0)$

Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων

$0-e^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow -e^{\lambda x}=-\lambda e^{\lambda x_0}x_0\Leftrightarrow 1=\lambda x_0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y-e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}=\lambda e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}(x-\frac{1}{\lambda})\Leftrightarrow y-e=\lambda e(x-\frac{1}{\lambda})\Leftrightarrow y-e=\lambda ex-e\Leftrightarrow y=\lambda ex$

iv)Η f είναι κυρτή διότι $f''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}>0$ άρα η εφαπτομένη στο Α βρίσκεται «κάτω» από την Cf, δηλαδή

$f(x)\geq \lambda ex \Leftrightarrow f(x)-\lambda ex\geq 0$

Έχουμε

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda}}(f(x)-\lambda ex)dx=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}(e^{\lambda x}-\lambda ex)dx=\left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}-\lambda e\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=\frac{e^{\lambda\frac{1}{\lambda}}}{\lambda}-\lambda e\frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}{2}-\frac{e^{\lambda\cdot 0}}{\lambda}+\lambda e\frac{0^2}{2}=\frac{e}{\lambda}-\frac{e}{2\lambda}-\frac{1}{\lambda}=\frac{2e}{2\lambda}-\frac{e}{2\lambda}-\frac{2}{2\lambda}=\frac{e-2}{2\lambda}$$

3.13 Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(1)=0$, η όποια ικανοποίει την σχέση: $f(f'(x))+f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

Να αποδείξετε ότι :

i) $f'(1)=1$

ii) $(f' o f')(x)=x$ **,για κάθε** $x>0$

iii) $xf'(x)+f'(x)=0$ **,για κάθε** $x>0$

iv) $f(x)=\ln x$ **, για κάθε** $x>0$

v) Να βρεθεί το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την Cf,τον άξονα x'x και την ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ **,** $\lambda>1$

vi)Να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to 1^+}\dfrac{3948E(\lambda)}{(\lambda-1)^2}$

vii) Να αποδείξετε ότι $x\ln x\geq x-1$ **για κάθε** $x\geq 1$**.**

viii)Αν $\lambda>1$ **να αποδείξετε ότι** $\ln\lambda\geq\dfrac{3\lambda^2-4\lambda+1}{2\lambda^2}$**.**

(Υπόδειξη : χρησιμοποιήστε το ερώτημα (viii))

Λύση

i)Από υπόθεση έχουμε: $f(f'(x))+f(x)=0$ (1)

Για $x=1$: $f(f'(1))+f(1)=0\Leftrightarrow f(f'(1))=0$ (2)

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και 1-1 οπότε

$f(f'(1))=0\Leftrightarrow f(f'(1))=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f'(1)=1$

ii)Επειδή ισχύει η (1) για κάθε $x>0$ και ορίζεται η $(fof')(x)$ στο $(0,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι: $f'(x)>0$,για κάθε $x>0$.Θέτουμε στην (1) όπου x το $f'(x)$ και παίρνουμε:

$f(f'(f'(x)))+f(f'(x))=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(f'(f'(x)))-f(x)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(f'(f'(x)))=f(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f'(f'(x))=x\Leftrightarrow(f'of')(x))=x$ (3)

iii)Παραγωγίζουμε την (1)

$f'(f'(x))f''(x)+f'(x)=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow} xf''(x)+f'(x)=0$ (4) για κάθε $x>0$

iv)Από την (4) έχουμε:

$xf''(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow xf''(x)+x'f'(x)=0\Leftrightarrow\left(xf'(x)\right)'=0\Leftrightarrow xf'(x)=c$ (5)

Αλλά $f'(1)=1$ οπότε η (5) γίνεται $1f'(1)=c\Leftrightarrow c=1$

$xf'(x)=1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x)=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=\ln x+c_1$.Όμως $f(1)=0$ άρα $f(1)=\ln 1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$

Τελικά , $f(x)=\ln x$, για κάθε $x>0$.

v) $f(x)=\ln x$

Επειδή, η f είναι συνεχής στο $[1,\lambda]$ και με θετικές τιμές σε αυτό ή μηδέν ,αφού $\ln x\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$ έχουμε:

$E(\lambda)=\int_1^\lambda \ln x dx=\int_1^\lambda x'\ln x dx=\left[x\ln x\right]_1^l-\int_1^\lambda x\frac{1}{x}dx=\left[x\ln x\right]_1^l-\int_1^\lambda 1dx==\left[x\ln x\right]_1^\lambda-\left[x\right]_1^\lambda=\left[x\ln x-x\right]_1^\lambda=$

$=\lambda\ln\lambda-\lambda-1\ln 1+1=\lambda\ln\lambda-\lambda+1$

vi)Ισχύει:

$$\lim_{\lambda\to1^+}\frac{3948E(\lambda)}{(\lambda-1)^2}=\lim_{\lambda\to1^+}\frac{3948(\lambda\ln\lambda-\lambda+1)}{(\lambda-1)^2}=3948\lim_{\lambda\to1^+}\frac{(\lambda\ln\lambda-\lambda+1)}{(\lambda-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.Hospital}{=}}3948\lim_{\lambda\to1^+}\frac{(\lambda\ln\lambda-\lambda+1)'}{\left((\lambda-1)^2\right)'}=$$

$$3948\lim_{\lambda\to1^+}\frac{(\ln\lambda-1+1)}{\left(2(\lambda-1)\right)}=3948\lim_{\lambda\to1^+}\frac{\ln\lambda}{2(\lambda-1)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.Hospital}{=}}3948\lim_{\lambda\to1^+}\frac{(\ln\lambda)'}{(2(\lambda-1))'}=3948\lim_{\lambda\to1^+}\frac{\frac{1}{\lambda}}{2}=3948\lim_{\lambda\to1^+}\frac{1}{2\lambda}=3948\frac{1}{2}=1974$$

vii)θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=x\ln x-x+1$ με $x\ge1$, την εξετάζουμε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα(τετριμμένο) και διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ άρα για κάθε $x\ge1$ ισχύει $g(x)\ge g(1)\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge1\ln1-1+1\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge0\Leftrightarrow x\ln x\ge x-1$

viii)Από το ερώτημα (vii) ισχύει για κάθε $x\ge1$ ισχύει $x\ln x\ge x-1$ (*)

Ολοκληρώνουμε την (*)με άκρα 1,λ

$$\int_1^\lambda x\ln x dx\ge\int_1^\lambda(x-1)dx\Leftrightarrow\int_1^\lambda\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx\ge\left[x-1\right]_1^\lambda\Leftrightarrow\left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\ge\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^\lambda-\int_1^\lambda\frac{x}{2}dx\ge\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^\lambda\Leftrightarrow\left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^\lambda-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^\lambda\ge\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^\lambda\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\lambda^2\ln\lambda}{2}-\frac{1^2\ln1}{2}\right)-\left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{1^2}{4}\right)\ge\left(\frac{\lambda^2}{2}-\lambda\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\Leftrightarrow\frac{\lambda^2\ln\lambda}{2}-\frac{\lambda^2-1}{4}\ge\frac{\lambda^2}{2}-\lambda+\frac{1}{2}$$

$$2\lambda^2\ln\lambda-\lambda^2+1\ge2\lambda^2-4\lambda+2\Leftrightarrow2\lambda^2\ln\lambda\ge3\lambda^2-4\lambda+1\Leftrightarrow\ln\lambda\ge\frac{3\lambda^2-4\lambda+1}{2\lambda^2}$$

3.14 (ολοκληρωτικά μεζεδάκια…)

Α. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,με $\alpha<\beta$,τότε να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)$ **για κάθε** $x\in\left[\alpha,\beta\right]$

ii) $2\int_\alpha^\beta f(x)\le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha)$

Β.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{-\nu x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$

i)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii)Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

iii)Να αποδείξετε ότι: $2\le e^2\nu^2\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}}xe^{-\nu x}dx\le e$

Λύση

Α.i)Η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα για $x=\alpha$.Έστω $x\in\left(\alpha,\beta\right]$, από το Θ.Μ.Τ για την f στο $\left[\alpha,x\right]$, υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,x\right)$ τέτοιο , ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

Όμως η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι $\alpha<\xi\le x\le\beta$ θα εχουμε:

$$f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<f'(\beta)\Leftrightarrow f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)$$

ii)Για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ ισχύει ότι

$$f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)\Leftrightarrow f(x)\le f'(\beta)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

Οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha)dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)\left[\frac{x^2}{2}-\alpha x\right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)((\frac{\beta^2}{2}-\alpha\beta)-(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha^2)) + f(\alpha)(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \le f'(\beta)(\frac{\beta^2}{2}-\alpha\beta+\frac{\alpha^2}{2}) + f(\alpha)(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)(\frac{\beta^2}{2}-\alpha\beta+\frac{\alpha^2}{2}) + f(\alpha)(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)(\frac{\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}{2}) + f(\alpha)(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta-\alpha)$$

B.i)Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \left(xe^{-\nu x}\right)' = e^{-\nu x} - \nu x e^{-\nu x} = e^{-\nu x}(1-\nu x)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{\nu}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\nu}, +\infty\right)$ ενώ έχει ολικό μέγιστο το $f(\frac{1}{\nu}) = \frac{1}{e\nu}$.

ii)Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = \left(e^{-\nu x}(1-\nu x)\right)' = .. = \nu e^{-\nu x}(\nu x - 2)$.Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{2}{\nu}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{2}{\nu}, +\infty\right)$ ενώ έχει σημείο καμπής το $A(\frac{2}{\nu}, \frac{2}{e^2\nu})$

iii)Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right]$,άρα:

$$\frac{1}{\nu} \le x \le \frac{2}{\nu} \Leftrightarrow f(\frac{1}{\nu}) \ge f(x) \ge f(\frac{2}{\nu}) \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(\frac{1}{\nu})dx \ge \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x)dx \ge \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(\frac{2}{\nu})dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \frac{1}{\nu}e^{-\nu\frac{1}{\nu}}dx \ge \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x)dx \ge \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \frac{2}{\nu}e^{-\nu\frac{2}{\nu}}dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \frac{1}{\nu e}dx \ge \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x)dx \ge \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \frac{2}{\nu e^2}dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} \nu e dx \ge \nu^2 e^2 \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x)dx \ge \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} 2\nu dx \Leftrightarrow \nu e\left(\frac{2}{\nu}-\frac{1}{\nu}\right) \ge \nu^2 e^2 \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} f(x)dx \ge 2\nu\left(\frac{2}{\nu}-\frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow e \ge e^2\nu^2 \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx \ge 2$$

3.15 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln f(x)} \text{ ,για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i)Να αποδείξετε ότι $f(x) > 1$.

ii)Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii)Να αποδείξετε ότι $\ln f(x) < f(x)$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv)Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$.

v)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)+\ln f(x)}{\ln f(x)-1}}$.

vi)Αν η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο, να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{f(x)+\ln f(x)^{f(x)}}dx = \frac{e}{f(1)} - \frac{1}{f(0)}.$$

Λύση

i)Είναι $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln f(x)} \Leftrightarrow \ln f(x)=\dfrac{e^x}{f(x)}>0 \Leftrightarrow \ln f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>1$

ii)Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$ με άτοπο.

Έστω ότι $f(x_1)\ge f(x_2)$ (1).Τοτε έχουμε:

$$\ln f(x_1)\ge \ln f(x_2) \quad (2)$$

Τα μέλη στις ανισότητες (1) και (2) είναι θετικά , οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές, προκύπτει ότι:

$$f(x_1)\ln f(x_1)\ge f(x_2)\ln f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1}\ge e^{x_2} \Leftrightarrow x_1\ge x_2 \quad \text{άτοπο}$$

ii)Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει ότι:

$$\ln x\le x-1<x \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Άρα ισχύει και $\ln f(x)<f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\ln f(x)<f(x) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)\ln f(x)<f^2(x) \Leftrightarrow e^x<f^2(x) \Leftrightarrow \sqrt{e^x}<\sqrt{f^2(x)} \Leftrightarrow |f(x)|>e^{\frac{x}{2}} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)>e^{\frac{x}{2}}$$

Όμως είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)} \overset{f(x)=u}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u} \underset{D.L.Hospital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)'}{u'}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{1}{u}}{1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0$$

v) $$\left(1+\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)+\ln f(x)}{\ln f(x)-1}}=e^{\frac{f(x)+\ln f(x)}{\ln f(x)-1}\ln\left(1+\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right)}=e^{\frac{f(x)+\ln f(x)}{f(x)}\frac{\ln f(x)}{\ln f(x)-1}\frac{f(x)}{\ln f(x)}\ln\left(1+\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right)}$$

Όμως

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+\ln f(x)}{f(x)}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x)-1} \overset{u=\ln f(x)}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{u-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{\ln f(x)}\cdot\ln\left(1+\dfrac{\ln f(x)}{f(x)}\right)\right] \overset{u=\frac{\ln f(x)}{f(x)}}{=} \lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} \underset{D.L.Hospital}{=} ..=1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)+\ln f(x)}{\ln f(x)-1}}=e^{1\cdot1\cdot1}=e$$

vi)Η f είναι παραγωγίσιμη ,άρα μπορούμε να παραγωγίσουμε την αρχική σχέση. Έτσι:

$$f'(x)\ln f(x)+f'(x)=e^x \Leftrightarrow f'(x)(1+\ln f(x))=e^x \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x}{1+\ln f(x)}$$

Το ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή:

$$\int_0^1\frac{e^x}{f(x)+\ln f(x)^{f(x)}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{f(x)+f(x)\ln f(x)}dx=\int_0^1\frac{e^x}{f(x)(1+\ln f(x))}dx=$$

$$\overset{f'(x)=\frac{e^x}{1+\ln f(x)}}{=}\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln f(x)\right]_0^1=\ln f(1)-\ln f(0) \overset{\ln f(x)=\frac{e^x}{f(x)}}{=} \frac{e}{f(1)}-\frac{1}{f(0)}$$

3.16 (βασικά πράγματα…)

Α. Να βρείτε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **για την οποία ισχύει**

$$g(0)=1,\ \textbf{και}\ g'(x)=\int_0^1 g(x)dx$$

Β.Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο** $\mathbb{R}$**.Η ευθεία** $y=g(x)-x-1$ **εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο** $A(1,f(1))$**.**

i)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)-f(x)}{x-1}$

ii)Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt>2$

iii)Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ **τέτοιος ώστε** $\int_0^2 f(t)dt=2f(\xi)$

ΛύσηΑ. θέτουμε $\int_0^1 g(x)dx=\kappa$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η δοθείσα σχέση γράφεται:

$g'(x)=\kappa \Leftrightarrow g'(x)=(\kappa x)' \Leftrightarrow g(x)=\kappa x+c, c\in\mathbb{R}$ σταθερός .Όμως $g(0)=1$ έτσι

$\kappa\cdot0+c=1\Leftrightarrow c=1$.Επομένως $g(x)=\kappa x+1$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έχουμε λοιπόν:

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1(\kappa x+1)dx\Leftrightarrow\kappa=\int_0^1(\kappa x+1)dx\Leftrightarrow\kappa=\left[\frac{\kappa x^2}{2}+x\right]_0^1\Leftrightarrow\kappa=\frac{\kappa}{2}+1\Leftrightarrow\kappa=2$$

Άρα $g(x)=2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β.i) Από την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου έχουμε:

$f'(1)=\lambda_\varepsilon=1$ άρα $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

Επίσης το σημείο επαφής $A(1,f(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη ευθεία

$(\varepsilon): y=g(x)-x-1\Leftrightarrow y=2x+1-x-1\Leftrightarrow y=x$

Οπότε $f(1)=1$.Από τα παραπάνω το ζητούμενο

όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)-f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)(f(x)-1)}{x-1}=f(1)f'(1)=1$

ii)Η συνάρτηση f της Cf στο σημείο Α(1,f(1)) έχει εξίσωση $y=x$ γνωρίζουμε ότι η f είναι κυρτή.

Επομένως η Cf βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε) με εξαίρεση το σημείο καμπής. Δηλαδή,

$f(x)\ge x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει για x=1)

Άρα η συνεχής συνάρτηση $f(x)-x$ είναι μη αρνητική και όχι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,2]$.Οπότε,

$$\int_0^2(f(x)-x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 xdx>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx>\int_0^2 xdx\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx>2\Leftrightarrow\int_0^2 f(t)dt>2$$

iii)Έστω F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.Άρα

$$\int_0^2 f(t)dt=F(2)-F(0)=2\frac{F(2)-F(0)}{2-0}$$

Καλό είναι να ξέρω..

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$,F μια παράγουσα της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.Το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και το θεώρημα μέσης τιμής μας δίνουν

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=F(\beta)-F(\alpha)=$$

$$=(\beta-\alpha)\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}=$$

$$=(\beta-\alpha)F'(\xi)=(\beta-\alpha)f(\xi)$$

για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$

Επίσης η F είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\left[0,2\right]$.Άρα από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in \left(0,2\right)$ τέτοιο ώστε

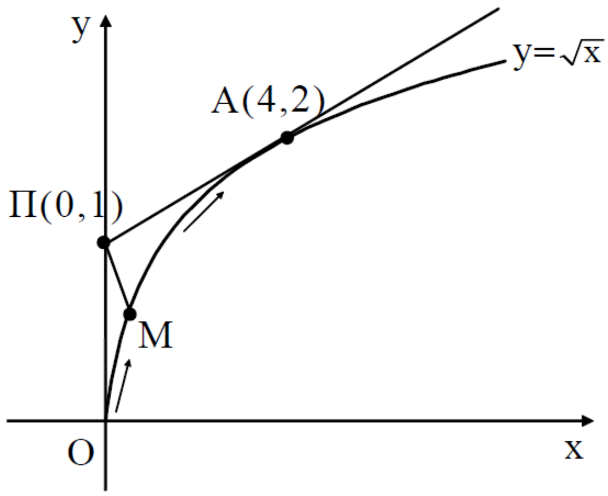
$$\frac{F(2)-F(0)}{2-0} = F'(\xi) = f(\xi)$$

Δηλαδή υπάρχει $\xi \in \left(0,2\right) : \int_0^2 f(t)dt = 2f(\xi)$.Αρκεί να δείξουμε ότι $\xi > 1$ ή $f(\xi) > f(1) > 1$

εφόσον f είναι γνησίως αύξουσα. Πραγματικά $\int_0^2 f(t)dt > 2 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} f(\xi) > 1$

3.17(Επαναληπτικές εξετάσεις 2011)

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x \ge 0$.Ένας παρατηρητής βρίσκεται στην θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχη O, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένος του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, είναι $x'(t) = 16\ m/\min$, $t \ge 0$

i) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, με $t \ge 0$, δίνεται από τον τύπο $x(t) = 16t$.

ii)Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το A(4,2) και , στην συνέχεια ,να υπολογίσετε πόσο διαρκεί η οπτική επαφή.

iii)Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο O μέχρι το σημείο A.

iv)Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$,κατά την οποία η απόσταση $d=(\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος Oxy.

Λύση

i)είναι $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = \left(16t\right)'$ άρα $x(t) = 16t + c$, c σταθερός πραγματικός αριθμός

Όμως $x(0)=0$ και με αντικατάσταση έπεται ότι $c=0$ άρα $x'(t) = 16\ m/\min$, $t \ge 0$.

ii)Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, αναζητούμε την εφαπτομένη της Cf που διέρχεται από σημείο Π(0,1).Αν $M(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής τότε:

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \text{ ή } y-\sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο Π(0,1) άρα

$$1-\sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(0-x_0) \Leftrightarrow 1-\sqrt{x_0} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x_0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_0 = 4$$

Οπότε το σημείο επαφής είναι το A(4,f(4)) ή A(2,4)

$$x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4}\min$$

Άρα η οπτική επαφή διαρκεί 15 δευτερόλεπτα.

iii)Είναι ε: $y-\sqrt{4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4)$ ή ε: $y=\frac{1}{4}x+1$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^4(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x})dt=...-\frac{2}{3}m^2$$

iv)Το σημείο $M(x,\sqrt{x})$ συναρτήσει του χρόνου t είναι $M(16t,4\sqrt{t})$.Η απόσταση ΠΜ είναι

$$(\Pi M)=d(t)=\sqrt{(16t-0)^2+(4\sqrt{t}-1)^2}=\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}$$

Για κάθε $t>0$

$$d'(t)=\left(\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}\right)'=\frac{256t+8-\frac{2}{\sqrt{t}}}{2\sqrt{256t^2+16t-8\sqrt{t}+1}}$$

Εξετάζουμε το πρόσημο του αριθμητή θεωρώντας την συνάρτηση $g(t)=256t+8-\frac{2}{\sqrt{t}},t>0$,

$$g'(t)=256+\frac{1}{t\sqrt{t}}>0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,οπότε:

$$g(\left(0,\frac{1}{4}\right])=\left(\lim_{t\to0^+}g(t),g(\frac{1}{4})\right]=(-\infty,68]$$

Το $0\in(-\infty,68]$ άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

Επίσης έχουμε:

$d'(t)=0\Leftrightarrow g(t)=0\Leftrightarrow t=t_0$

$d'(t)<0\Leftrightarrow g(t)<0\Leftrightarrow g(t)<g(t_0)\Leftrightarrow t<t_0$

$d'(t)>0\Leftrightarrow g(t)>0\Leftrightarrow g(t)>g(t_0)\Leftrightarrow t>t_0$

Άρα η απόσταση $d(t)$ γίνεται ελάχιστη για την χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$

3.18. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στο τετράδιο σας ,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1)Η συνάρτηση $F(x)=\frac{1}{x}$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=\ln x$ όταν x>0. Σ Λ

2)Οι παράγουσες της συνάρτησης $f(x)=3^x$ στο $\mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις

$$F(x)=\frac{3^x}{\ln3}+c, c\in\mathbb{R}$$ **Σ Λ**

3)Αν μια συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ τότε η f έχει άπειρες παράγουσες . Σ Λ

4)Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\geq0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx\geq0$. Σ Λ

5) $-\int_a^\beta f(x)dx=\int_\beta^\alpha f(x)dx$ **Σ Λ**

Λύση

1)Λ 2) Σ 3)Σ 4) Σ 5)Σ

3.19 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $f(1)=1$
- $\int_0^1((f'(x))^2+4f(x))dx=\frac{8}{3}$

i)Να αποδείξετε ότι $\int_0^1(f'(x)-2x)^2dx=0$

ii)Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2|x|-\eta\mu 3x}{2|x|\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}$

iv) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y=\alpha x$.

v)Να βρεθεί το $\lambda\in(0,1)$, ώστε η ευθεία $x=\lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

i)Είναι $\int_0^1(f'(x)-2x)^2dx=\int_0^1((f'(x))^2-4xf'(x)+4x^2)dx=\int_0^1(f'(x))^2dx-\int_0^1 4xf'(x)dx+\int_0^1 4x^2dx=$

$=\int_0^1(f'(x))^2dx-\left[4xf(x)\right]_0^1+\int_0^1 4f(x)dx+\left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^1=\int_0^1(f'(x))^2dx-(4\cdot1\cdot f(1)-4\cdot0\cdot f(0))+\int_0^1 4f(x)dx+\left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^1=$

$\overset{\int_0^1((f'(x))^2+4f(x))dx=\frac{8}{3}}{=}\int_0^1(f'(x))^2dx-4+\int_0^1 4f(x)dx+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}-4+\frac{4}{3}=0$

ii)Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=(f'(x)-2x)^2, x\in[0,1]$

Από το ερώτημα (i) είναι $\int_0^1 g(x)dx=0$

Για την συνάρτηση g ισχύουν :

- g συνεχής στο $[0,1]$
- για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $g(x)\geq 0$

Αν η g δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$,τότε θα είναι:

$\int_0^1 g(x)dx>0$, άτοπο, αφού $\int_0^1 g(x)dx=0$

Οπότε για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει:

$g(x)=0\Leftrightarrow(f'(x)-2x)^2=0\Leftrightarrow f'(x)-2x=0\Leftrightarrow f'(x)=2x\Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2\right)', x\in[0,1]$

Άρα, $f(x)=x^2+c$, c σταθερός πραγματικός , $x\in[0,1]$

Όμως $f(1)=1$ άρα με αντικατάσταση στην παραπάνω προκύπτει $c=0$ και τελικά $f(x)=x^2, x\in[0,1]$

iii) $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2|x|-\eta\mu 3x}{2|x|\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}\overset{x\to-\infty,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\alpha\ x<0}{\underset{|x|=-x}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x-\eta\mu 3x}{-2x\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x(2+\frac{\eta\mu 3x}{x})}{-x(2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{\eta\mu 3x}{x}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+0}{2\cdot 1}=1$

Διότι

$\left|\frac{\eta\mu 3x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu 3x|}{|x|} = \frac{|\eta\mu 3x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}\right) \overset{u=\frac{2}{x}}{=} \lim_{u\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu u\right) = 1$$

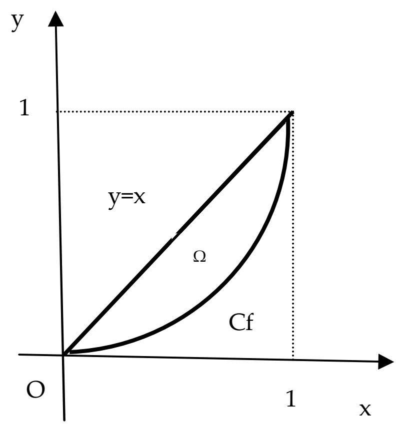
iv)Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = x$, $x \in [0,1]$

$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0 \ \acute{\eta} \ x = 1$

Έτσι για α=1 η Cf και η ευθεία $y = x$ έχουν δυο κοινά σημεία

O(0,0) , A(1,1)

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι :



$$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x|\,dx = \int_0^1 |x^2 - x|\,dx \underset{|x^2-x| = -(x^2-x)}{\overset{x^2-x\le 0 \ \acute{o}\tau\alpha\nu \ x\in[0,1]}{=}}$$

$$= \int_0^1 -(x^2 - x)\,dx = \dots = \frac{1}{6} \ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma \ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma$$

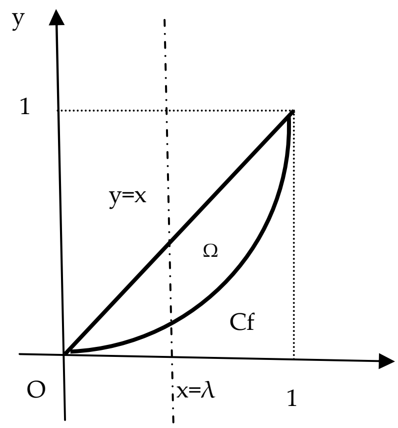
v)Έστω Ω_1 το χωρίο που περικλείεται από την Cf, την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0 και $x = \lambda, \lambda \in [0,1]$.

Εφόσον για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $x^2 - x \le 0$.

Επομένως και για κάθε $x \in [0,\lambda]$

$$E(\Omega) = \int_0^\lambda |f(x) - x|\,dx = \int_0^\lambda |x^2 - x|\,dx \underset{|x^2-x| = -(x^2-x)}{\overset{x^2-x\le 0 \ \acute{o}\tau\alpha\nu \ x\in[0,\lambda]}{=}} \int_0^\lambda -(x^2 - x)\,dx = \dots = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3}$$ τετραγωνικές μονάδες

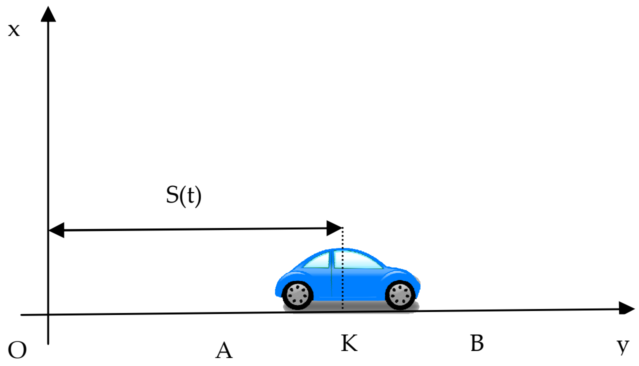
Για να χωρίζει η ευθεία $x = \lambda$ το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία , πρέπει



$$E(\Omega_1) = \frac{1}{2}E(\Omega) \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} \Leftrightarrow \dots \overset{\lambda\in[0,1]}{\Leftrightarrow} \lambda = \frac{1}{2}$$

3.20 (on the road…)Ένα όχημα Κ κινείται σε ένα ευθύ δρόμο με ταχύτητα που μεταβάλλεται στην διάρκεια του χρόνου. Η θέση στην οποία βρίσκεται την στιγμή t δίνεται από την συνάρτηση $S(t)$.Η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού είναι $u(t)=S'(t)$, ενώ η μέση ταχύτητα με την οποία διέτρεξε την απόσταση AB =$S(t_B)-S(t_A)$ είναι:

$$\bar{u}=\frac{S(t_B)-S(t_A)}{t_B-t_A}$$



Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο χρονικές στιγμές t_1,t_2 τέτοιες, ώστε το άθροισμα των στιγμιαίων ταχυτήτων στις στιγμές αυτές είναι διπλάσιο της μέσης ταχύτητας του Κ στο διάστημα $[t_A,t_B]$.

Λύση

Από υπόθεση συμπεραίνουμε ότι η $S(t)$ είναι συνεχής κα παραγωγίσιμη στο διάστημα $[t_A,t_B]$.Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση $S(t)$ στα διαστήματα $\left[t_A,\frac{t_A+t_B}{2}\right]$ και $\left[\frac{t_A+t_B}{2},t_B\right]$.Οπότε υπάρχουν

$$t_1\in\left(t_A,\frac{t_A+t_B}{2}\right)\quad,\quad t_2\in\left(\frac{t_A+t_B}{2},t_B\right)$$

Τέτοια ώστε

$$s'(t_1)=\frac{s(t_A)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_A-\frac{t_A+t_B}{2}}=\frac{s(t_A)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{\frac{t_A-t_B}{2}}=2\frac{s(t_A)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_A-t_B}$$

$$s'(t_2)=\frac{s(t_B)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_B-\frac{t_A+t_B}{2}}=\frac{s(t_B)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{\frac{t_B-t_A}{2}}=2\frac{s(t_B)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_B-t_A}$$

Αλλά $s'(t_1)=u(t_1)$, $s'(t_2)=u(t_2)$ όπου $u(t_1),u(t_2)$ οι στιγμιαίες ταχύτητες τις χρονικές στιγμές t_1,t_2

Έτσι

$$u(t_1)+u(t_2)=s'(t_1)+s'(t_2)=2\frac{s(t_A)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_A-t_B}+2\frac{s(t_B)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_B-t_A}=2\left[\frac{s(t_A)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_A-t_B}-\frac{s(t_B)-s(\frac{t_A+t_B}{2})}{t_A-t_B}\right]=$$

$$=2\frac{s(t_A)-s(t_B)}{t_A-t_B}=2\bar{u}$$ δηλαδή $u(t_1)+u(t_2)=2\bar{u}$

3.21 (M.Ganga)

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$,$(\alpha<\beta)$ ώστε να ισχύει:

- $f(\alpha)>\alpha^2$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\dfrac{\beta^3-\alpha^3}{3}$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f(\xi)=\xi^2$

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση Φ, με τύπο $\Phi(x)=f(x)-x^2, x\in[\alpha,\beta]$

Η Φ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και έχουμε $\Phi(\alpha)=f(\alpha)-\alpha^2>0$ και

$$\int_\alpha^\beta \Phi(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}<0 \quad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $\Phi(x_0)<0$,αφού αν $\Phi(x_0)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$, θα είναι $\int_\alpha^\beta \Phi(x)dx\geq 0$.

Άρα εφόσον $\Phi(\alpha)>0, \Phi(x_0)<0$, Φ συνεχής στο $[\alpha,x_0]\subset[\alpha,\beta]$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,x_0)$ τέτοιο ώστε $\Phi(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi^2=0\Leftrightarrow f(\xi)=\xi^2$.

3.22 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\kappa e^x}{2}-\lambda x,\ \ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \lambda>0$

i)Αν ισχύει $\eta\mu^2(\kappa x)+\eta\mu^2(2x)\leq 4\kappa x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.Να βρείτε την τιμή του κ.

ii)Αν $\kappa=2$,να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f συναρτήσει του λ.

iii)Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$ για την οποία ισχύει $e^x\geq\lambda x$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv)Για $\lambda=e$ να δείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g όπου $g(x)=e^x$.

v)Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cg , τον άξονα x'x, την ευθεία $y=ex$ και την ευθεία $x=-1$.

Λύση

i)Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε:

$$\eta\mu^2(\kappa x)+\eta\mu^2(2x)\leq 4\kappa x^2 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2(\kappa x)}{x^2}+\frac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}\leq 4\kappa \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2\left(\frac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x}\right)^2+4\left(\frac{\eta\mu(2x)}{2x}\right)^2\leq 4\kappa$$

Λαμβάνουμε όρια στο 0

$$\lim_{x\to 0}\left(\kappa^2\left(\frac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x}\right)^2+4\left(\frac{\eta\mu(2x)}{2x}\right)^2\right)\leq\lim_{x\to 0}4\kappa \quad \text{ή}$$

$$\kappa^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x}\right)^2+4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(2x)}{2x}\right)^2\leq\lim_{x\to 0}4\kappa \quad \text{ή}$$

$$\kappa^2\cdot 1^2+4\cdot 1^2\leq 4\kappa\Leftrightarrow\kappa^2+4-4\kappa\leq 0\Leftrightarrow(\kappa-2)^2\leq 0\Leftrightarrow\kappa-2=0\Leftrightarrow\kappa=2$$

ii)Για $\kappa=2$,ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $f(x)=e^x-\lambda x,\ \lambda>0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-\lambda$.Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-\lambda=0\Leftrightarrow x=\ln\lambda$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		$\ln\lambda$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=\ln\lambda$ την
$f(\ln\lambda)=e^{\ln\lambda}-\lambda\ln\lambda=\lambda-\lambda\ln\lambda=\lambda(1-\ln\lambda)$

iii)Έχουμε τις εξής ισοδυναμίες:

$$(e^x\ge\lambda x, x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(e^x-\lambda x\ge 0, x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(f(x)\ge 0, x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\min f(x)\ge 0\Leftrightarrow\lambda(1-\ln\lambda)\ge 0\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}1-\ln\lambda\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1\ge\ln\lambda\Leftrightarrow\lambda\le e$$

Άρα, η μεγαλύτερη τιμή του λ, για την οποία ισχύει $e^x\ge\lambda x, x\in\mathbb{R}$ είναι η $\lambda=e$

iv)Για να εφάπτεται η ευθεία $y=ex$ στην γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$, αρκεί να υπάρχει σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της Cg στο $A(x_0,g(x_0))$ να ταυτίζεται με την $y=ex$.Για να ισχύει αυτό, αρκεί:

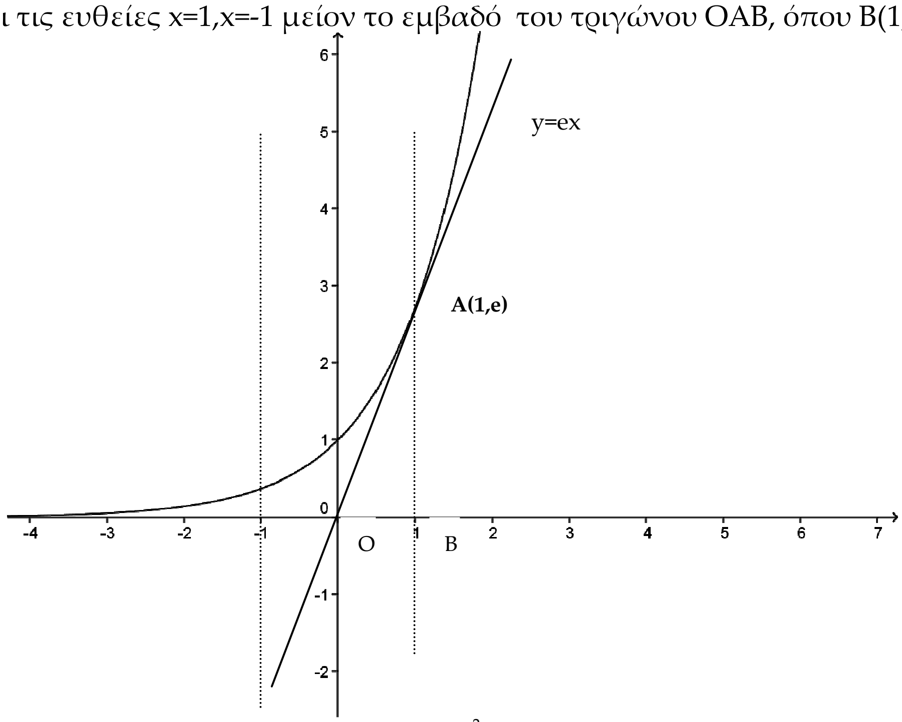
$$\begin{cases} g(x_0)=e\cdot x_0 \\ g'(x_0)=e \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e^{x_0}=e\cdot x_0 \\ e^{x_0}=e \end{cases}\Leftrightarrow x_0=1$$

Κατά συνέπεια η y=ex εφάπτεται της Cg στο σημείο $A(1,e)$.Πραγματικά η εξίσωση της εφαπτόμενης της Cg στο Α είναι $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)\Leftrightarrow y-e=e(x-1)\Leftrightarrow y=ex$

iv)Ζητούμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cg, τον άξονα x'x, την ευθεία $y=ex$ και την ευθεία $x=-1$.

Ισχύει $g'(x)=e^x>0$ άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε η ευθεία $y=ex$ ως εφαπτόμενη της Cg βρίσκεται κάτω από την Cg (με εξαίρεση το σημείο επαφής)

Επίσης παρατηρούμε ότι η $y=ex$ τέμνει τους άξονα των x'x στο σημείο O(0,0).Οποτε το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την Cg, τον άξονα των xx και τις ευθείες x=1,x=-1 μείον το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Β(1,0).Δηλαδη:



$$E=\int_{-1}^{1}e^x dx-(OAB)=\left[e^x\right]_{-1}^{1}-\frac{(OB)(AB)}{2}=e-\frac{1}{e}-\frac{e}{2}=\frac{e^2-2}{2e}$$ τετραγωνικές μονάδες .

3.23 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και τέτοια ώστε να είναι

$$\alpha f(x)+\beta f(-x)=\gamma \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha+\beta\neq 0$, να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$

Λύση

Έχουμε $\alpha f(x)+\beta f(-x)=\gamma$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha f(x)+\beta f(-x))dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\gamma \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha f(x)+\beta f(-x))dx=2\alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx+\beta\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx=2\alpha\gamma \quad (1)$$

Είναι όμως $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx \overset{u=-x}{=} -\int_{\alpha}^{-\alpha} f(u)du=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(u)du$ άρα $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$

Η (1) γίνεται τότε $(\alpha+\beta)\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\alpha\gamma \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$

3.23 (M.Ganga) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

- $f'(x)\leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$
- $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=0$

Να δείξετε ότι:

i) $\int_0^1 f(\frac{x}{2})dx=0$ **ii)** $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)\leq\dfrac{x}{2},\ x\in[0,+\infty)$ **iii)** $\int_0^1 f(x)dx\leq\dfrac{1}{4}$

Λύση

i) θέτουμε $\dfrac{x}{2}=u$ άρα $\dfrac{dx}{2}=du\Leftrightarrow dx=2du$

Για $x=0\Leftrightarrow u=0$

Για $x=1\Leftrightarrow u=\dfrac{1}{2}$

Έτσι: $\int_0^1 f(\frac{x}{2})dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(u)du=2\cdot 0=0$

ii)Αν $x>0$ από Θ.Μ.Τ στην συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\dfrac{x}{2},x\right]$ προκύπτει ότι υπάρχει

$\xi\in\left(\dfrac{x}{2},x\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x-\frac{x}{2}}=\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}$ άρα

$f(x)-f(\frac{x}{2})=\dfrac{x}{2}f'(\xi)\leq\dfrac{x}{2}\cdot 1\Rightarrow f(x)-f(\frac{x}{2})\leq\dfrac{x}{2}$

Αν $x>0$ ισχύει σαν ισότητα

iii)Για κάθε $x\in[0,1]$: $f(x)-f(\frac{x}{2})\leq\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow f(x)\leq\dfrac{x}{2}+f(\frac{x}{2})$

Ολοκληρώνουμε

$$\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1\frac{x}{2}+\int_0^1 f(\frac{x}{2})dx \overset{\int_0^1 f(\frac{x}{2})dx=0}{\Rightarrow} \int_0^1 f(x)dx\leq\frac{1}{4}$$

3.24 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2017.$$

α. Να δείξετε ότι: i. f(0)=0 ii. f'(0)=1.

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2+\left(f(x)\right)^2}=3$.

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο IR και f '(x) > f(x) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i) $xf(x)>0$ **για κάθε** $x \neq 0$. **ii)** $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

ΛΥΣΗ

α.i) Θέτω $h(x)=\frac{f(x)-x}{x^2}$ με $\lim_{x\to 0}h(x)=2017$

Άρα $f(x) - x = x^2 \cdot h(x) \Rightarrow f(x) = x^2 \cdot h(x) + x$ (1)

Οπότε $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot h(x)+x\right)=0\cdot 2017+0=0$

Όμως f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0, συνεπώς $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ άρα f(0) = 0.

α.ii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot h(x)+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(x\cdot h(x)+1\right)}{x}=$

$=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot h(x)+1\right)=0\cdot 2017+1=1$

Άρα f'(0) = 1.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι από το ερώτημα αυτό προκύπτει και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ (2).

β. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda f^2(x)}{2x^2+f^2(x)}=3\overset{:x^2}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+\lambda f^2(x)}{x^2}}{\frac{2x^2+f^2(x)}{x^2}}=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1+\lambda\frac{f^2(x)}{x^2}}{2+\frac{f^2(x)}{x^2}}=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1+\lambda\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}\overset{(2)}{=}3\Rightarrow$

$\frac{1+\lambda\cdot 1^2}{2+1^2}=3\Rightarrow\frac{1+\lambda}{3}=3\Rightarrow 1+\lambda=9\Rightarrow\lambda=8$.

γ.i) $f'(x)>f(x)\overset{\cdot e^{-x}}{\Rightarrow}f'(x)\cdot e^{-x}>f(x)\cdot e^{-x}\Rightarrow f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}>0\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)\cdot e^{-x}+f(x)\cdot\left(e^{-x}\right)'>0\Rightarrow\left(f(x)\cdot e^{-x}\right)'>0\Rightarrow f(x)\cdot e^{-x}\nearrow$

- $x<0\Rightarrow f(x)\cdot e^{-x}<f(0)\cdot e^{0}\Rightarrow f(x)\cdot e^{-x}<0\Rightarrow f(x)<0$ άρα $xf(x)>0$.
- $0<x\Rightarrow f(0)\cdot e^{0}<f(x)\cdot e^{-x}\Rightarrow 0<f(x)\cdot e^{-x}\Rightarrow 0<f(x)\Rightarrow f(x)>0$ άρα $xf(x)>0$.

Άρα για κάθε $x\neq 0$ είναι $xf(x)>0$.

γ.ii) $f'(x)>f(x)\Rightarrow f'(x)-f(x)>0$

Συνεπώς

$$\int_0^1\left(f'(x)-f(x)\right)dx>0\Rightarrow\int_0^1 f'(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx>0\Rightarrow\left[f(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx>0\Rightarrow$$

$$f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)dx>0\Rightarrow f(1)-0-\int_0^1 f(x)dx>0\Rightarrow f(1)>\int_0^1 f(x)dx\ .$$

«Γράψαμε τεστ στο σχολείο και στο τρίτο θέμα ζητήθηκε μελέτη συνάρτησης. Βάλτε με να σκάψω κιόλας!!»

Κορνήλιος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

ΓΕΝΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\kappa x+\frac{x}{e^x}$ **.**

i)Να προσδιορίσετε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ **, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο (0,f(0)) εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία ε:** $y=2x+7$ **.**

ii)Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **.**

iii)Να αποδείξετε ότι η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf.

iv)Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\mu)$ **του καμπυλόγραμμου χωρίου , που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0 και x=μ (μ>0)**

v)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\mu\to+\infty}E(\mu)$ **.**

vi)Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **με συνεχή δεύτερη παράγωγο η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο** $x_0=2$ **και η Cg διέρχεται από το σημείο** $A(0,f(0)+1)$ **.Αν ισχύει:**

$$\int_0^2[xg''(x)+2g'(x)]dx=-\frac{8}{3}$$

Να δείξετε ότι η Cg διέρχεται από το σημείο $B(2,-\frac{5}{3})$

Λύση

i)Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της Cf στο σημείο της (0,f(0)) τότε $\lambda=f'(0)$.

$f'(x)=\kappa+\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\kappa+\frac{1-x}{e^x}$, $\lambda=\kappa+\frac{1-0}{e^0}=\kappa+1$ και $\lambda_\varepsilon=2$, λόγω παραλληλίας

$\lambda=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow\kappa+1=2\Leftrightarrow\kappa=1$

ii)Για $\kappa=1$, ο τύπος της f′ γράφεται $f'(x)=1+\frac{1-x}{e^x}=\frac{e^x-x+1}{e^x}\geq 0$

($e^x\geq x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,γιατί;) Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii)Έχουμε: $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{x}{e^x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$

Έχουμε ακόμα $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\frac{x}{e^x}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ (*)

Άρα $y=1\cdot x+0\Leftrightarrow y=x$

iv)Επειδή $f(x)-x=\frac{x}{e^x}>0$ για κάθε $x>0$,το ζητούμενο εμβαδό δίνεται από τον τύπο

$$E(\mu)=\int_0^\mu[f(x)-y]dx=\int_0^\mu[f(x)-x]dx=\int_0^\mu\frac{x}{e^x}dx=\int_0^\mu xe^{-x}dx=-\int_0^\mu x\left(e^{-x}\right)'dx=$$

$$=-\left[x\left(e^{-x}\right)\right]_0^\mu+\int_0^\mu e^{-x}dx=-\left[x\left(e^{-x}\right)\right]_0^\mu-\left[e^{-x}\right]_0^\mu=\mu e^{-\mu}-e^{-\mu}+1$$

v) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}E(\mu)=\lim\limits_{\mu\to+\infty}\left(\mu e^{-\mu}-e^{-\mu}+1\right)\overset{(*)}{=}..=0-0+1=1$

vi)Η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$ άρα από θ.Fermat ισχύει: $g'(2)=0$

η Cg διέρχεται από το σημείο $A(0,f(0)+1)=A(0,1)$ άρα $g(0)=1$

$$\int_0^2[xg''(x)+2g'(x)]dx=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_0^2 xg''(x)dx+\int_0^2 2g'(x)dx=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\left[xg'(x)\right]_0^2-\int_0^2 g'(x)dx+2\int_0^2 g'(x)dx=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow$$

$$\left[xg'(x)\right]_0^2+\int_0^2 g'(x)dx=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\left[xg'(x)\right]_0^2+\left[g(x)\right]_0^2=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow 2g'(2)-0g'(0)+g(2)-g(0)=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow$$

$g(2)-1=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow g(2)=1-\frac{8}{3}\Leftrightarrow g(2)=-\frac{5}{3}$.Άρα η Cg διέρχεται από το σημείο $B(2,-\frac{5}{3})$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $f'(x)(x^2+x+2)-f(x)(x^2-x+1)=0$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **,** $f(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=\frac{1}{2}$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{x^2+x+2}$

Β.i) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii)Να λύσετε την ανίσωση $2e^{x^2-2x}<\frac{x^4+x^2+2}{x^2+x+1}$

Γ. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **ισχύει:**

- $e^{g'(x)-2x}=\frac{(g'(x))^2+g'(x)+2}{4x^2+2x+2}$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $g(0)=1$

i)Να δείξετε ότι $g(x)=x^2+1$

ii)Να βρείτε τα σημεία του επίπεδου από τα οποία άγονται κάθετες εφαπτομένες της Cg .

Δ. i)Να βρείτε τα σημεία επαφής Α,Β των εφαπτόμενων ε1,ε2 της Cg που άγονται από το σημείο $A(0,\frac{3}{4})$ **.**

ii)Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cg και τις εφαπτόμενες ε1,ε2.

Λύση

Α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)(x^2+x+2)-f(x)(x^2-x+1)=0\Leftrightarrow f'(x)(x^2+x+2)=f(x)(x^2-x+1)\underset{x^2+x+2\neq 0}{\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+2}$$

$$\left(\ln f(x)\right)'=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+2}\Rightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\frac{x^2+x+2-2x-1}{x^2+x+2}\Rightarrow\left(\ln f(x)\right)'=1+\frac{-2x-1}{x^2+x+2}\Rightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\left(x-\ln(x^2+x+2)\right)'$$

Δηλαδή, $\ln f(x)=x-\ln(x^2+x+2)+c$,c σταθερός πραγματικός αριθμός, αλλά $f(0)=\frac{1}{2}$

$$\ln f(0)=0-\ln(0^2+0+2)+c\Leftrightarrow\ln\frac{1}{2}=0-\ln(0^2+0+2)+c\Leftrightarrow\ln\frac{1}{2}=-\ln 2+c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln\frac{1}{2}+\ln 2=c\Leftrightarrow c=\ln\left(\frac{1}{2}2\right)\Leftrightarrow c=\ln 1\Leftrightarrow c=0$$

Άρα , $\ln f(x)=x-\ln(x^2+x+2)\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln e^x-\ln(x^2+x+2)\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln\frac{e^x}{x^2+x+2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x}{x^2+x+2}$

Β i) $f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+x+2}\right)'=\frac{e^x(x^2+x+2)-e^x(2x+1)}{\left(x^2+x+2\right)^2}=\frac{e^x(x^2+x+2-2x-1)}{\left(x^2+x+2\right)^2}=\frac{e^x(x^2-x+1)}{\left(x^2+x+2\right)^2}>0$,

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2-x+1>0$ ($\Delta=-3<0$), $x^2+x+2>0$ ($\Delta=-7<0$),

Άρα $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β ii)Έχουμε:

$$2e^{x^2-2x}<\frac{x^4+x^2+2}{2x^2+x+1}\Leftrightarrow e^{x^2-2x}<\frac{x^4+x^2+2}{4x^2+2x+2}\Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^{2x}}<\frac{x^4+x^2+2}{4x^2+2x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+x^2+2}<\frac{e^{2x}}{4x^2+2x+2}\Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{\left(x^2\right)^2+x^2+2}<\frac{e^{2x}}{(2x)^2+2x+2}\Leftrightarrow f(x^2)<f(2x)$$

Αλλά, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $x^2<2x\Leftrightarrow x^2-2x<0\Leftrightarrow x(x-2)<0\Leftrightarrow 0<x<2$

Γ. i) $e^{g'(x)-2x}=\dfrac{(g'(x))^2+g'(x)+2}{4x^2+2x+2}\Leftrightarrow \dfrac{e^{g'(x)}}{e^{2x}}=\dfrac{(g'(x))^2+g'(x)+2}{4x^2+2x+2}\Leftrightarrow \dfrac{e^{g'(x)}}{(g'(x))^2+g'(x)+2}=\dfrac{e^{2x}}{4x^2+2x+2}\Leftrightarrow$

$f(g'(x))=f(2x)\overset{f\ 1-1\ \alpha\varphi o\upsilon\ f\nearrow}{\Leftrightarrow} g'(x)=2x\Leftrightarrow g(x)=x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$

Αλλά $g(0)=1\Leftrightarrow c=1$. Έτσι $g(x)=x^2+1, x\in\mathbb{R}$

ii)Είναι $g(x)=x^2+1$, $g'(x)=2x$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (η) της Cg στο σημείο επαφής $\Lambda(x_0,g(x_0))$ είναι:

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^{\ 2}-1=2x_0(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^{\ 2}-1=2x_0x-2x_0^{\ 2}\Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^{\ 2}+1$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της (η) είναι $\lambda_\eta=2x_0$

Για να διέρχεται η ευθεία (ε) από το σημείο N(α,β) πρέπει να ισχύει :

$$\beta=2x_0\alpha+x_0^{\ 2}+1\Leftrightarrow x_0^{\ 2}+2x_0\alpha-\beta+1=0\ (1)$$

Οπότε για να διέρχονται από το N(α,β) δυο κάθετες εφαπτόμενες (η1) ,(η2) της Cg αρκεί η εξίσωση $x^2+2x\alpha-\beta+1=0$ να έχει δυο διαφορετικές λύσεις $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ (οι διαφορετικές λύσεις $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ αντιστοιχούν σε διαφορετικές εφαπτομένες της Cg εφόσον η g′ είναι 1-1)και να ισχύει $\lambda_{\eta_1}\cdot\lambda_{\eta_2}=-1$, δηλαδή να ισχύουν:

$$\begin{cases}\lambda\eta_1\cdot\lambda\eta_2=-1\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1\cdot 2x_2=-1\\ (-2\alpha)^2-4(\beta-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1x_2=-\dfrac{1}{4}\\ 4\alpha^2-4\beta+4>0\end{cases}\underset{Vieta}{\overset{P=x_1x_2=\frac{\beta-1}{1}}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\dfrac{\beta-1}{1}=-\dfrac{1}{4}\\ 4\alpha^2-4\beta+4>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\beta=1-\dfrac{1}{4}\\ 4\alpha^2-4\beta+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ 4\alpha^2-4\beta+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ 4\alpha^2-4\dfrac{3}{4}+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ 4\alpha^2-3+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ 4\alpha^2+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ \alpha^2>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{3}{4}\\ \alpha^2>-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\beta=\frac{3}{4},\alpha\in\mathbb{R}$$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι όλα τα σημεία του επιπέδου με τεταγμένη $\dfrac{3}{4}$,δηλαδή όλα τα σημεία της ευθείας $y=\dfrac{3}{4}$.

Δ.i) Έστω $(x_0,g(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της Cg που άγεται από το $A(0,\frac{3}{4})$ τότε η εφαπτομένη θα έχει τύπο

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^{\ 2}-1=2x_0(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^{\ 2}-1=2x_0x-2x_0^{\ 2}\Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^{\ 2}+1$

Όμως, η εφαπτομένη διέρχεται απο το Α άρα

$\dfrac{3}{4}=2x_0\cdot 0-x_0^{\ 2}+1\Leftrightarrow x_0^{\ 2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x_0=\pm\dfrac{1}{2}$ άρα δυο εφαπτομένες άγονται από το Α προς την Cg

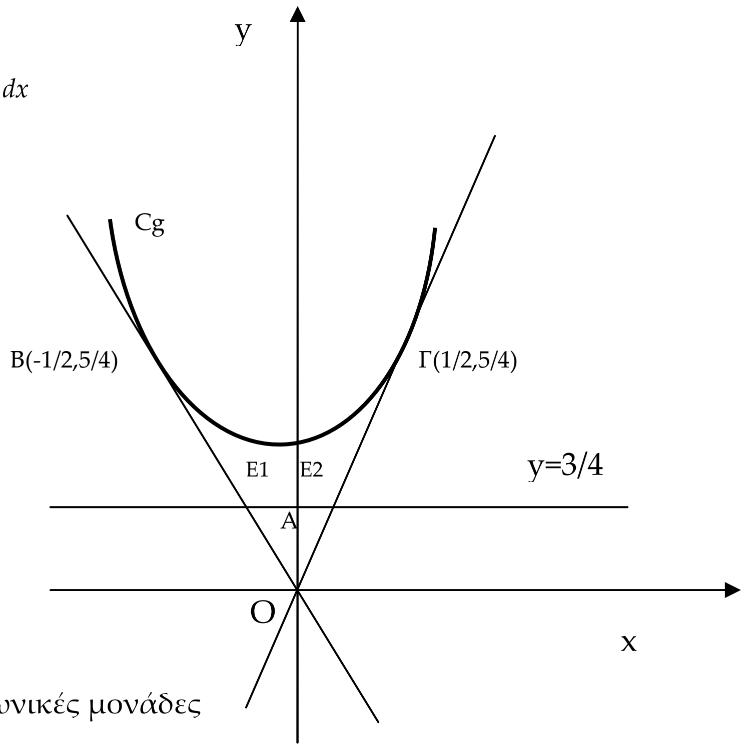
με σημεία επαφής $B\left(\frac{1}{2},g\left(\frac{1}{2}\right)\right),\Gamma\left(-\frac{1}{2},g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ή $B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right),\Gamma\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι αντίστοιχα

$$\varepsilon_1: \quad y-g\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)(x-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow y-\frac{5}{4}=2\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow y-\frac{5}{4}=x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=x+\frac{3}{4}$$

$$\varepsilon_2: \quad y-g\left(-\frac{1}{2}\right)=g'\left(-\frac{1}{2}\right)(x+\frac{1}{2}) \Leftrightarrow y-\frac{5}{4}=2(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) \Leftrightarrow y-\frac{5}{4}=-x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y-\frac{5}{4}=-x+\frac{3}{4}$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι :



$$E=E_1+E_2=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)-(x+\frac{3}{4})\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(g(x)-(-x+\frac{3}{4})\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left((x^2+1)-(x+\frac{3}{4})\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left((x^2+1)-(-x+\frac{3}{4})\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1-x-\frac{3}{4}\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(x^2+1+x-\frac{3}{4})\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\ldots=\frac{1}{12}$$ τετραγωνικές μονάδες

3.Δινεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\alpha+2}{3}x^3-\frac{\alpha+1}{2}x^2+\beta x\ ,\ \alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{Z},\beta<2$$

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στην θέση $x_0=\frac{1}{3}$.

i)Να δείξετε ότι $\alpha=1,\beta=1$.

ii)Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και ότι το σημείο Α(1,1) είναι κοινό σημείο των $Cf\ ,Cf^{-1}$.

iii)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο Α(1,1) και να αποδείξετε ότι αυτή έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την Cf^{-1}.

iv)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο Α(1,1).

v)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{f^{-1}(x)-1}{x-1}$.

vi)(Κερασάκι...) Για συνάρτηση $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με αύξουσα παράγωγο στο $[-1,1]$,να δείξετε ότι:

$$\frac{f(1)}{2}\int_{-1}^{1}g(x)dx\le g(-1)+g'(1)$$

Λύση

i) $Df=\mathbb{R}$,f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha+2}{3}x^3-\frac{\alpha+1}{2}x^2+\beta x\right)'=(\alpha+2)x^2-(\alpha+1)x+\beta$$

$$f''(x)=\left((\alpha+2)x^2-(\alpha+1)x^2+\beta\right)'=2(\alpha+2)x-(\alpha+1)$$

Η f από υπόθεση παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0=\frac{1}{3}$ άρα $f''(\frac{1}{3})=0$ και εκατέρωθεν του $x_0=\frac{1}{3}$ η f'' αλλάζει πρόσημο.

$$f''(\frac{1}{3})=0\Leftrightarrow 2(\alpha+2)\frac{1}{3}-(\alpha+1)=0\Leftrightarrow 2(\alpha+2)-3(\alpha+1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha+4-3\alpha-3=0\Leftrightarrow 1-\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=1$$

Πραγματικά για $\alpha=1$ η $f''(x)=6x-2$ έχει ρίζα το $x_0=\frac{1}{3}$ και εκατέρωθεν του, αλλάζει πρόσημο. Επίσης η συνάρτηση f από υπόθεση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα $f'(x)\ge0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Δηλαδή $(\alpha+2)x^2-(\alpha+1)x+\beta\ge0\overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow}3x^2-2x+\beta\ge0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Όμως το τριώνυμο $3x^2-2x+\beta$ είναι πάντα θετικό όταν

$$\Delta\le0\Leftrightarrow \mathrm{B}^2-4\mathrm{A}\Gamma\le0\Leftrightarrow(-2)^2-4\cdot3\cdot\beta\le0\Leftrightarrow 4-12\beta\le0\Leftrightarrow 4\le12\beta\Leftrightarrow\frac{4}{12}\le\beta\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\beta$$

Αλλά από υπόθεση $\beta\in\mathbb{Z}$ και $\beta<2$ οπότε $\beta=1$.

Τελικά η συνάρτηση έχει τύπο : $f(x)=x^3-x^2+x$ και $f'(x)=3x^2-2x+1, f''(x)=6x-2$

ii)f γνησίως αύξουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται επίσης ισχύει: $f(1)=1^3-1^2+1=1$ οπότε και $f^{-1}(1)=1$ δηλαδή το σημείο Α(1,1) είναι κοινό σημείο των $Cf\ ,Cf^{-1}$.

iii)Η εφαπτομένη (ε) της Cf στο Α(1,1) έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y-1=2x-2\Leftrightarrow y=2x-1$$

Η εξίσωση $f(x)=2x-1\Leftrightarrow x^3-x^2+x=2x-1\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0\Leftrightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

Άρα και το σημείο Β(-1,-3) είναι το δεύτερο κοινό σημείο της Cf με την Cf^{-1}.

iv)Οι Cf ,Cf^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.Προφανώς, το ίδιο ισχύει και με την εφαπτομένη (ε) της Cf στο Α(1,1) και την ζητούμενη εφαπτομένη (η) της Cf^{-1} στο Α(1,1).Επειδη η εξίσωση της (ε) είναι $y = 2x-1$ συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση της (η) είναι $x = 2y-1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

v)Το ζητούμενο όριο γράφεται: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}$

και ισούται με την παράγωγο της f^{-1} στο σημείο $x_0 = 1$.

Όμως η παράγωγος της f^{-1} στο $x_0 = 1$ ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης (η) που είναι $\lambda = \frac{1}{2}$.Δηλαδή

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$$

v) $f(1) = 1$ άρα η προς απόδειξη ανισοτική σχέση γίνεται

$$\frac{f(1)}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx \le g(-1) + g'(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx \le g(-1) + g'(1)$$

Έστω τυχαίο x με $-1 < x \le 1$.Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση g στο διάστημα $\left[-1,x\right]$ οπότε υπάρχει $\xi \in \left(-1,x\right)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} \Leftrightarrow g'(\xi) = \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} \Leftrightarrow g'(\xi)(x+1) = g(x)-g(-1) \quad (1)$$

Όμως $x \le 1$ οπότε $-1 < \xi < 1$ θα έχουμε λοιπόν $g'(\xi) \le g'(1)$ εφόσον η παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι $-1 < x \le 1$ έχουμε $g(x)-g(-1) = g'(\xi)(x+1) \le g'(1)(x+1)$ (2)

Η τελευταία σχέση ισχύει και για x=-1.

Η (2) γίνεται $g(x)-g(-1) \le g'(1)(x+1) \Leftrightarrow g(x) \le g'(1)(x+1) + g(-1)$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία στο $\left[-1,1\right]$

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \le \int_{-1}^{1}(g'(1)(x+1)+g(-1))dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} g(x)dx \le g'(1)\int_{-1}^{1}(x+1)dx + g(-1)\int_{-1}^{1}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} g(x)dx \le g'(1)\cdot 2 + g(-1)\cdot 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(x)dx \le g'(1) + g(-1)$$

4.Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f η οποία τέτοια, ώστε:

- $(x^2-1)(f(x)-x^3)\geq 0$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=0$

Α. Να δείξετε ότι:

i)Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα x'x στην αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία A(1,1) ,B(-1,-1) .

ii)Υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=1$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$g(x)=\sqrt{e^{2x}+f(1)}-f(-1)\kappa e^{x}+\lambda$ **,** $x\in\mathbb{R}$ **με κ,λ σταθερούς πραγματικούς αριθμούς**

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ τότε:

i)Να δείξετε ότι $\kappa=1,\lambda=0$

ii)Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της την συνάρτηση h με τύπο $h(x)=\ln g(x)$.

iii)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 e^x h(x)dx$$

Λύση

i) Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0)=0$

Για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ έχουμε :

$x^2-1<0$ και $f(x)-x^3\leq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq x^3$ (1)

Αν $x\in(-1,0)$ τότε η (1) γίνεται $f(x)\leq x^3 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\geq x^2$ (2)

Αν $x\in(0,1)$ τότε η (1) γίνεται $f(x)\geq x^3 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\geq x^2$ (3)

Από υπόθεση η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ παίρνουμε από (2),(3)

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}\geq \lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0$ ή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}\geq 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\leq \lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$ ή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\leq 0$

Άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

Για $x\in(0,1),(x^2-1)(f(x)-x^3)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\leq x^3$ (4)

Για $x\in(1,+\infty),(x^2-1)(f(x)-x^3)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq x^3$ (5)

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Από την (4) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\leq \lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$

Από την (5) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\geq \lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$

Άρα $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$, δηλαδή η Cf διέρχεται από το σημείο A(1,1)

Όμοια βρίσκουμε

$f(-1)=\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-1$ έτσι, η Cf διέρχεται από το σημείο B(-1,-1)

ii)Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{1-(-1)}{1-(-1)}=1$

B. i)Η g για $f(1)=1, f(-1)=-1$ έχει τύπο

$g(x)=\sqrt{e^{2x}+1}+\kappa e^{x}+\lambda$, $x\in\mathbb{R}$ με κ,λ σταθερούς πραγματικούς αριθμούς

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+1}+\kappa e^{x}+\lambda\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}+\kappa+\frac{\lambda}{e^{x}}\right)\right)=(+\infty)(1+\kappa)$$

Αν $\kappa>1$ ή $\kappa<1$ το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ απειρίζεται άρα πρέπει $1+\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=-1$

Για $\kappa=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}+\lambda\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+1}-(e^{x}-\lambda)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{e^{2x}+1}-(e^{x}-\lambda))(\sqrt{e^{2x}+1}+(e^{x}-\lambda))}{(\sqrt{e^{2x}+1}+(e^{x}-\lambda))}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1-(e^{2x}-2e^{x}\lambda+\lambda^{2})}{(\sqrt{e^{2x}+1}+(e^{x}-\lambda))}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1-e^{2x}+2e^{x}\lambda-\lambda^{2}}{(\sqrt{e^{2x}+1}+(e^{x}-\lambda))}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2e^{x}\lambda-\lambda^{2}}{(\sqrt{e^{2x}+1}+(e^{x}-\lambda))}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}(\frac{1}{e^{x}}+2\lambda-\frac{\lambda^{2}}{e^{x}})}{e^{x}(\sqrt{1+\frac{1}{e^{x}}}+1-\frac{\lambda}{e^{x}})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{x}}+2\lambda-\frac{\lambda^{2}}{e^{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{e^{x}}}+1-\frac{\lambda}{e^{x}}}=\frac{2\lambda}{2}=\lambda$$

Αλλά ,από υπόθεση $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ άρα $\lambda=0$.

Έτσι, ο τύπος της g γίνεται $g(x)=\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}$

ii) $g(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}>0\Leftrightarrow\sqrt{e^{2x}+1}>e^{x}\Leftrightarrow e^{2x}+1>e^{2x}\Leftrightarrow1>0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$h(x)=\ln g(x)=\ln\left(\sqrt{e^{2x}+1}+e^{x}\right),x\in\mathbb{R}$

$$h'(x)=\left(\ln\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}\right)\right)'=\frac{(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x})'}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}}=\frac{\frac{(e^{2x}+1)'}{2\sqrt{e^{2x}+1}}-e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}}=\frac{\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}-e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}}=\frac{\frac{e^{2x}-e^{x}(\sqrt{e^{2x}+1})}{\sqrt{e^{2x}+1}}}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}}=$$

$$\frac{e^{2x}-e^{x}(\sqrt{e^{2x}+1})}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}\right)}=\frac{e^{x}(e^{x}-\sqrt{e^{2x}+1})}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}\right)}=\frac{-e^{x}(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x})}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)\left(\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}\right)}=\frac{-e^{x}}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)}<0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

iii)

$$\int_0^1 e^{x}h(x)dx=\int_0^1\left(e^{x}\right)'h(x)dx=e^{x}h(x)-\int_0^1 e^{x}h'(x)dx=e^{x}h(x)-\int_0^1 e^{x}\frac{-e^{x}}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)}dx=e^{x}h(x)+\int_0^1\frac{e^{2x}}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)}dx=$$

$$e^{x}h(x)+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(e^{2x}+1)'}{\left(\sqrt{e^{2x}+1}\right)}dx=\left[e^{x}h(x)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{e^{2x}+1})\right]_0^1=\dots$$

«Γράψαμε τεστ στο σχολείο και στο τρίτο θέμα ζητήθηκε μελέτη συνάρτησης. Βάλτε με να σκάψω κιόλας!!»

Κορνήλιος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

5. Δίνεται η συνάρτηση

$g(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+2\delta,\ \ \alpha\neq 0$ **α,β,γ,δ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.**

A.i)Να αποδείξετε ότι η Cg έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

ii) Αν η g έχει δυο θέσεις ακροτάτων στα x_1 και x_2 να αποδείξετε ότι

$$g''(x_1)\cdot g''(x_2)=0$$

B. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $h(x)=\dfrac{\alpha^2}{2x}$, $x\neq 0$ το εμβαδό που σχηματίζεται από κάθε εφαπτομένη της και τους άξονες είναι σταθερό.

Γ. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\frac{2x^2+\alpha x^3+2(\delta+1)-g(x)}{x-3}\ ,\ x\neq 3$$

Είναι γνωστό ότι η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

i)Να δείξετε ότι $\beta=1$ και γ=3.

ii)Υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(1,2)$ στον οποίο η εφαπτομένη της Cf είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ.(Bonus)Δίνεται η συνάρτηση k για την οποία ισχύει:

- **συνεχής στο $[-1,0]$**
- $\left(f(4)-5\right)x^3+2x\left(k(x)\right)^3=f'(\xi)+8$ **για κάθε $[-1,0]$**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-1,0)$.

Ε.Αν για μια συνάρτηση φ συνεχή στο $\mathbb{R}$ οπού ισχύει η ιδιότητα

$$\varphi(x)+2\varphi(2x)=5x+\frac{f(4)}{2}\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $\int_1^4\varphi(x)dx$.

Λύση

A.i) Η g δυο φορές παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική ,έτσι:

$g'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, $g''(x)=6\alpha x+2\beta$

$g''(x)=0\Leftrightarrow 6\alpha x+2\beta=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$.Η g'' εκατέρωθεν του $x=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$ αλλάζει πρόσημο άρα σημείο καμπής.

ii)Οι αριθμοί x_1 και x_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της g ,από το θεώρημα Fermat ισχύει: $g'(x_1)=g'(x_2)=0$ άρα x_1,x_2 είναι ρίζες της $g'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ δηλαδή από τύπο Vieta

$x_1+x_2=-\dfrac{2\beta}{3\alpha}$ (1)

$$g''(x_1)\cdot g''(x_2)=6\alpha x_1+2\beta+6\alpha x_2+2\beta=6\alpha\left(x_1+x_2\right)+4\beta\overset{(1)}{=}6\alpha\left(-\frac{2\beta}{3\alpha}\right)+4\beta=0$$

B.Η h είναι παραγωγίσιμη ως ρητή για κάθε $x\neq 0$ έτσι:

$h'(x)=\left(\dfrac{\alpha^2}{2x}\right)'=-\dfrac{\alpha^2}{2x^2}$

Η εφαπτομένη της h στο τυχαίο σημείο της γραφικής της παράστασης $A(x_0,h(x_0))$ έχει τύπο:

ε: $y-h(x_0)=h'(x_0)(x-x_0)$ άρα $y-\dfrac{\alpha^2}{2x_0}=-\dfrac{\alpha^2}{2{x_0}^2}(x-x_0)$

•Η ε τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τεταγμένη 0 δηλαδή

$0-\frac{\alpha^2}{2x_0}=-\frac{\alpha^2}{2{x_0}^2}(x-x_0)\Leftrightarrow ..\Leftrightarrow x=2x_0$ άρα είναι το σημείο $B(2x_0,0)$

•Η ε τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τετμημένη 0 δηλαδή

$y-\frac{\alpha^2}{2x_0}=-\frac{\alpha^2}{2{x_0}^2}(0-x_0)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow y=\frac{\alpha^2}{x_0}$ άρα είναι το σημείο $\Gamma(0,\frac{\alpha^2}{x_0})$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι : $E=\frac{1}{2}|2x_0|\left|\frac{\alpha^2}{x_0}\right|=\alpha^2$ ανεξάρτητο του x.

Γ. $f(x)=\frac{2x^2+\alpha x^3+2(\delta+1)-g(x)}{x-3}=\frac{2x^2+\alpha x^3+2(\delta+1)-\alpha x^3-\beta x^2-\gamma x-2\delta}{x-3}=$

$=\frac{2x^2+\alpha x^3+2\delta+2-\alpha x^3-\beta x^2-\gamma x-2\delta}{x-3}=\frac{(2-\beta)x^2-\gamma x+2}{x-3}$

Άρα τελικά $f(x)=\frac{(2-\beta)x^2-\gamma x+2}{x-3},x\neq 3$. Από υπόθεση η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$. Άρα

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2-\beta)x^2-\gamma x+2}{x-3}-x\right)=0$

Έτσι,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2-\beta)x^2-\gamma x+2}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2-\beta)x^2-\gamma x+2-x^2+3x}{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1-\beta)x^2+(3-\gamma)x+2}{x-3}\right)=0$$

Όμως, αν 1-β> 0 ή 1-β <0 το παραπάνω όριο απειρίζεται ,έτσι ισχύει $1-\beta=0\Leftrightarrow\beta=1$

Έτσι $f(x)=\frac{x^2-\gamma x+2}{x-3}$ δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\gamma x+2}{x-3}-x\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-\gamma x+2-x^2+3x}{x-3}\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3-\gamma)x+2}{x-3}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3-\gamma)x+2}{x-3}\right)=0\Leftrightarrow 3-\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=3.$$

Τελικά , η συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-3},x\neq 3$

ii) Η f συνεχής στο $[1,2]$ ως ρητή

Η f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως ρητή

$f(1)=f(2=0$

Άρα, από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(1,2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$ δηλαδή η εφαπτομένη της Cf είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε

$f(4)=\frac{4^2-3\cdot4+2}{4-3}=6, f'(\xi)=0$, οπότε η δοθείσα ισότητα παίρνει την μορφή:

$(6-5)x^3+2x(k(x))^3=8\Leftrightarrow x^3+2x(k(x))^3=8$ (2)

Έστω ότι η συνάρτηση k δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,0)$.

Τότε υπάρχουν $x_3,x_4\in(-1,0)$ με $k(x_3)\cdot k(x_4)<0$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_3<x_4$,τότε η k είναι συνεχής στο $[x_3,x_4]$ και $k(x_3)\cdot k(x_4)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(x_3,x_4)$ τέτοιο ώστε

$k(x_0)=0$ και η (1) : $x_0^{\,3}+2x_0\left(k(x_0)\right)^3=8 \Leftrightarrow x_0^{\,3}=8 \Leftrightarrow x_0=2$ άτοπο διότι $x_0=2\notin(-1,0)$

Άρα η k διατηρεί πρόσημο στο $(-1,0)$.(το ερώτημα (Δ) αντιμετωπίζεται και αλγεβρικά.)

Ε. Από το ερώτημα Γ i) $f(4)=\dfrac{4^2-3\cdot 4+2}{4-3}=6$ η δοθείσα ισότητα γίνεται

$$\varphi(x)+2\cdot\varphi(2x)=5x+\frac{6}{2}\Leftrightarrow \varphi(x)+2\cdot\varphi(2x)=5x+3$$

Ισχύει:

$$\int_1^2 \varphi(x)+2\cdot\varphi(2x)dx=\int_1^2 5x+3dx \Leftrightarrow \int_1^2\varphi(x)dx+2\int_1^2\varphi(2x)dx=\left[\frac{5x^2}{2}+3x\right]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2\varphi(x)dx+2\int_1^2\varphi(2x)dx=(\frac{5\cdot 2^2}{2}+3\cdot 2)-(\frac{5\cdot 1^2}{2}+3\cdot 1)\Leftrightarrow \int_1^2\varphi(x)dx+2\int_1^2\varphi(2x)dx=16-\frac{11}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2\varphi(x)dx+2\int_1^2\varphi(2x)dx=\frac{32-11}{2}\Leftrightarrow \int_1^2\varphi(x)dx+2\int_1^2\varphi(2x)dx=\frac{21}{2}\ (***)$$

Στο ολοκλήρωμα $2\int_1^2\varphi(2x)dx$ θέτουμε $2x=u$ άρα $2dx=du$

Για $x=1$ προκύπτει $u=2$

Για $x=2$ προκύπτει $u=4$

Άρα $\int_1^2\varphi(2x)dx=\dfrac{1}{2}\int_2^4\varphi(u)du$ οπότε η $(***)$ γίνεται

$$\int_1^2\varphi(x)dx+2\frac{1}{2}\int_2^4\varphi(u)du=\frac{21}{2}\Leftrightarrow \int_1^2\varphi(x)dx+\int_2^4\varphi(u)du=\frac{21}{2}\Leftrightarrow \int_1^2\varphi(x)dx+\int_2^4\varphi(x)dx=\frac{21}{2}\Leftrightarrow \int_1^4\varphi(x)dx=\frac{21}{2}$$

6.Εστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή. Έστω επίσης η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(x)-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Ισχύουν:

•Η ευθεία με εξίσωση $y=2x$ είναι ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i.Η g είναι κυρτή

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **και** $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=0$

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g

iv. $g'(x)<0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

v. Αν E είναι το εμβαδό που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f ,τις ευθείες x=1,x=2 και τον άξονα x'x τότε να δείξετε ότι $E>3$

vi.(bonus)

Αν επιπλέον $f(0)=0$ $f(1)=\alpha$ **.Να δείξετε ότι:**

α. $xf'(x)\ge f(x)$ **για κάθε** $x\ge 0$ **β.** $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{\alpha}{2}$

Λύση

i.Έχουμε $g'(x)=f'(x)-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επειδή η f είναι κυρτή, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$f'(x_1)<f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x_1)-2<f'(x_2)-2\Leftrightarrow g'(x_1)<g'(x_2)$ άρα η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς η g είναι κυρτή.

ii.Η ευθεία $y=2x$ είναι ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$ άρα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(f(x)-2x\right)+2x\right)=+\infty$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ και γνωρίζουμε από υπόθεση ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.Συνεπώς από τον κανόνα De L Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

Δηλαδή, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=2$ και συνεπώς:

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f'(x)-2\right)=\lim_{x\to+\infty} f'(x)-\lim_{x\to+\infty} 2=2-2=0$$

iii. Η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, ως παραγωγίσιμη .Οπότε ,έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} g'(x),\lim_{x\to+\infty} g'(x)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} g'(x),0\right)$$

iv.Επομένως , $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, ως παραγωγίσιμη .Οπότε ,έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} g(x),\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x),\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)=\left(0,\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)$$

Επομένως , $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

v. Για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x > 0$ άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^2 f(x)dx$ συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\int_1^2 f(x)dx > 3$. Έτσι εφόσον $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_1^2 g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 (f(x) - 2x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > \int_1^2 2xdx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > \left[x^2\right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > 4 - 1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > 3 \Leftrightarrow E > 3$$

vi.α) Η συνάρτηση f ικανοποίει τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0, x]$ θα υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x}$ (1)

Αν $\xi < x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} < f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) < xf'(x)$

Άρα $f(x) \le xf'(x)$ για κάθε $x \ge 0$ (2)

με την ισότητα να ισχύει για x=0.

β) Από την (2) προκύπτει:

$$\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx \le \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx \le \left[xf(x)\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx \le f(1) - f(0) \Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx \le a \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx \le \frac{a}{2}$$

Πήγα στο σχολείο να ρωτήσω για την πρόοδο του Γιάννη,ρώτησα τον μαθηματικό του:Μπορεί να αντιμετωπίσει τα θέματα των εξετάσεων σε δυο εβδομάδες.Ο μαθηματικός,τραβώντας τα σύμφωνα μου είπε με ύφος που δεν σήκωνε αντιρρήσεις.

«Ένα θα σας πω.Ταλίν.»Έφυγα προβληματισμένη.

Πηγα στο σπιτι και αναζητησα στην λέξη στο διαδύκτυο

Ταλίν: πρωτεύουσα της Εσθόνιας.

Τα ερωτηματικά παρέμειναν.Το βράδυ,ο Γιάννης με διαφώτισε.

Ο μαθηματικός καταγόταν από το Αγρίνιο.«Ταλίν» σημαίνει«Τα λύνει».

Μαρία 44 ετών, μητέρα υποψηφίου πανελληνίων

7.Α.Δίνονται δυο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2} &, x\neq 0\\ \beta(\beta-6)+\alpha(\alpha-2)+\dfrac{21}{2} &, x=0\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{3e^x-\beta}{3x} &, x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

Όπου α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να βρείτε τις τιμές των α,β.

Β. Αν $a=1$ και $\beta=3$,να δείξετε ότι :

α) η συνάρτηση g είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

β) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)}-\dfrac{g(0)+2015}{2017}=0$

δ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=-2$ και $x=0$.

Λύση

Α.α)Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$ συνεπώς

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\underset{D.Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(xe^x-e^x+1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f(0)=\beta(\beta-6)+\alpha(\alpha-2)+\frac{21}{2}$$

Οπότε $\dfrac{1}{2}=\beta(\beta-6)+\alpha(\alpha-2)+\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow 1=2\beta(\beta-6)+2\alpha(\alpha-2)+21\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\beta^2-12\beta+2\alpha^2-4\alpha+20=0\Leftrightarrow \beta^2-6\beta+\alpha^2-2\alpha+10=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2-6\beta+9+\alpha^2-2\alpha+1=0\Leftrightarrow(\beta-3)^2+(\alpha-1)^2=0\Leftrightarrow \beta=3\ \ και\ \ \alpha=1$

Β. Άρα οι συναρτήσεις έχουν την μορφή

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2} &, x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} &, x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$,με $g'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)'=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underset{L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Άρα, η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=\dfrac{1}{2}=f(0)$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δηλαδή η g είναι μια παράγουσα της f.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση

$h(x)=e^x(x-1)+1, x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$h'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Επομένως:

$h'(x)=0\Leftrightarrow xe^x=0\Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0\Leftrightarrow xe^x>0\Leftrightarrow x>0$ η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

$h'(x)<0\Leftrightarrow xe^x<0\Leftrightarrow x<0$ η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ συνεπώς για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$: $h(x)>h(0)=0$

Δηλαδή

$e^x(x-1)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ άρα

$f(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και επειδή $f(0)=\dfrac{1}{2}>0$ προκύπτει:

$f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) $e^{f(x)}-\dfrac{g(0)+2015}{2017}=0\Leftrightarrow e^{f(x)}-\dfrac{2016}{2017}=0\Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{2016}{2017}\Leftrightarrow f(x)=\ln\dfrac{2016}{2017}<0$ άρα από ερώτημα (β) η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ρα και στο διάστημα $[-2,0]$.Επίσης από προηγούμενο ερώτημα ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E=\int_{-2}^{0}f(x)dx=g(0)-g(-2)$ (θυμηθείτε ότι η g είναι μια παράγουσα της f.)

Δηλαδή:

$$E=\int_{-2}^{0}f(x)dx=g(0)-g(-2)=1-\frac{e^{-2}-1}{-2}=1+\frac{e^{-2}-1}{2}=\frac{2+e^{-2}-1}{2}=\frac{1+e^{-2}}{2}=\frac{1+\frac{1}{e^2}}{2}=\frac{e^2+1}{2e^2}\text{ τ.μ}$$

8.Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει :

$(x^2-4)f'(x)+1974f(x)=0$ **για κάθε** $x\in[-2,2]$ **(1)**

i.Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

ii.Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $[-2,2]$.

iii.Για την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x\ln x+f(1)-f(2)}{x+2}$ να δείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε ένα μόνο σημείο.

iv. Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_1^e\frac{2\ln x+x+2}{(x+2)^2}dx$

Λύση

i.Η σχέση (1) για $x=-2$ $((-2)^2-4)f'(-2)+1974f(-2)=0\Leftrightarrow 1974f(-2)=0\Leftrightarrow f(-2)=0$

Η σχέση (1) για $x=2$ ...$\Leftrightarrow f(2)=0$

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο στο $[-2,2]$.Για τις θέσεις μεγίστου –ελαχίστου διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν είναι και οι δυο (τιμές μεγίστου-ελαχίστου) στα άκρα τότε $\min f(x)=\max f(x)=0$
- Αν η μια είναι στο άκρο και η άλλη στο $x_0\in(-2,2)$,τότε από το θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$ και η (1) για $x=x_0$: $(x_0^2-4)f'(x_0)+1974f(x_0)=0\Leftrightarrow 1974f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$ άρα $\min f(x)=\max f(x)=0$.
- Αν και οι δυο θέσεις ακροτάτων βρίσκονται στο διάστημα $(-2,2)$ και είναι τα σημεία x_1,x_2 συνεπώς ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση και την χρήση της (1) προκύπτει: $\min f(x)=\max f(x)=0$.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\min f(x)=\max f(x)=0$

ii.Από προηγούμενο ερώτημα εφόσον σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$\min f(x)=\max f(x)=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

iii. $g(x)=\dfrac{x\ln x+f(1)-f(2)}{x+2}=\dfrac{x\ln x}{x+2}$, $x>0$ Για να δείξουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε ένα μόνο σημείο,αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $g(x)\geq g(x_0)$ για κάθε $x>0$.Έχουμε: $g'(x)=\dfrac{2\ln x+x+2}{(x+2)^2}, x>0$ (2)

Δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του αριθμητή συνεπώς θεωρούμε συνάρτηση

$h(x)=2\ln x+x+2, x>0$ άρα η (2) γίνεται: $g'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+2)^2}, x>0$ (3)

Έχουμε: $h'(x)=\dfrac{2}{x}+1>0$ για κάθε $x>0$. Ακόμα $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ άρα το σύνολο τιμών της h στο $A=(0,+\infty)$ είναι $h(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Επειδή $0\in h(A)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα ,έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε : $h(x_0)=0$

Συνεπώς:

-Για $x=x_0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)=h(x_0) \Leftrightarrow g(x)=g(x_0)$

-Για $x>x_0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(x_0) \Leftrightarrow g(x)>g(x_0)$

-Για $x<x_0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)<h(x_0) \Leftrightarrow g(x)<g(x_0)$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε ένα μόνο σημείο.

iv. $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x+x+2}{(x+2)^2}dx=\int_1^e g'(x)dx=[g(x)]_1^e=\ldots$

9.Α.Δίνεται συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,+\infty)$ τέτοια ώστε να ισχύει :

- $f^2(x)=4x$ **για κάθε** $x\geq 0$
- $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{x}=1$

Να βρείτε τον τύπο της f .

Β.Αν $f(x)=2\sqrt{x}$ **,** $x\geq0$

i.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της Μ(α,f(α)) με $a>0$**.**

ii.Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα x'x.

iii.Αν ένα σημείο Μ κινείται στην γραφική παράσταση της f έτσι ώστε να απομακρύνεται από τον άξονας y'y με ρυθμό 2 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο,να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του χωρίου Ω την χρονική στιγμή κατά την οποία η τεταγμένη του είναι ιση με 4 μονάδες.

iv.Να βρείτε $\lambda\in(-\alpha,\alpha)$ **τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση** $x=\lambda$ **να χωρίζει το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.**

v.Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}**.**

vi. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f **και** f^{-1}**.**

Γ(Bonus).i.Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{2}, x\in\mathbb{R}$ **,να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης από το σημείο Α(μ,-2) προς την Cg.**

ii.Αν Β(κ,g(κ)) είναι σημείο επαφής της παραπάνω εφαπτομένης να δείξετε ότι η τετμημένη του ικανοποιεί την εξίσωση $x^2-2\mu x-16=0$**.**

iii.Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες από το σημείο Α(μ,-2) προς την Cg είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση

Α.Από υπόθεση $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{x}=1>0$ άρα ισχύει $\dfrac{f(x)}{x}>0$ κοντά στο 4 με $x>0$ κοντά στο 4 οπότε $f(x)>0$ κοντά στο 4 .

Όμως $f^2(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0$ συνεπώς η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$ άρα στο Α διατηρεί πρόσημο.

(εναλλακτικά $g(x)=\dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xg(x)=f(x)$,λαμβάνουμε όρια στο 4: $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4} xg(x)=4$, f συνεχής στο 4 άρα f(4)=4>0…..)

Τελικά $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.Με το '=' να ισχύει μόνο στο 0.
Έτσι προκύπτει : $f(x)=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}, x\ge 0$

(εναλλακτικά $g(x)=\dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xg(x)=f(x)$,λαμβάνουμε όρια στο 4: $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4} xg(x)=4$, f συνεχής στο 4 άρα f(4)=4>0…..)

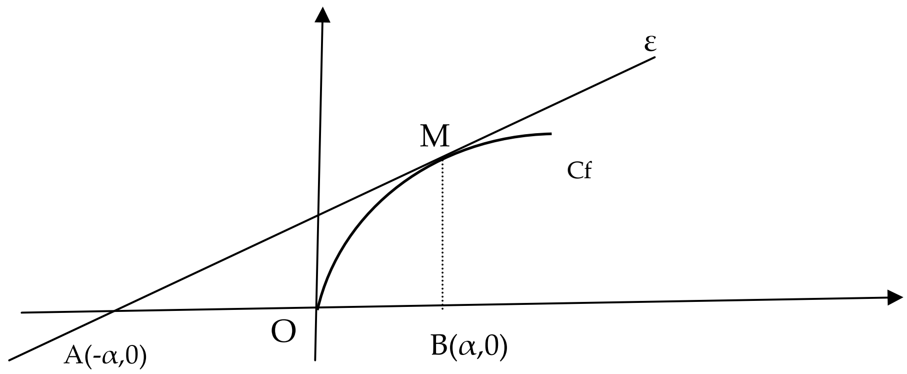
Β.

i. $f'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x>0$, $f(a)=2\sqrt{a}$, $f'(a)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$,

η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι:

(ε): $y-f(a)=f'(a)(x-a) \Leftrightarrow y-2\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}(x-a) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{a}}x+\sqrt{a}$ (3)

ii.



Για $y=0 \Rightarrow x=-a$ συνεπώς η (ε) τέμνει τον άξονα x'x στο $A(-a,0)$.Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=(AMB)-\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{2}(AB)(MB)-\int_0^a 2\sqrt{x}dx=\frac{1}{2}2\cdot a\cdot 2\sqrt{a}-\int_0^a 2x^{\frac{1}{2}}dx=$$

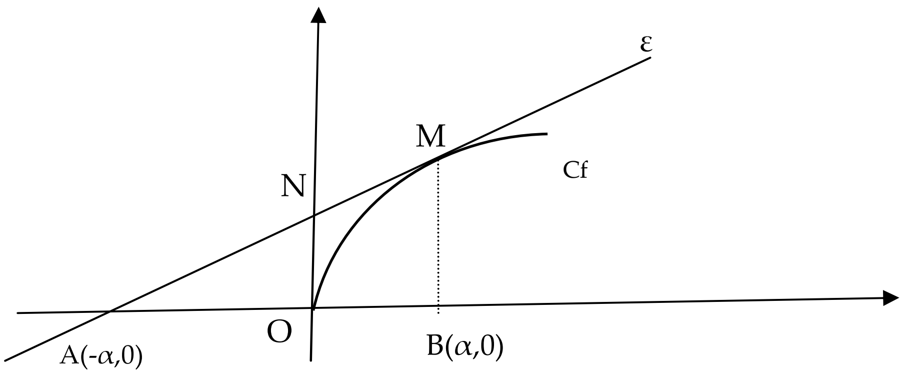
$$=2a\sqrt{a}-\left[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a=2a\sqrt{a}-\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=2a\sqrt{a}-\left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^a=2a\sqrt{a}-\left[\frac{4}{3}x\sqrt{x}\right]_0^a=2a\sqrt{a}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{2}{3}a\sqrt{a}\ \tau.\mu$$

iii. $x=a(t)$, τετμημένη του Μ, $E(t)$ το εμβαδό του χωρίου Ω, καθώς το Μ κινείται πάνω στην Cf .Την χρονική στιγμή t_0 είναι:

$x_M=a(t_0)=4$ και $a'(t_0)=2$ μονάδες /sec

$E(t)=\dfrac{2}{3}a(t)\sqrt{a(t)}=\dfrac{2}{3}a(t)^{\frac{3}{2}}$ και $E'(t)=\left(\dfrac{2}{3}a(t)^{\frac{3}{2}}\right)'=...=a'(t)\sqrt{a(t)}$ οπότε

$E'(t_0)=a'(t_0)\sqrt{a(t_0)}=\sqrt{4}\cdot 2=4$ μ/sec iv.



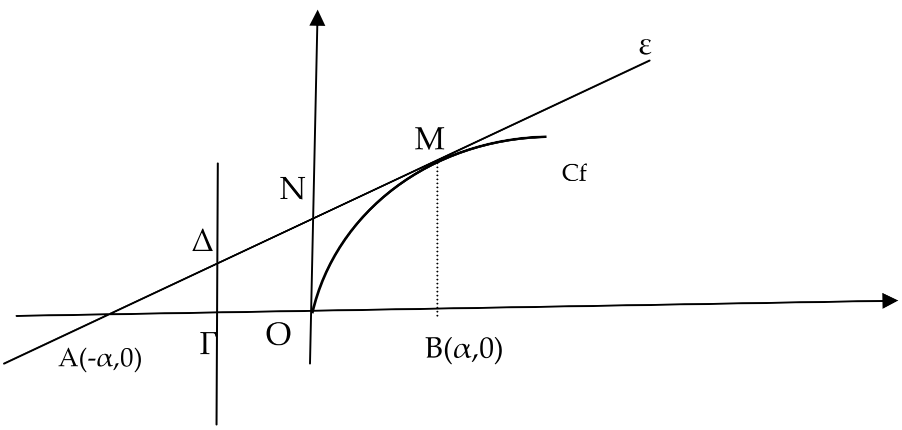
Έστω N το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) και του άξονα y'y.Για $x=0$ από την σχέση (3) λαμβάνουμε:

$y=\sqrt{a}$ συνεπώς $N(0,\sqrt{a})$.Το εμβαδό του τριγώνου OAN είναι:

$$E_1=(OAN)=\frac{1}{2}(OA)(ON)=\frac{1}{2}a\sqrt{a}$$

Από την προφανή σχέση $\frac{1}{2}a\sqrt{a}>\frac{1}{3}a\sqrt{a}$ προκύπτει ότι $E_1>\frac{E}{2}$, οπότε η ζητούμενη ευθεία που χωρίζει το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία θα έχει εξίσωση $x=\lambda$ με $\lambda\in(-\alpha,0)$.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Γ(λ,0) και τη ευθεία ε στο σημείο Δ.



Για $x=\lambda$ από την σχέση (3) έχουμε $y=\frac{\lambda+\alpha}{\sqrt{a}}$, οπότε $\Delta(\lambda,\frac{\lambda+\alpha}{\sqrt{a}})$

Είναι :

$$E_2=(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{1}{2}(\mathrm{A\Gamma})(\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(\lambda+a)\frac{\lambda+a}{\sqrt{\alpha}}=\frac{(\lambda+a)^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

Έχουμε:

$$E_2=\frac{\mathrm{E}}{2}\Leftrightarrow\frac{(\lambda+a)^2}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow\frac{(\lambda+a)^2}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow(\lambda+a)^2=\frac{2}{3}\alpha^2\Leftrightarrow|\lambda+a|=\frac{\sqrt{6}}{3}|\alpha|$$

$$\underset{\alpha>0}{\overset{\lambda+a>0}{\Leftrightarrow}}\lambda+a=\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha\Leftrightarrow\lambda=\frac{\sqrt{6}-3}{3}\alpha$$

v. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα είναι και 1-1 ,επομένως αντιστρέφεται. Για την f^{-1}:

$y=2\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{y}{2}\overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow}x=\frac{y^2}{4}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{y^2}{4}, y\geq 0$ με αλλαγή μεταβλητής $f^{-1}(x)=\frac{x^2}{4}, x\geq 0$

vi.Τα κοινά σημεία προκύπτουν από την λύση του συστήματος $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x)\end{cases}$

άρα $\frac{x^2}{4}=2\sqrt{x}\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}...\Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$.Λόγω συμμετρίας των Cf και Cf^{-1} ως προς την διχοτόμο y=x το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=2\int_0^4 (x-f(x))dx=...=\frac{16}{3}$ τετραγωνικές μονάδες

Γ. i.Από προηγούμενο ερώτημα ισχύει: $g(x)=\frac{\frac{x^2}{4}}{2}=\frac{1}{8}x^2, x\in\mathbb{R}$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη (η) με σημείο επαφής Β(κ,g(κ)) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta=g'(\kappa)$ και εξίσωση: $y-g(\kappa)=g'(\kappa)(x-\kappa)\Leftrightarrow y-\frac{1}{8}\kappa^2=\frac{1}{4}\kappa(x-\kappa)$

ii. Η εφαπτομένη (η) διέρχεται από το σημείο Α(μ,-2) συνεπώς οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της

$$-2-\frac{1}{8}\kappa^2=\frac{1}{4}\kappa(\mu-\kappa)\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\kappa^2-2\mu\kappa-16=0$$

Συνεπώς, η τετμημένη του Α ικανοποιεί την εξίσωση $x^2-2\mu x-16=0$.

iii.Υπάρχουν δυο εφαπτόμενες από το σημείο Α(μ,-2) προς την Cg, οι η_1,η_2 ,αν $B_1(\kappa_1,g(\kappa_1)), B_2(\kappa_2,g(\kappa_2))$ τα σημεία επαφής τους με την Cg τότε οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι : $\lambda_{\eta 1}=g'(\kappa_1), \lambda_{\eta 2}=g'(\kappa_2)$

$$\lambda_{\eta 1}\cdot\lambda_{\eta 2}=g'(\kappa_1)\cdot g'(\kappa_2)=\frac{\kappa_1}{4}\cdot\frac{\kappa_2}{4}=\frac{1}{16}\kappa_1\kappa_2 \quad (1)$$

Όμως κ_1,κ_2 είναι από ερώτημα (ii) ρίζες της εξίσωσης $x^2-2\mu x-16=0$ άρα από τους τύπους του Vieta ισχύει: $P=\kappa_1\cdot\kappa_2=-16$

Η (1) γίνεται $\lambda_{\eta 1}\cdot\lambda_{\eta 2}=\frac{1}{16}\kappa_1\kappa_2=\frac{1}{16}(-16)=-1$ οπότε $\eta_1\perp\eta_2$.

«Υπάρχουν δυο κατηγορίες επαναληπτικών ασκήσεων στα μαθηματικά: Αυτές που δεν μπορώ να λύσω και αυτές που νομίζω ότι έλυσα.»

Κορνήλιος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

10.Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.Η εφαπτομένη (ε) της Cf στο σημείο της A(1,f(1)) έχει εξίσωση y=x.

Ai.Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{\eta\mu(x-1)}$.

ii.Αν είναι γνωστό ότι $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f.

Β.Αν $f(x)=e^{x-1}$ και $fog(x)=x^2+1$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i.Να δείξετε ότι $g(x)=\ln(x^2+1)+1$, $x\in\mathbb{R}$

ii.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cg που είναι παράλληλη στην (ε).

iii.Να δείξετε ότι η εξίσωση $fog(x)=g(x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

iv.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^1\frac{x(g(x)-1)}{fog(x)}dx$$

Γ.(Bonus) Δίνεται συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε :

$$h(x)=\left|ef(x)+(\lambda-1)x-1\right| \text{ όπου } \lambda\geq 0$$

Να βρείτε το λ και την $h(x)$.

Α.i. Η εφαπτομένη (ε) της Cf στο σημείο της A(1,f(1)) έχει εξίσωση y=x, ισχύει $f'(1)=1$, το σημείο Α ικανοποιεί την εξίσωση της ε άρα f(1)=1 .

Το συγκεκριμένο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ αλλά δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L Hospital διότι θα είχαμε: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{\eta\mu(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu(x-1)}$ το τελευταίο όριο δεν ισούται κατά ανάγκη με $\dfrac{f'(1)}{1}$ διότι δεν είναι γνωστό αν η f' είναι συνεχής στο 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{\eta\mu(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-1}{x-1}}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{1}=1.$$

ii. Εφόσον $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,από εφαρμογή σχολικού βιβλίου ισχύει: $f(x)=ce^x$, $x\in\mathbb{R}$

Για χ=1 : $f(1)=ce^1 \Leftrightarrow 1=ce \Leftrightarrow c=\dfrac{1}{e}$ άρα $f(x)=e^{x-1}$, $x\in\mathbb{R}$

Β.i Για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $f(g(x))=x^2+1$

Επίσης : $f(g(x))=e^{g(x)-1}$

άρα $e^{g(x)-1}=x^2+1 \Leftrightarrow g(x)-1=\ln(x^2+1) \Leftrightarrow g(x)=\ln(x^2+1)+1$, $x\in\mathbb{R}$

ii.Έστω $M(x_0,g(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της Cg που είναι παράλληλη στην (ε) τότε θα ισχύει $g'(x_0)=1$.

$g'(x)=\left(\ln(x^2+1)+1\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ άρα $\dfrac{2x_0}{{x_0}^2+1}=1 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x_0=1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της Cg είναι:

$y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow ...... \Leftrightarrow y=x+\ln 2$

iii. $fog(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+1=\ln(x^2+1)+1\Leftrightarrow x^2=\ln(x^2+1)\Leftrightarrow \ln(x^2+1)-x^2=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $k(x)=\ln(x^2+1)-x^2, x\in\mathbb{R}$.

$k(0)=\ln(0^2+1)-0^2=0$ άρα x=0 είναι μια ρίζα της $k(x)=0$ θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική.

Έχουμε: $k'(x)=\left(\ln(x^2+1)-x^2\right)'=..=-\dfrac{2x^3}{x^2+1}$

Έτσι

$x=0$ τότε $k'(0)=0$

$x<0$ τότε $k'(x)<0$ άρα η συνάρτηση k είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty]$.

$x>0$ τότε $k'(x)>0$ άρα η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

Αν $x<0\overset{k\searrow}{\Leftrightarrow}k(x)>k(0)\Leftrightarrow k(x)>0$

Αν $x>0\overset{k\nearrow}{\Leftrightarrow}k(x)>k(0)\Leftrightarrow k(x)>0$

Οπότε για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $k(x)>0$

Συνεπώς, η x=0 είναι μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ της $k(x)=0$

iv.

$$I=\int_0^1\frac{x(g(x)-1)}{fog(x)}dx=\int_0^1\frac{x(\ln(x^2+1)+1-1)}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x(\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx\underset{du=\frac{2x}{x^2+1}}{\overset{u=\ln(x^2+1)}{=}}\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}udu=\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln 2}=\frac{\ln 2}{2}$$

Γ. Έχουμε:

$h(x)=\left|ef(x)+(\lambda-1)x-1\right|=\left|e^x+(\lambda-1)x-1\right|$

$h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όμως $h(0)=0$ δηλαδή $h(x)\geq h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε από το θ. Fermat θα είναι

$$h'(0)=0 \quad (1)$$

$$h'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|e^x+(\lambda-1)x-1\right|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x+(\lambda-1)x-1}{x}\right|=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x-1}{x}+\lambda-1\right|$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=k'(0)=1,\ k(x)=e^x$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\dfrac{e^x-1}{x}+\lambda-1\right|=\left|\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^x-1}{x}+\lambda-1\right)\right|=\left|(1+\lambda-1)\right|=\lambda$ από την σχέση (1) έχουμε λ=0 άρα

$h(x)=\left|e^x-x-1\right|=e^x-x-1, x\in\mathbb{R}$

Προβλήματα μαθηματικών

-Έχεις πέντε σουβλάκια και έρχεται ο Γιάννης και σου τρώει τα δυο, τι έχουμε;

-Ανθρωποκτονία από πρόθεση....

11.Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(1) $f(f'(x))+f(x)=0$ **για κάθε** $x>0$

i.Να δείξετε ότι κάθε ευθεία παράλληλη στο οριζόντιο άξονα x'x τέμνει την Cf σε ακριβώς ένα σημείο.

ii.Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf σε κάθε σημείο της είναι «κάτω» από την Cf με εξαίρεση το σημείο επαφής.

iii.Να δείξετε ότι η Cf τέμνει τον x'x σε ακριβώς ένα σημείο Α(x_0,0).

iv.Να δείξετε ότι η Cf' τέμνει την ευθεία $y=x$ σε σημείο με τετμημένη x_0.

v.Αν η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της με τετμημένη $x_1=1$ είναι 45° να δείξετε ότι: $\int_1^3 f(x)dx<2$

Λύση

i. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι 1-1.Απο την (1) προκύπτει:

$$f'(x)\in D_f=(0,+\infty) \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Δηλαδή, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς 1-1.

ii. Η εφαπτομένη της Cf σε κάθε σημείο της είναι «κάτω» από την Cf με εξαίρεση το σημείο επαφής όταν η f είναι κοίλη. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι κοίλη. Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε:

$$f'(f'(x))f''(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(f'(x))f''(x)=-f'(x) \Leftrightarrow f''(x)=-\frac{f'(x)}{f'(f'(x))}<0 \text{ για κάθε } x>0$$

αφού ισχύει $f'(x)>0$ και $f'(f'(x))>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

iii.Υποθέτουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$. (θα εργαστούμε με απαγωγή σε άτοπο) και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής συμπεραίνουμε ότι διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)$.Δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Επομένως $f(f'(x))+f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ή $f(f'(x))+f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Αυτό όμως είναι αδύνατο να συμβαίνει λόγω της δοθείσας σχέσης .Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα x_0 στο διάστημα $(0,+\infty)$ η οποία μάλιστα είναι και μοναδική καθώς η f είναι 1-1.

iv.αποδείξαμε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$

Θέτουμε στην (1) όπου x το x_0:

$f(f'(x_0))+f(x_0)=0 \Leftrightarrow f(f'(x_0))=0 \Leftrightarrow f(f'(x_0))=f(x_0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f'(x_0)=x_0$ άρα η Cf' τέμνει την ευθεία $y=x$ σε σημείο με τετμημένη x_0.

v.Θέτουμε στην (1) όπου x το 1 και έχουμε:

$f(f'(1))+f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)+f(1)=0 \Leftrightarrow 2f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$

(η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της με τετμημένη $x_1=1$ είναι 45° άρα $f'(1)=\varepsilon\varphi 45^0=1$)

Η εφαπτομένη (ε) της Cf στο σημείο (1,0) έχει εξίσωση $y-f(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$

Αποδείξαμε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη. Επομένως , η Cf βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής (1,0) .Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι :

$f(x)\le x-1 \Leftrightarrow x-1-f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[1,3]$

Και η συνάρτηση $x-1-f(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[1,3]$.Οπότε:

$$\int_1^3(x-1-f(x))dx>0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x))dx<\int_1^3(x-1)dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x))dx<\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x))dx<\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x))dx<\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x))dx<4-3+1 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x))dx<2\,.$$

12.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ **και η συνάρτηση** $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$ **με τύπο** $f(x)=\frac{3x+2}{x^2-4}$ **και ισχύουν οι ιδιότητες:**

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx=1$
- $g(x)\geq \sigma\upsilon\nu x$ **για κάθε** $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

"Χήρα" βοηθείας

i.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(x)-\sigma\upsilon\nu x]dx$ **.**

ii.Να δείξετε ότι $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **για κάθε** $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$**.**

iii.Να δείξετε ότι $g(x)<\frac{\eta\mu x}{x}<\frac{3+2f(0)}{2}$ **για κάθε** $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$**.**

iv.Να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ **.**

v.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(x)f(\eta\mu x)]dx$ **.**

vi.Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cf^{-1} **τους άξονες y'y,x'x και την ευθεία y=1.**

Λύση

i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(x)-\sigma\upsilon\nu x]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx-[\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-1=0$

ii.θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=g(x)-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η οποία από υπόθεση είναι μη αρνητική στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η οποία αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι παντού μηδέν στο

στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα συμπεραίνουμε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}(g(x)-\sigma\upsilon\nu x)dx>0$ που είναι άτοπο από το ερώτημα i.. Συνεπώς $h(x)=0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και τελικά $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

iii. Η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται:

$$g(x)<\frac{\eta\mu x}{x}<\frac{3+2f(0)}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x<\frac{\eta\mu x}{x}<\frac{3+2(-\frac{1}{2})}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x<\frac{\eta\mu x}{x}<1 \text{ για κάθε } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η ζητούμενη ανισότητα γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu x<\frac{\eta\mu x-\eta\mu 0}{x-0}<\sigma\upsilon\nu 0$$

Η συνάρτηση $h(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $[0,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x)$ για οποιαδήποτε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.Άρα από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιος ώστε:

$$h'(\xi)=\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$

Δηλαδή

$$\sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu x - \eta\mu 0}{x-0}$$

Αρκεί, λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x < \sigma\upsilon\nu\xi < \sigma\upsilon\nu 0$ που ισχύει διότι $0<\xi<x<\frac{\pi}{2}$ και η συνάρτηση $h'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

iv. Η f με τυπο $f(x)=\frac{3x+2}{x^2-4}$ ορισμενη $(-2,2)$ είναι παραγωγισισμη αρα

$$f'(x)=\left(\frac{3x+2}{x^2-4}\right)'=\frac{3(x^2-4)-(3x+2)2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{3x^2-12-6x^2-4x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-3x^2-4x-12}{\left(x^2-4\right)^2}<0 \text{ για κάθε } x\in(-2,2) \text{ άρα}$$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-2,2)$ και συνεπώς 1-1 στο $(-2,2)$ οπότε αντιστρέφεται.

Για το πεδίο ορισμού της f^{-1} έχουμε:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{3x+2}{x^2-4}=+\infty,\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{3x+2}{x^2-4}=-\infty$$

$$Df^{-1}=f((-2,2))\overset{f\searrow}{=}\left(\lim_{x\to -2^+} f(x),\lim_{x\to -2^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[g(x)f(\eta\mu x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\cdot f(\eta\mu x)]dx$

θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$

-Αν $x=0$ τότε $u=0$

-Αν $x=\frac{\pi}{2}$ τότε $u=1$

Έτσι $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\cdot f(\eta\mu x)dx=\int_0^1 f(u)du=\int_0^1\frac{3u+2}{u^2-4}du\overset{*}{=}\int_0^1\left(\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u+2}\right)du=2\left[\ln|u-2|\right]_0^1+\left[\ln|u+2|\right]_0^1=\ln\frac{3}{8}$

vi.Λόγω της συμμετρίας των Cf, Cf^{-1} ως προς την $y=x$, το χωρίο Ω1 του οποίου ζητείται το εμβαδό είναι ίσο άρα και ισεμβαδικό με το χωρίο Ω2 που περικλείεται από την Cf, τους άξονες x'x,y'y και την ευθεία $x=1$.Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα .Άρα, για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε:

$$f(x)\le f(0)=-\frac{1}{2}<0$$

Επομένως

$$E(\Omega 1)=\mathrm{E}(\Omega 2)=-\int_0^1 f(x)dx=-I=-\ln\frac{3}{8} \text{ τ.μ}$$

(*)

$$\frac{3u+2}{u^2-4}=\frac{\alpha}{u-2}+\frac{\beta}{u+2}\Leftrightarrow 3u+2=\alpha(u+2)+\beta(u-2)\Leftrightarrow 3u+2=(\alpha+\beta)u+2\alpha-2\beta\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\alpha=2,\beta=1$$

Ένα βιβλίο μαθηματικών αποτελείται από δυο μέρη.Το πρώτο μέρος, όπου η μεθοδολογία εφιστά την προσοχή σε πλάνες και γνωστά λάθη. Το δεύτερο μέρος,η ασκησιολογία, όπου και διαπράττονται τα προηγούμενα λάθη.

Θρασύβουλος 72 ετών ,συνταξιούχος μαθηματικός

13.Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ έχει τις ιδιότητες:

- $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{2}{e^x}$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$

i.Να δείξετε ότι $f(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii.Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2ex-1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

iii.Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.Να δείξετε ότι:

$$e^{\alpha}+e^{a}(\beta-a)<e^{\beta}<e^{\alpha}+e^{\beta}(\beta-\alpha)$$

iv.Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $M(x_0,f(x_0))$ τέτοιο ώστε η Cf να χωρίζει το ορθογώνιο ΟΑΜΒ σε δυο ισεμβαδικά χωρία (όπου $O(0,0),A(x_0,0),B(0,f(x_0))$).

v.Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της Cf έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $a(t)$ να είναι $a'(t)=a^2(t)$.Έστω (ε) η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Μ και Γ το σημείο τομής της (ε) με τον y'y.Να βρείτε το ρυθμό της μεταβολής της τεταγμένης του Γ όταν το Μ έχει τετμημένη 2.

Λύση

i. $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{2}{e^x}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)+f(x)}{f(x)f'(x)}=\dfrac{2}{e^x}\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=2f(x)f'(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(e^xf(x)\right)'=\left(f^2(x)\right)'\Leftrightarrow e^xf(x)=f^2(x)+c$, c πραγματικός σταθερός αριθμός (1)

$g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}\Leftrightarrow xg(x)=f(x)-1\Leftrightarrow xg(x)+1=f(x)$,λαμβάνουμε όρια (υπάρχουν)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)+1\right)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ η f όμως είναι συνεχής στο 0 άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

Βάζουμε στην (1) όπου x=1: $e^0f(0)=f^2(0)+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=1$

Άρα $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=2ex-1\Leftrightarrow e^x=2ex-1\Leftrightarrow e^x-2ex+1=0$

Έστω $h(x)=e^x-2ex+1$.Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, $h(0)=2>0,h(1)=-e+2<0$ οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Για την μοναδικότητα. Έστω ότι η εξίσωση έχει δυο τουλάχιστον ρίζες $x_1,x_2\in(0,1)$ τότε από το θεώρημα Rolle για την h στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi}-2e=0\Leftrightarrow e^{\xi}=2e\Leftrightarrow\xi=1+\ln 2>1$ άτοπο καθώς $\xi\in(0,1)$.Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$.

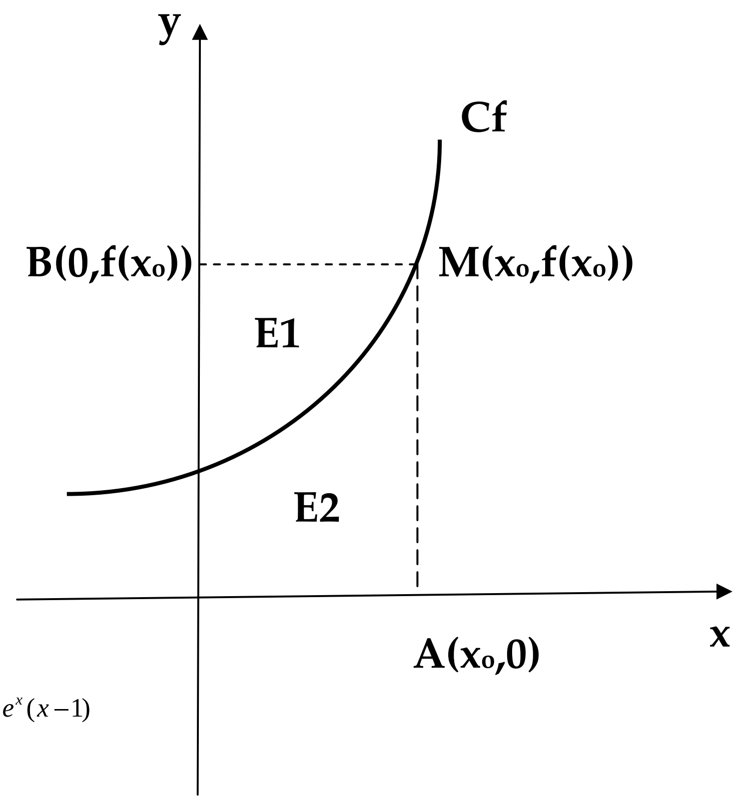
iii.Η προς απόδειξη σχέση γράφεται:

$$e^{\alpha}+e^{a}(\beta-a)<e^{\beta}<e^{\alpha}+e^{\beta}(\beta-\alpha)\overset{\beta-\alpha}{\Leftrightarrow}...\Leftrightarrow e^{\alpha}<\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}$$

Αρκεί να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.Πραγματικά ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος συνεπώς υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{\xi_1}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι : $e^{\alpha}<e^{\xi_1}<e^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\xi_1<\beta$ που ισχύει.



iv.Από υπόθεση

$\int_0^{x_o} f(t)dt = \frac{1}{2}x_o f(x_o) \Leftrightarrow \left[e^x\right]_0^{x_0} = \frac{1}{2}x_o e^{x_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x_0} - 1 = \frac{1}{2}x_o e^{x_0} \Leftrightarrow 2e^{x_0} - 2 = x_o e^{x_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_o e^{x_0} - 2e^{x_0} + 2 = 0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $xe^x - 2e^x + 2 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$k(x) = xe^x - 2e^x + 2$, $x \in (0,+\infty)$

Και την μελετάμε ως προς την μονοτονία.

$k'(x) = \left(xe^x - 2e^x + 2\right)' = e^x + xe^x - 2e^x = xe^x - e^x = e^x(x-1)$

Όταν

- $x = 1$ τότε $k'(x) = 0$
- $0 < x < 1$ τότε $k'(x) < 0$ άρα k γνησίως φθίνουσα στο $x \in (0,1]$
- $1 < x$ τότε $k'(x) > 0$ άρα k γνησίως αύξουσα στο $x \in [1,+\infty)$

Η k είναι συνεχής στο $A_1 = (0,1]$, k γνησίως φθίνουσα στο A_1 άρα $k(A_1) = \left[k(1), \lim_{x\to 0^+} k(x)\right) = [e-2, 0)$

Η k είναι συνεχής στο $A_2 = [1,+\infty)$, k γνησίως αύξουσα στο A_2 άρα

$k(A_2) = \left[k(1), \lim_{x\to+\infty} k(x)\right) = [e-2,+\infty)$

$0 \in k(A_2)$ άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_1 \in [1,+\infty)$ (μοναδικό λογω της μονοτονίας) τέτοιο ώστε $k(x_1) = 0$.

v.Η εφαπτομένη (ε) στο σημείο $M(a, f(a))$ έχει εξίσωση:

$(\varepsilon): y - f(a) = f'(a)(x-a) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y - e^a = e^a(x-a)$ (2)

Για x=0 η (2) γίνεται $y - e^a = e^a(0-a) \Leftrightarrow y = e^a - ae^a$.Οπότε $\Gamma(0, e^a - ae^a)$.

Την χρονική στιγμή t είναι $M(a(t), f(a(t)))$ και η τεταγμένη του A είναι $y(t)$, όπου:

$$y(t) = e^{a(t)} - a(t)e^{a(t)},$$

Οπότε:

$y'(t) = \left(e^{a(t)} - a(t)e^{a(t)}\right)' = .. = -a(t)a'(t)e^{a(t)} \overset{a'(t)=a^2(t)}{=} -a^3(t)e^{a(t)}$

Για $t = t_0$,είναι:

$y'(t_0) = -a^3(t_0)e^{a(t_0)}$ με $a(t_0) = 2$,άρα $y'(t_0) = -2^3e^2 \Leftrightarrow y'(t_0) = -8e^2$

«Φέτος τηρώ αυστηρό πρόγραμμα μελέτης,δεν θα διαβάζω μόνο όταν κοιμάμαι και για μισή ώρα μετά το φαγητό. Σήμερα, έχω φάει δεκαπέντε φορές!!

Οράτιος 17 ετών, υποψήφιος πανελληνίων

14.Α.Δινονται η ευθεία $y=-2x+1$ και οι συναρτήσεις $g(x)=e^{-2x}$ και $h(x)=e^{-2x}\eta\mu 2x$

Να δείξετε ότι:

i.η ευθεία (ε) εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g.

ii.οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό σημείο τους.

Β. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε $f(0)=h(0), f(1)=g(0)$ και $f(x)+f'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$

Να δείξετε ότι

$$\int_0^1 g(x)e^{x^2+2x}(f(x)+f'(x))dx\le e$$

Λύση

Α.i. $g'(x)=-2e^{-2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η (ε) : $y=-2x+1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g αν και μόνο υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε :

$$\begin{cases} g'(x_0)=-2 \\ g(x_0)=-2x_0+1 \end{cases} \Leftrightarrow .....\Leftrightarrow x_0=0$$

Άρα , η (ε) εφάπτεται στην Cg στο σημείο Α(0,1).

ii. $h'(x)=\left(e^{-2x}\eta\mu 2x\right)'=..=-2e^{-2x}\eta\mu 2x+2e^{-2x}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\mathbb{R}$

κοινά σημεία των Cg,Ch:

$$h(x)=g(x)\Leftrightarrow \eta\mu 2x=1\Leftrightarrow x_\kappa=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Άρα οι Cg,Ch έχουν άπειρα κοινά σημεία : $(\kappa\pi+\frac{\pi}{4},e^{-2\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)}),k\in\mathbb{Z}$

$$h'(\kappa\pi+\frac{\pi}{4})=-e^{-2\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=g'(\kappa\pi+\frac{\pi}{4})$$

Επομένως σε κάθε σημείο $(\kappa\pi+\frac{\pi}{4},e^{-2\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)}),k\in\mathbb{Z}$ οι Cg,Ch έχουν μια κοινή κλίση, συνεπώς θα εφάπτονται.

Β.Η προς απόδειξη ανισοτική σχέση παίρνει την μορφή:

$$\int_0^1 e^{-2x}e^{x^2+2x}(f(x)+f'(x))dx\le e \quad \text{ή} \quad \int_0^1 e^{x^2}(f(x)+f'(x))dx\le e$$

Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι

$0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le x^2\le x$ άρα $e^{x^2}\le e^x\Leftrightarrow e^{x^2}(f(x)+f'(x))\le e^x(f(x)+f'(x))$ οπότε και

$$\int_0^1\left[e^{x^2}(f(x)+f'(x))\right]dx\le\int_0^1\left[e^x(f(x)+f'(x))\right]dx$$

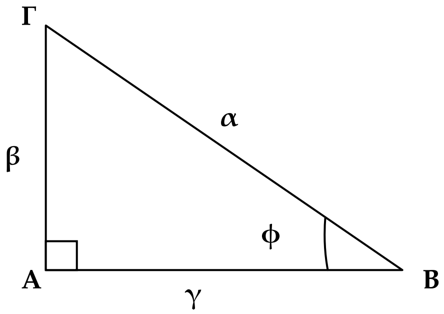
Όμως

$$\int_0^1\left[e^x(f(x)+f'(x))\right]dx=\int_0^1\left[e^xf(x)+e^xf'(x)\right]dx=\int_0^1(e^xf(x))'dx=\left[e^xf(x)\right]_0^1=ef(1)-ef(0)=e$$

Άρα η (1) γράφεται $\int_0^1\left[e^{x^2}(f(x)+f'(x))\right]dx\le e$

(Γεωμετρικά μεζεδάκια που «πατάνε» στο σχολικό βιβλίο…)

15.Α.Δίνεται το μεταβλητό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η υποτείνουσα α είναι σταθερή και ισχύει:



$$\lim_{\hat{\varphi}\to 0}\frac{4-\gamma}{\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}}=L\in\mathbb{R}^{*},\nu\in\mathbb{N}^{*}$$

Η γωνία $\hat{\varphi}$ εκφράζεται σε ακτίνια. Να υπολογίσετε:

i. α

ii.ν

Β.Για α=4.Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\beta-\gamma\sqrt{2}}{2}$ **ii.** $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}(\frac{\beta+\gamma}{\gamma})$ **iii.** $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{2(8-\beta\gamma)}{\beta-\gamma}$

Λύση

Α.i. $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$ άρα $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to 0}\frac{4-\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}}=L\in\mathbb{R}^{*}$

$g(\varphi)=\frac{4-\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}}\Leftrightarrow g(\varphi)\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}=4-\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$ λαμβάνουμε όρια(υπάρχουν) όταν $\varphi\to 0$

$\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(g(\varphi)\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}\right)=\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(4-\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi\right)$ οπότε $L\cdot 0=4-a\Leftrightarrow\alpha=4$

ii. $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to 0}\frac{4-\gamma}{\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to 0}\frac{4-4\sigma\upsilon\nu\varphi}{\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}}\underset{D.H.L}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{\hat{\varphi}\to 0}\frac{(4-4\sigma\upsilon\nu\varphi)'}{\left(\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu}\right)'}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to 0}\frac{4\eta\mu\varphi}{\nu\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu-1}}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to 0}\left(\frac{\eta\mu\varphi}{\hat{\varphi}}\cdot\frac{4}{\nu}\cdot\frac{1}{\left(\hat{\varphi}\right)^{\nu-2}}\right)$

Το όριο είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός συνεπώς θα πρέπει $\nu=2$ (σε κάθε άλλη περίπτωση ν> 2 ή ν=1 το όριο είναι $+\infty$ ή 0)

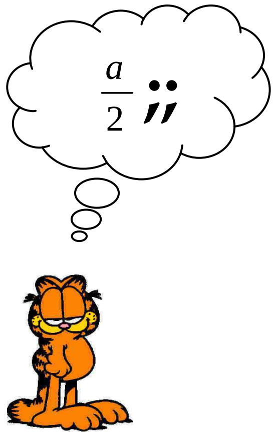
Β.i $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}(\frac{2\beta-\gamma\sqrt{2}}{2})\overset{\eta\mu\varphi=\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow\beta=\gamma\eta\mu\varphi}{=}\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\gamma\eta\mu\varphi-\gamma\sqrt{2}}{2}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\gamma\frac{2\eta\mu\varphi-\sqrt{2}}{2}=\gamma\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}}{2}=0$

ii. $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{\beta+\gamma}{\gamma}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\beta}{\gamma}+1\right)=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\left(\varepsilon\varphi\varphi+1\right)=2$

iii. $\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{2(8-\beta\gamma)}{\beta-\gamma}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{16-2\beta\gamma}{\beta-\gamma}\overset{\beta^2+\gamma^2=16}{=}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma}{\beta-\gamma}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\beta-\gamma)^2}{\beta-\gamma}=\lim\limits_{\hat{\varphi}\to\frac{\pi}{4}}(\beta-\gamma)=0$

16.Δινονται οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

- **Η Cg παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα y'y. (1)**
- $f(a-x)=g(x)$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **με** $a>0, a\in\mathbb{R}$ **(2)**



Να δείξετε ότι:

i.Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $x_0\in[0,a]$.

ii.Η εφαπτομένη της Cf σε ένα σημείο με τετμημένη $\frac{a}{2}$ **είναι παράλληλη της εφαπτόμενης της Cg σε ένα σημείο με τετμημένη** $-\frac{a}{2}$.

iii.Υπάρχει $\xi\in(0,2\alpha)$ **τέτοιο ώστε** $f'(\xi)=0$.

iv.Αν η f είναι κοίλη στο $(0,2a)$ **να δείξετε ότι** $\xi=a$.

v.(all time classic)Να δείξετε ότι:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}dx=\frac{a}{2}$$

Λύση

i.Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in[0,a]$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=g(x_0)$.Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ που είναι συνεχής στο διάστημα $[0,a]$ (f,g παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς στο $[0,a]$ Επίσης:

$h(0)=f(0)-g(0)$, $h(a)=f(a)-g(a)$.Η σχέση (2) της υπόθεσης

Για $x=0$: $f(a)=g(0)$

Για $x=a$: $f(0)=g(a)$

Έτσι έχουμε:

$$h(0)=f(0)-g(0)=f(0)-f(a)$$
$$h(a)=f(a)-g(a)=f(a)-f(0)$$

Τότε $h(0)h(a)=(f(0)-f(a))(f(a)-f(0))=-(f(0)-f(a))^2\le 0$ συνεπώς από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in[0,a]$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$

ii.Οι συντελεστές διεύθυνσης της εφαπτομένης της Cf στο σημείο με τετμημένη $\frac{a}{2}$ και της εφαπτομένης της Cg στο σημείο με τετμημένη $-\frac{a}{2}$ είναι αντίστοιχα: $\lambda_1=f'(\frac{a}{2})$ και $\lambda_2=g'(-\frac{a}{2})$.

Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι ισχύει: $f'(\frac{a}{2})=g'(-\frac{a}{2})$

Οι συναρτήσεις $f(a-x)$ και $g(-x)$ είναι παραγωγίσιμες ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε παραγωγίσουμε και τα δυο μέλη της (2):

$f'(a-x)(a-x)'=g'(x)\Rightarrow -f'(a-x)=g'(x)$ (3)

Η (3) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα θα ισχύει και για $x=\frac{a}{2}$

$-f'(a-\frac{a}{2})=g'(\frac{a}{2})\Rightarrow -f'(\frac{a}{2})=g'(\frac{a}{2})$ (4)

Όμως από υπόθεση (1) προκύπτει ότι η g είναι άρτια άρα ισχύει: $g(-x)=g(x)$ και με παραγώγιση των μελών της γράφεται: $g'(-x)(-x)'=g'(x)\Leftrightarrow -g'(-x)=g'(x)$

Η οποία για $x=\frac{a}{2}$ γίνεται: $-g'(-\frac{a}{2})=g'(\frac{a}{2})$ με αντικατάσταση στην (4) προκύπτει $f'(\frac{a}{2})=g'(\frac{a}{2})$ που είναι και το ζητούμενο.

iii.Η (2) για x=α δίνει: $f(a-a)=g(a)\Leftrightarrow f(0)=g(a)$ και για x=-α δίνει:

$f(a-(-a))=g(-a)\Rightarrow f(2a)=g(-a)$ άρα είναι $f(2a)=f(0)$ και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2a]$ από θεώρημα Rolle υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(0,2a)$ τέτοιος ώστε να είναι: $f'(\xi)=0$

iv.Η σχέση (3) για x=0 δίνει: $-f'(a)=g'(0)$ (5)

Όμως έχουμε αποδείξει ότι ισχύει: $-g'(-x)=g'(x)$ η οποία για x=0 δίνει:

$-g'(0)=g'(0)\Leftrightarrow g'(0)=0$ και η σχέση (5) γράφεται: $f'(a)=0$

Άρα θα είναι $f'(a)=f'(\xi)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι κοίλη και δυο φορές παραγωγίσιμη , η συνάρτηση f′ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 οπότε από την σχέση $f'(a)=f'(\xi)\Leftrightarrow a=\xi$

v. $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$

θέτουμε $a-x=u$, οπότε $x=a-u$ και $dx=-du$

-Για x=0 έχουμε $u=a$

-Για x=α έχουμε $u=0$

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=-\int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}du=\int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}du=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$$

Τότε :

$$2\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx+\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx+\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx=$$

$$=\int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\int_0^a 1dx=a$$

Άρα

$$2\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=a\Leftrightarrow \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}$$

17.Δινεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι ιδιότητες:

- $f'(x)=f(x)-\int_0^1 (f(x)-e^x)dx$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xg'(x)-1}{x-1}$
- $g''(1)=g'(1)=1$

i.Να δείξετε ότι $f'(0)=2$

ii.Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+1$**, για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

iii.Να μελετήσετε την συνάρτηση $h(x)=\dfrac{e^x}{f(x)}$ **,** $x\in\mathbb{R}$ **ως προς την μονοτονία.**

iv.Να λύσετε την εξίσωση

$$h(x)+h(x^{1973})+h(x^{2017})=\frac{3}{2}$$

v.Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) $y=\alpha x+\beta$ **τέμνει την καμπύλη** $y=f(x)-1$ **το πολύ σε δύο σημεία.**

Λύση

i. Η συνάρτηση f′ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\left(xg'(x)-1\right)=1g'(1)-1-1=0$, ακόμα $\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)=0$ οπότε το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{xg'(x)-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{xg'(x)-x+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(g'(x)-1)+x-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}x\frac{g'(x)-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x\frac{g'(x)-g'(1)}{x-1}+1=1\cdot g''(1)+1=2$$

Γιατί δεν χρησιμοποιήσαμε κανόνα De L Hospital;

$$\lim_{x\to 1}\frac{xg'(x)-1}{x-1}\underset{De\ L\ Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{(xg'(x)-1)'}{(x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)+xg''(x)}{1}=\lim_{x\to 1}(g'(x)+xg''(x))$$

Αδιέξοδο! Δεν γνωρίζουμε να η g′′ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Άρα δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}g''(x)=g''(1)=1$.

Οπότε ο Hospital πάει περίπατο…

“Χήρα” βοηθείας

Άρα $f(0)=2$

ii.Θέτουμε $\lambda=\int_0^1 (f(x)-e^x)dx$ (1)

Η (1) γράφεται

$$f'(x)=f(x)-\int_0^1 (f(x)-e^x)dx \Leftrightarrow f'(x)=f(x)-\lambda \Leftrightarrow$$

$$f'(x)-f(x)=-\lambda \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=-e^{-x}\lambda \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}f'(x)+(e^{-x})'f(x)=-e^{-x}\lambda \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(\lambda e^{-x}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=\lambda e^{-x}+c \quad (2)$$

Για x=0 η (2) : $e^{-0}f(0)=\lambda e^{-0}+c \Leftrightarrow 2=\lambda+c \Leftrightarrow c=2-\lambda$

Οπότε η (2) γράφεται

$$e^{-x}f(x)=\lambda e^{-x}+2-\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda+2e^x-\lambda e^x \ (3)$$

Από την (1) έχουμε:

$$\lambda=\int_0^1 (f(x)-e^x)dx \Leftrightarrow \lambda=\int_0^1 (\lambda+2e^x-\lambda e^x-e^x)dx \Leftrightarrow \lambda=\int_0^1 (\lambda+e^x-\lambda e^x)dx \Leftrightarrow$$

$$\lambda=\left[\lambda x+e^x-\lambda e^x\right]_0^1 \Leftrightarrow \lambda=\left(\lambda+e-\lambda e\right)-\left(\lambda\cdot 0+e^0-\lambda e^0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\lambda+e-\lambda e-1+\lambda \Leftrightarrow 0=e-\lambda e-1+\lambda \Leftrightarrow \lambda e-\lambda=e-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(e-1)=e-1 \Leftrightarrow \lambda=1$$

Για λ=1 η (3) γράφεται $f(x)=1+2e^x-e^x=e^x+1$ άρα $f(x)=e^x+1, x\in\mathbb{R}$

iii. $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv. Η τιμή χ=0 αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$h(x)+h(x^{1973})+h(x^{2017})=\frac{3}{2}$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $k(x)=h(x)+h(x^{1973})+h(x^{2017})$ τότε

$k'(x)=h'(x)+(x^{1973})'h'(x^{1973})+(x^{2017})'h'(x^{2017})=h'(x)+1973x^{1972}h'(x^{1973})+2017x^{2016}h'(x^{2017})>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα x=0 είναι μοναδική.

v. Τα κοινά σημεία της (ε) με την καμπύλη $y=f(x)-1=e^x+1-1=e^x$ θα έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $e^x=ax+\beta \Leftrightarrow e^x-ax-\beta=0$

Θα δείξουμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει το πολύ δυο ρίζες.

Έστω ότι έχει 3 ρίζες x_1,x_2,x_3 με $x_1<x_2<x_3$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$f_1(x)=e^x-ax-\beta$ είναι $f_1(x_1)=f_1(x_2)=f_1(x_3)=0$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ οπότε προκύπτουν δυο ρίζες ξ_1,ξ_2 για την $f_1'(x)=0$ και στην συνέχεια θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ προκύπτει ένα τουλάχιστον $\mu\in(\xi_1,\xi_2)$ με $f_1''(\mu)=0$ άτοπο καθώς $f_1''(x)=e^x\neq 0$.

Άρα η καμπύλη $y=e^x$ τέμνει την (ε) το πολύ σε δυο σημεία.

18.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει

(1) $e^{f(x)}+\sqrt{f(x)}=x$ **για κάθε** $x>0$.

(2) $f\left((0,+\infty)\right)=(0,+\infty)$

i.Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.
ii.Να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1}.
iii.Να βρείτε τα σημεία στα τέμνει η Cf τις ευθείες $y=4$ και $y=1$.
iv.Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην Cf, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=e+1$ και $x=e^4+2$

Λύση

i. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε:

$$\begin{cases} e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)} \\ \sqrt{f(x_1)}=\sqrt{f(x_2)} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} e^{f(x_1)}+\sqrt{f(x_1)}=e^{f(x_2)}+\sqrt{f(x_2)} \Rightarrow x_1=x_2$$ άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

ii.Αφού η $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ είναι 1-1 τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$

Για τον προσδιορισμό του τύπου τη συνάρτησης στην (1) θέτουμε όπου $y=f(x)$

$$e^y+\sqrt{y}=x=f^{-1}(y) \quad \text{ή} \quad f^{-1}(x)=e^x+\sqrt{x},x>0$$

iii.Αρκεί να λύσουμε τις εξισώσεις $f(x)=1$ και $f(x)=4$.Αν στην (1):
$e^{f(x)}+\sqrt{f(x)}=x$, θέσουμε διαδοχικά $f(x)=1$ και $f(x)=4$,έχουμε:

-Για $f(x)=1: e^1+\sqrt{1}=x\Leftrightarrow x=e+1$ (3)

-Για $f(x)=4: e^4+\sqrt{4}=x\Leftrightarrow x=e^2+2$ (4)

iv.το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=e+1$ και $x=e^4+2$,είναι:

$$E=\int_{e+1}^{e^4+2}|f(x)|dx$$

Όμως $f(x)>0$, οπότε θα είναι:

$$E=\int_{e+1}^{e^4+2}f(x)dx$$

Επειδή όμως δεν είναι γνωστός ο τύπος της f, θα υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα με την βοήθεια της συνάρτησης f^{-1}.

Θέτουμε λοιπόν $f(x)=u$, οπότε $x=f^{-1}(u)$.Ακόμα $f'(x)dx=du$

Για $x=e+1$: $f(e+1)=1$

Για $x=e^4+2$: $f(e^4+2)=4$ Έτσι έχουμε:

$$E=\int_{e+1}^{e^4+2}f(x)dx=\int_{e+1}^{e^4+2}x'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_{e+1}^{e^4+2}-\int_{e+1}^{e^4+2}xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_{e+1}^{e^4+2}-\int_{f(e+1)}^{f(e^4+2)}f^{-1}(u)du$$

$$\overset{(4),(3)}{=}\left[xf(x)\right]_{e+1}^{e^4+2}-\int_1^4\left(e^u+\sqrt{u}\right)du=(e^4+2)f(e^4+2)-(e+1)f(e+1)-\int_1^4\left(e^u+\sqrt{u}\right)du=$$

$$=(e^4+2)4-(e+1)1-\left[e^u+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4=4e^4+8-e-1-\left(e^4+\frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-e^1-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)=4e^4+7-e-\left(e^4+\frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-e^1-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=4e^4+7-e-\left(e^4+\frac{16}{3}-e^1-\frac{2}{3}\right)=4e^4+7-e-e^4-\frac{16}{3}+e^1+\frac{2}{3}=3e^4+7-\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=3e^4+\frac{7}{3} \text{ τ.μ}$$

19.Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ και έστω ένα σημείο Α το όποιο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f και είναι γνωστό ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του ως προς στην τετμημένη του είναι ίσος με το διπλάσιο του γινομένου των συντεταγμένων του.
Αν το σημείο (0,λ) με λ >0 ανήκει στην γραφική παράσταση της f τότε:
i.Να δείξετε ότι $f(x)=\lambda e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii.Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το όριο $\kappa=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha f(\sqrt{x})+\beta f(x)\lambda e^{-2x-x^2}-4x\lambda^2}{\lambda^2x^3}$ να είναι πραγματικός αριθμός.
iii.Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο $B(1,f(1))$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε λ>0.

iv.Να δείξετε ότι $\lambda^2\le\int_0^{\lambda}f(x)dx\le\lambda^2e^{\lambda^2}$.

Λύση

i.Αν $A(x,f(x))$ τότε από υπόθεση προκύπτει: $f'(x)=2xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Αλλά $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x\Leftrightarrow(\ln f(x))'=\left(x^2\right)'$. Άρα

$\ln f(x)=x^2+c\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2+c}$ (1)

Από την (1) για x=0 : $f(0)=e^{0^2+c}\Leftrightarrow f(0)=e^c$ και επειδή $f(0)=\lambda$ προκύπτει τελικά ότι $\lambda=e^c\Leftrightarrow c=\ln\lambda$

Άρα τελικά $f(x)=e^{x^2+\ln\lambda}=\lambda e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

ii. $\kappa=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha f(\sqrt{x})+\beta f(x)\lambda e^{-2x-x^2}-4x\lambda^2}{\lambda^2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\left(\lambda e^{\sqrt{x}^2}\right)^2+\beta\lambda e^{x^2}\lambda e^{-2x-x^2}-4x\lambda^2}{\lambda^2x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\lambda^2e^{2x}+\beta\lambda^2e^{-2x}-4x\lambda^2}{\lambda^2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}-4x}{x^3}$

Αν $g(x)=\dfrac{\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}-4x}{x^3}\Leftrightarrow x^3g(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}-4x$

λαμβάνουμε όρια στο 0($\lim\limits_{x\to 0}g(x)\in\mathbb{R}$)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}-4x\right)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}-4x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0=\alpha e^0+\beta e^0-4\cdot 0\Leftrightarrow\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\alpha=-\beta$ (2)

$k=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha e^{2x}-ae^{-2x}-4x}{x^3}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\alpha e^{2x}-ae^{-2x}-4x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\alpha e^{2x}+2ae^{-2x}-4}{3x^2}$

Αν $h(x)=\dfrac{2\alpha e^{2x}+2ae^{-2x}-4}{3x^2}\Leftrightarrow 3x^2h(x)=2\alpha e^{2x}+2ae^{-2x}-4$ λαμβάνουμε όρια στο 0($\lim\limits_{x\to 0}h(x)\in\mathbb{R}$)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2h(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}(2\alpha e^{2x}+2ae^{-2x}-4)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2\right)\lim\limits_{x\to 0}\left(h(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}(2\alpha e^{2x}+2ae^{-2x}-4)\Leftrightarrow 2\alpha+2a-4=0$

$\Leftrightarrow 2\alpha+2a-4=0\Leftrightarrow a=1$ από την (2) προκύπτει ότι $\beta=-1$

iii.Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $B(1,f(1))$ έχει εξίσωση

ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y-\lambda e=2\lambda e(x-1)\Leftrightarrow y-\lambda e=2\lambda ex-2\lambda e\Leftrightarrow y=2\lambda e(1-2x)$,(3) για κάθε $\lambda>0$. Για να δείξουμε ότι η ευθεία ε διέρχεται από σταθερό σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο Γ του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε για κάθε $\lambda>0$. Το ζητούμενο σημείο θα είναι εκείνο του οποίου οι συνταγμένες μηδενίζουν τις παραστάσεις $y=0$ και $e(1-2x)=0$, δηλαδή η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=0 \\ e(1-2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(εναλλακτικά θα μπορούσαμε να επιλέξουμε δυο αυθαίρετες τιμές του λ θα προκύψουν δυο εξισώσεις θα λύναμε το σύστημα και θα καταλήξουμε στο ίδιο σημείο και με αντικατάσταση θα επαληθεύει την (3))

Άρα η εφαπτομένη διέρχεται από σταθερό σημείο $\Gamma(\frac{1}{2},0)$ για κάθε $\lambda>0$.

iv.Είναι $f'(x)=\left(\lambda e^{x^2}\right)'=2x\lambda e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,\lambda)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\lambda]$ και επομένως η ελάχιστη τιμή της στο $[0,\lambda]$ είναι $\mu=f(0)=\lambda$ και η μέγιστη τιμή της στο $[0,\lambda]$ είναι $M=f(\lambda)=\lambda e^{\lambda^2}$.Άρα ισχύει: $\lambda\le f(x)\le\lambda e^{\lambda^2}$

Συνεπώς $\int_0^\lambda \lambda dx\le\int_0^\lambda f(x)dx\le\int_0^\lambda \lambda e^{\lambda^2}dx$ ή $\lambda[x]_0^\lambda\le\int_0^\lambda f(x)dx\le\lambda e^{\lambda^2}[x]_0^\lambda$ ή $\lambda(\lambda-0)\le\int_0^\lambda f(x)dx\le\lambda e^{\lambda^2}(\lambda-0)$

τελικά $\lambda^2\le\int_0^\lambda f(x)dx\le\lambda^2e^{\lambda^2}$

20.Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ και μια συνάρτηση g για την οποίες ισχύει:

(1) $xf'(x)-f(x)=x^2-x-1$ **για κάθε** $x>0$,

(2) $g(x)=\begin{cases} x, x\ge e \\ g^2(2e-x)-(e-1)x, x<e \end{cases}$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

(3) $f(1)=\lim\limits_{x\to e^-}g(x)-e+1$

i.Να βρείτε τον τύπο της g.

ii.Είναι η g συνεχής στο $\mathbb{R}$;

iii.Να βρείτε τον τύπο της f.

iv.Αν $f(x)=x^2-x(\ln x+1)+1, x>0$.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο ακριβώς θετικοί αριθμοί x_1,x_2 με $x_1<x_2$ τέτοιοι ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

v.Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{2(x_1-e^{1974(x-e)})+x_2}{|x-e|}$.

vi.Να αποδείξετε ότι: $f(x)\ge1$ για κάθε $x>0$.

vii. Να αποδείξετε ότι: $f(x)-1\le(x-1)f'(x)$,για κάθε $x\ge1$.

viii.Αν Ε είναι το εμβαδό που περικλείεται από την Cf, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$, $x=e$, να δείξετε ότι:

$$\int_1^e (f(x))^2dx\le\frac{2E+(e-1)f^2(e)}{3}$$

Λύση

i. $g(x)=\begin{cases} x, x\ge e \\ g^2(2e-x)-(e-1)x, x<e \end{cases}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Αν $x<e\Leftrightarrow -x>-e\Leftrightarrow 2e-x>e$ άρα $g(2e-x)=2e-x$, συνεπώς ο τύπος της g είναι :

$$g(x)=\begin{cases} x, x\ge e \\ (2e-x)^2-(e-1)x, x<e \end{cases}$$

ii. Αν $x>e$ η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική, αν $x<e$ τότε η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική. θα εξετάσουμε την συνέχεια στο χ=e.

$g(e)=e$, $\lim\limits_{x\to e^+}g(x)=e$,

$\lim\limits_{x\to e^-}g(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left((2e-x)^2-(e-1)x\right)=(2e-e)^2-(e-1)e=e^2-e^2+e=e$

Οπότε εφόσον $\lim\limits_{x\to e^-} g(x)=\lim\limits_{x\to e^+} g(x)=g(e)$ η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

iii. Από το προηγούμενο ερώτημα $f(1)=\lim\limits_{x\to e^-} g(x)-e+1=e-e+1=1$.Έτσι:

$$xf'(x)-f(x)=x^2-x-1 \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(x-\ln x-\frac{1}{x})'$$

Άρα $\dfrac{f(x)}{x}=x-\ln x+\dfrac{1}{x^2}+c \Leftrightarrow f(x)=x^2-x\ln x+1+cx$

Για x=1 : $f(1)=1^2-1\ln 1+1+c\cdot 1\Leftrightarrow 1=1-1\ln 1+1+c\cdot 1\Leftrightarrow c=-1$

Άρα $f(x)=x^2-x\ln x-x+1,\, x>0$

iv.Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f'(x)=\left(x^2-x\ln x-x+1\right)'=2x-\ln x-x\frac{1}{x}-1=2x-\ln x-1-1=2x-\ln x-2$$

$$f''(x)=\left(2x-\ln x-2\right)'=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$$

Οπότε είναι:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x}>0\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x}<0\Leftrightarrow 2x-1<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$

Επίσης είναι :

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x-\ln x-2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f'(x)=\lim_{x\to +\infty}(2x-\ln x-2)=\lim_{x\to +\infty}(x(2-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}))=(+\infty)(2-0-0)=+\infty$$

Διότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{DLHospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$f'(\frac{1}{2})=\ln 2-1$	$\nearrow$

Αν $A_1=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, τότε επειδή η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 έχουμε:

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f'(x),\lim_{x\to 0^+} f'(x)\right)=\left(\ln 2-1,+\infty\right)$$

Και επειδή $2<e\Leftrightarrow \ln 2<1\Leftrightarrow \ln 2-1<0$, το $0\in f(A_1)=\left(\ln 2-1,+\infty\right)$ συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in A_1=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$.Άρα το x_1 είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ και επειδή γη f′ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 στο A_1, το x_1 είναι μοναδική ρίζα στο A_1.

Επίσης $f'(1)=2-\ln 1-2=0$.Άρα το 1 είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ και επειδή f′ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1, στο $x_1\in A_2=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, το 1 είναι μοναδική ρίζα στο A_2

Επομένως υπάρχουν δυο ακριβώς θετικοί αριθμοί $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και το $x_2 = 1$, τέτοιοι ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

v. Είναι $\lim\limits_{x \to e}\left(2(x_1 - e^{1974(x-e)}) + x_2\right) = 2(x_1 - 1) + x_2$. Όμως

$2(x_1 - 1) + x_2 < 0$ διότι $2(x_1 - 1) + x_2 < 0 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - 2 < 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 1 - 2 < 0 \Leftrightarrow 2x_1 < 1 \Leftrightarrow x_1 < \frac{1}{2}$ που ισχύει.

Άρα $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{2(x_1 - e^{1974(x-e)}) + x_2}{|x - e|} = -\infty$

vi. Είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ και από την μονοτονία της f′ έχουμε:

Αν $x \in (0, x_1)$ τότε $x < x_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Αν $x \in (x_1, \frac{1}{2})$ τότε $x > x_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Αν $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ τότε $x < 1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Αν $x \in (1, +\infty)$ τότε $x > 1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Επίσης είναι

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x^2 - x\ln x - x + 1) = 0^2 - 0 - 0 + 1 = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+}(-x) = 0$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 - x\ln x - x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^2\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right) = +\infty$

Γιατί

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{D.H.L}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Εναλλακτικά το ερώτημα(vi)λύνεται,
$f(x) = x^2 - x\ln x - x + 1 = x(x - \ln x - 1) + 1$
Αλλά $x > 0$ και $x < \ln x + 1$, οπότε
$f(x) \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

x	0		x_1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

- Αν $\Delta_1 = (0, x_1]$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, είναι:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), f(x_1)\right] = (1, f(x_1)]$$

- Αν $\Delta_2 = (x_1, 1]$, τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2, είναι:

$$f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \to x_1} f(x)\right) = [1, f(x_1))$$

- Αν $\Delta_3 = (1, +\infty)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_3, είναι:

$$f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \to 1} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$$

Άρα $f(\Delta) = f(\Delta_3) \cup f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [1, +\infty)$ δηλαδή $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$

vii.Έχουμε

Για $x=1$ ισχύει η ισότητα, αφού $f(1)=1$

Αν $x\in[1,+\infty)$ τότε από το Θ.Μ.Τ για την f στο $[1,x]$

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Αλλά είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$, άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και συνεπώς:

$$1<\xi<x\Leftrightarrow f'(1)<f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow f'(1)<\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)$$

Επειδή $f(1)=1$ και $x>1\Leftrightarrow x-1>0$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)\Leftrightarrow f(x)-f(1)<f'(x)(x-1)\Leftrightarrow f(x)<1+f'(x)(x-1)$$

viii.Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\geq 1>0$ άρα $E=\int_1^e f(x)dx$

Επίσης πολλαπλασιάζοντας με f(x) τα δυο μέλη της σχέσης $f(x)-1\leq(x-1)f'(x)$ του προηγουμένου ερωτήματος έχουμε:

$$f^2(x)-f(x)\leq(x-1)f'(x)f(x)\Leftrightarrow(x-1)f'(x)f(x)-f^2(x)+f(x)\geq 0$$

Έτσι:

$$\int_1^e\big((x-1)f'(x)f(x)-f^2(x)+f(x)\big)dx\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\int_1^e f(x)dx+\int_1^e\big((x-1)f'(x)f(x)\big)dx-\int_1^e f^2(x)dx\geq 0\Leftrightarrow E+\frac{1}{2}\int_1^e\big(2(x-1)f'(x)f(x)\big)dx\geq\int_1^e f^2(x)dx\Leftrightarrow$$

$$E+\frac{1}{2}\int_1^e\Big((x-1)\big(f^2(x)\big)'\Big)dx\geq\int_1^e f^2(x)dx\Leftrightarrow E+\frac{1}{2}\Big[(x-1)\big(f^2(x)\big)\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e(x-1)'\big(f^2(x)\big)dx\geq\int_1^e f^2(x)dx\Leftrightarrow$$

$$E+\frac{1}{2}(e-1)\big(f^2(e)\big)-\frac{1}{2}\int_1^e\big(f^2(x)\big)dx\geq\int_1^e f^2(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E+\frac{1}{2}(e-1)\big(f^2(e)\big)\geq\frac{3}{2}\int_1^e f^2(x)dx\Leftrightarrow.....\Leftrightarrow\int_1^e(f(x))^2dx\leq\frac{2E+(e-1)f^2(e)}{3}$$

21.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\ln x+x^2+x+\mu-3 \quad \text{για κάθε } x>0$$

όπου μ σταθερός πραγματικός αριθμός

Α.Αν η ευθεία $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης g στο $+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu g(x)+4x}{xg(x)-2x^2+5x}=1$, να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός μ.

Β. Αν μ=3:

Β1.Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Β2.Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln x+x^4<x$$

Β3.Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $x-4y+2=0$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο Α(2,1) και να βρείτε το όριο

$$L=\lim_{x\to2}\frac{f^{-1}(x)-|3x+1|+6}{x-2}$$

Β4.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x^{1973})+f(x^{2017})=f(x^{1971})+f(x^{2015})$$

έχει μοναδική ρίζα $x=1$.

Β5.(Bonus)Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x^\nu, x\in\mathbb{R}, \nu\in\mathbb{N}^*$

i.Να βρείτε το εμβαδό Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από την Ch,την ευθεία $y=a^\nu$, $a\in(0,1)$ και τις ευθείες $x=f(1)-2$, $x=f(1)-1$.

ii.Να βρείτε για ποια τιμή του α το Ε(α) γίνεται ελάχιστο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του.

Λύση

Α.Επειδή η $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της Cg στο $+\infty$, ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=5$$

Για κάθε $x>0$,διαιρώντας με χ τους όρους του κλάσματος , προκύπτει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu g(x)+4x}{xg(x)-2x^2+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu\frac{g(x)}{x}+4}{(g(x)-2x)+5}=\frac{2\mu+4}{5+5}=\frac{2\mu+4}{10}=\frac{\mu+2}{5}$$

Επομένως είναι $\dfrac{\mu+2}{5}=1\Leftrightarrow\mu=3$

Β1.Η συνάρτηση έχει τύπο $f(x)=\ln x+x^2+x, x>0$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα

$f'(x)=\left(\ln x+x^2+x\right)'=\dfrac{1}{x}+2x+1>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι και 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται.

Β2.Αν $x>0$ τότε :

$$\ln x+x^4<x\Leftrightarrow\ln x+x^4+x^2+\ln x<x+x^2+\ln x\Leftrightarrow f(x^2)<f(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2<x\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$$

Β3.Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Β(1,2) έχει εξίσωση

$$y-2=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=4x-2.$$

Άρα η συμμετρική της ως προς την y=x εφαπτομένη (η) στο σημείο Α(2,1) της Cf^{-1} έχει εξίσωση $x=4y-2\Leftrightarrow x-4y+2=0$

$$L=\lim_{x\to2}\frac{f^{-1}(x)-|3x+1|+6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f^{-1}(x)-1-|3x+1|+7}{x-2}=\lim_{x\to2}\left(\frac{f^{-1}(x)-1}{x-2}+\frac{7-|3x+1|}{x-2}\right)$$

Όμως

• $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^{-1}(x)-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(2)}{x-2}=\left(f^{-1}(2)\right)'=\lambda_\eta=4$

• $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{7-|3x+1|}{x-2}\right)\overset{\kappa o\nu\tau\alpha\ \sigma\tau o\ 2\ isxyei\ 3x+1>0}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{7-3x-1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{6-3x}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{-2(x-2)}{x-2}\right)=-2$

Άρα, το ζητούμενο όριο είναι:

$$L=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f^{-1}(x)-1}{x-2}+\frac{7-|3x+1|}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f^{-1}(x)-1}{x-2}\right)+\lim_{x\to 2}\left(\frac{7-|3x+1|}{x-2}\right)=4-2=2$$

B3. Για x=1 η εξίσωση επαληθεύεται

•Αν $x>1$ έχουμε

$x>1\Leftrightarrow x^{1973}>x^{1971}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^{1973})>f(x^{1971})$

$x>1\Leftrightarrow x^{2015}>x^{2017}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^{2015})>f(x^{2017})$ προσθέτουμε κατά μέλη

$f(x^{1973})+f(x^{2017})>f(x^{1971})+f(x^{2015})$

•Αν $0<x<1$ έχουμε

$0<x<1\Leftrightarrow x^{1973}<x^{1971}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^{1973})<f(x^{1971})$

$0<x<1\Leftrightarrow x^{2015}>x^{2017}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^{2015})>f(x^{2017})$ προσθέτουμε κατά μέλη

$f(x^{1973})+f(x^{2017})<f(x^{1971})+f(x^{2015})$

B5.i. Αναζητούμε το εμβαδό Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από την Ch, την ευθεία $y=a^\nu$, $a\in(0,1)$ και τις ευθείες $x=f(1)-2=2-2=0$, $x=f(1)-1=0$.

Έτσι

$$E(\alpha)=\int_0^1|h(x)-\alpha^\nu|dx=\int_0^1|x^\nu-\alpha^\nu|dx=\int_0^a|x^\nu-\alpha^\nu|dx+\int_a^1|x^\nu-\alpha^\nu|dx=\int_0^a(\alpha^\nu-x^\nu)dx+\int_a^1(x^\nu-\alpha^\nu)dx=$$

$$=\left[x\alpha^\nu-\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^a+\left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}-x\alpha^\nu\right]_\alpha^1=\alpha^{\nu+1}-\frac{\alpha^{\nu+1}}{\nu+1}+\left(\frac{1}{\nu+1}-\alpha^\nu\right)-\left(\frac{\alpha^{\nu+1}}{\nu+1}-\alpha^{\nu+1}\right)=\alpha^{\nu+1}-\frac{\alpha^{\nu+1}}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+1}-\alpha^\nu-\frac{\alpha^{\nu+1}}{\nu+1}+\alpha^{\nu+1}=$$

$$=2\alpha^{\nu+1}-\frac{2\alpha^{\nu+1}}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+1}-\alpha^\nu=2\alpha^{\nu+1}(1-\frac{1}{\nu+1})+\frac{1}{\nu+1}-\alpha^\nu=2\alpha^{\nu+1}(\frac{\nu+1-1}{\nu+1})+\frac{1}{\nu+1}-\alpha^\nu=\frac{2\nu}{\nu+1}\alpha^{\nu+1}+\frac{1}{\nu+1}-\alpha^\nu \text{ τ.μ}$$

ii. $E'(\alpha)=\left(\frac{2\nu}{\nu+1}\alpha^{\nu+1}+\frac{1}{\nu+1}-\alpha^\nu\right)'=2\nu\alpha^\nu-\nu\alpha^{\nu-1}=2\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\frac{1}{2}),\ \alpha\in(0,1)$

$E'(\alpha)=0\Leftrightarrow 2\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\frac{1}{2})=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$

$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow 1>\alpha>\frac{1}{2}$ άρα Ε $\nearrow$ στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$

$E'(\alpha)<0\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2}$ άρα Ε $\searrow$ στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

α	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Ε′(α)	−	O	+
Ε(α)	$\searrow$		$\nearrow$

E

Οπότε το εμβαδό Ε(α) γίνεται ελάχιστο για $\alpha=\frac{1}{2}$ και η ελάχιστη τιμή του είναι

$E(\frac{1}{2})=\frac{2^\nu-1}{2^\nu(\nu+1)}$ τ.μ

22.(Boris Dragosani)Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i.Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii.Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία Α(9,2),Β(4,3) τότε:

α. να λύσετε την εξίσωση $f(3)-f^{-1}(f(x^2-1)+5)=2$

β. να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $2g(\xi)+\xi=0$

iii.Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}, x\in\mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Μ$(x_0,0)$, τότε να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της Μ σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 45°.

iv.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^3 \frac{\left|e^{f(\ln(1974a))}-e^{f(1974a-1)}\right|+e^{f(\ln(1974a))}-e^{f(1974a-1)}+g(x)}{g^2(x)}dx$$

όπου a σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση

i.Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι 1-1.Εστω ότι υπάρχουν $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$.Έστω $x_1<x_2$.Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει το Θ.Rolle στο $[x_1,x_2]$ οπότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε $f'(x_0)=0$, άτοπο αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Άρα για κάθε $x_1\neq x_2$ είναι $f(x_1)\neq f(x_2)$ συνεπώς η f είναι 1-1.

ii.α. Έχουμε $f(2)=9\Leftrightarrow f^{-1}(2)=9$ και $f(3)=4\Leftrightarrow f^{-1}(4)=3$

$f(3)-f^{-1}(f(x^2-1)+5)=2\Leftrightarrow 4-f^{-1}(f(x^2-1)+5)=2\Leftrightarrow$

$f^{-1}(f(x^2-1)+5)=2\Leftrightarrow f^{-1}(f(x^2-1)+5)=f^{-1}(9)\Leftrightarrow f(x^2-1)+5=9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2-1)+5=9\Leftrightarrow f(x^2-1)=4\Leftrightarrow f(x^2-1)=f(3)\Leftrightarrow x^2-1=3\Leftrightarrow x=\pm 2$

β. $2g(\xi)+\xi=0\Leftrightarrow 2\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}+\xi=0\Leftrightarrow 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=x^2f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=\left(x^2f(x)\right)'=2xf(x)-x^2f'(x)$

Είναι $h(2)=4f(2)=4\cdot 9=36$, $h(3)=9f(3)=36$ άρα $h(2)=h(3)$ οπότε ισχύει το Θ Rolle και συνεπώς υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιοι ώστε

$$h(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi f(\xi)+\xi^2f(\xi)=0\Leftrightarrow 2g(\xi)+\xi=0$$

iii.Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $g'(x_0)=1$

$g(x_0)=0\Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$.Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\overset{g(x_0)=0}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{f'(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f'(x)(x-x_0)}\overset{f(x_0)=0}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{f'(x)(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}\overset{f'\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}\frac{1}{f'(x_0)}\cdot f'(x_0)=1$$

iv.Η f′ είναι συνεχής το $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό άρα διατηρεί πρόσημο συνεπώς η f είναι γνησίως μονότονη και επίσης ισχύει $f(3)<f(2)$,οπότε, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $e^x\geq x+1$ άρα θα ισχύει
και για χ το $\ln 1974a$ με α>0
Έτσι $e^{\ln 1974a}\geq \ln 1974a+1 \Leftrightarrow 1974a\geq \ln 1974a+1\Leftrightarrow 1974a-1\geq \ln 1974a$

$$1974a-1\geq \ln 1974a \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(1974a-1)\leq f(\ln 1974a)\Leftrightarrow e^{f(1974a-1)}-e^{f(\ln(1974a))}\leq 0$$

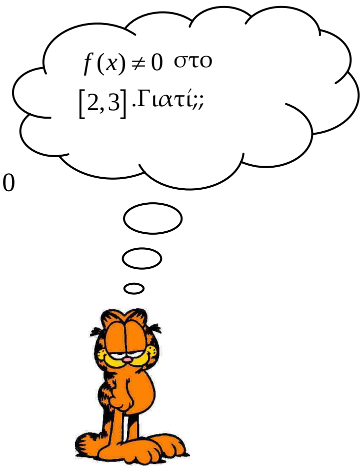
άρα

$$\int_2^3 \frac{\left|e^{f(\ln(1974a))}-e^{f(1974a-1)}\right|+e^{f(\ln(1974a))}-e^{f(1974a-1)}+g(x)}{g^2(x)}dx=$$

$$=\int_2^3 \frac{e^{f(1974a-1)}-e^{f(\ln(1974a))}+e^{f(\ln(1974a))}-e^{f(1974a-1)}+g(x)}{g^2(x)}dx=$$

$$=\int_2^3 \frac{g(x)}{g^2(x)}dx=\int_2^3 \frac{1}{g(x)}dx=\int_2^3 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln|f(x)|\right]_2^3=$$

$$=\ln|f(3)|-\ln|f(2)|=\ln 4-\ln 9=\ln\frac{4}{9}$$



23.(All time classic)Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύουν:

$$\frac{xf(x)+1}{1+f^2(x)}=\frac{1}{2}\ \textbf{(1) για κάθε } x\in\mathbb{R}\ \textbf{ και } f(0)=1\quad (2)$$

i)Να δείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

iii)Να εξετάσετε την f ως προς τα κοίλα.

iv)Να βρείτε τις ασύμπτωτες της Cf.

v)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

vi)Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.

vii)Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f^{-1}.

viii)Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x^6+1}-\sqrt{9x^2+1}=3x-x^3$

ix)Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ **ισχύει:**

$$\int_{\lambda-1}^{\lambda} f(x)dx<f(\lambda)<\int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)dx$$

x)(Bonus) να υπολογίσετε το όριο

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-x)\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$$

ΛΥΣΗ

i) $\dfrac{xf(x)+1}{1+f^2(x)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2xf(x)+2=1+f^2(x)\Leftrightarrow 1=f^2(x)-2xf(x)\Leftrightarrow 1=f^2(x)-2xf(x)+x^2-x^2\Leftrightarrow$

$$1+x^2=f^2(x)-2xf(x)+x^2\Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=1+x^2\overset{h(x)=f(x)-x}{\Leftrightarrow}\left(h(x)\right)^2=1+x^2\ (2)$$

Ισχύει ότι $1+x^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών.

Η $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η h διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

$h(0)=f(0)-0=1>0$ επομένως $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\left(h(x)\right)^2=1+x^2\overset{h(x)>0}{\Leftrightarrow}h(x)=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{1+x^2}\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ii) $f'(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$

$1+x^2>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}>|x| \overset{|x|>-x}{\Leftrightarrow} \sqrt{1+x^2}>-x \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,έτσι

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) $f''(x)=\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=...=\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

iv)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-\left(1+x^2\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x-|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)=0\cdot\frac{1}{2}=0$$.Άρα y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη τη Cf στο $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=2=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=...=0=\beta$$

Άρα η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$.

v)Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(0,+\infty\right)$

vi)Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.
Από το ερώτημα iv) γνωρίζουμε ήδη το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

$A_{f^{-1}}=f(A)=\left(0,+\infty\right)$

Άρα μένει μόνο να βρούμε το τύπο της αντίστροφης.

$y=f(x)\Leftrightarrow y=x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow ......\Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-1}{2y}$

Τελικά $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x},x\in\left(0,+\infty\right)$.

vii) $\lim\limits_{x\to0^+}f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2-1\right)\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{2x}=-\infty$ άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2}=\frac{1}{2}=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{2x}-\frac{x}{2}\right)=...=0=\beta$$

Άρα η ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ είναι πλαγιά ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ στο $+\infty$.

viii) $\sqrt{x^6+1}-\sqrt{9x^2+1}=3x-x^3 \Leftrightarrow \sqrt{x^6+1}+x^3=\sqrt{9x^2+1}+3x \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^3\right)^2+1}+x^3=\sqrt{\left(3x\right)^2+1}+3x \Leftrightarrow$

$f(x^3)=f\left(3x\right) \Leftrightarrow x^3=3x \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\sqrt{3}$ ή $x=-\sqrt{3}$

ix)Να δείξετε ότι

•για κάθε $x\in\left[\lambda-1,\lambda\right]$ έχουμε

$\lambda-1\le x\le\lambda \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\lambda-1)\le f(x)\le f(\lambda)$ με το ισον να ισχύει μόνο για $x=\lambda-1$ ή $x=\lambda$, οπότε:

$$\int_{\lambda-1}^{\lambda} f(\lambda-1)dx<\int_{\lambda-1}^{\lambda} f(x)dx<\int_{\lambda-1}^{\lambda} f(\lambda)dx \Leftrightarrow f(\lambda-1)(\lambda-(\lambda-1))<\int_{\lambda-1}^{\lambda} f(x)dx<f(\lambda)(\lambda-(\lambda-1)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda-1)<\int_{\lambda-1}^{\lambda} f(x)dx<f(\lambda) \quad (3)$$

•για κάθε $x\in\left[\lambda,\lambda+1\right]$ έχουμε

$\lambda\le x\le\lambda+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\lambda)\le f(x)\le f(\lambda+1)$ με το ;ίσον να ισχύει μόνο για $x=\lambda+1$ ή $x=\lambda$, οπότε:

Οπότε

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1} f(\lambda)dx<\int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)dx<\int_{\lambda}^{\lambda+1} f(\lambda+1)dx \Leftrightarrow f(\lambda)(\lambda+1-\lambda)<\int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)dx<f(\lambda+1)(\lambda+1-\lambda) \Leftrightarrow$$

$$f(\lambda)<\int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)dx<f(\lambda+1) \quad (4)$$

Από (3),(4) έχουμε ότι $\int_{\lambda-1}^{\lambda} f(x)dx<f(\lambda)<\int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)dx$

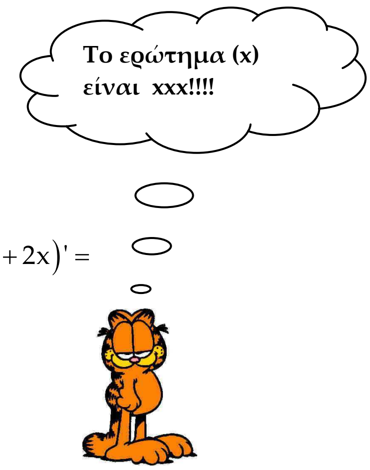
x) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(f(x)-x)\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+\sqrt{1+x^2}-x)\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1+2x}$ με πεδίο ορισμού $A=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$(1+2x\ge0\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2})$η g είναι παραγωγίσιμη

Το ζητούμενο όριο λαμβάνει την μορφή:



$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$$

Έτσι:

$$g'(x)=\left(\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1+2x}\right)'=\left((1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1}\left(1+x^2\right)'+\frac{1}{3}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(1+2x\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\right)+\frac{1}{3}\left(1+2x\right)^{-\frac{2}{3}}2=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\left(1+2x\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$g'(0)=0(1+0^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\left(1+2\cdot0\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$$

Άρα $L=\frac{2}{3}$.

24.(All time classic) Δίνεται η γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)+f^{-1}(x)=2x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f(0)=2$
- f^{-1} **συνεχής στο** $\mathbb{R}$

i.Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

ii.Να δείξετε ότι $f(-2)=-4$

iii.Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx-\int_{-2}^0 f(x)dx=4$

iv.Υπάρχουν τουλάχιστον δυο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες στο $(-4,0)$ οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία y=x.

v. $2\le f(x)\le 2x+2$ **για κάθε** $x\ge 0$

vi. $0\le \int_{-2}^0 f(x)dx\le 4$

Λύση

i.Για $x=0$ η δοσμένη σχέση $f(x)+f^{-1}(x)=2x$, μας δίνει: $f(0)+f^{-1}(0)=0$ ή $2+f^{-1}(0)=0$ ή $f^{-1}(0)=-2\Rightarrow f(-2)=0$

Η f είναι γνησίως μονότονη άρα είναι και 1-1 οπότε έχουμε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=-2$.

ii.Για $x=-2$ η (1) γίνεται: $f(-2)+f^{-1}(-2)=2(-2)\Leftrightarrow f(-2)=-4$

iii.Έχουμε ότι $f(x)+f^{-1}(x)=2x$, οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int_0^2 (f(x)+f^{-1}(x))dx=\int_0^2 2xdx\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f^{-1}(x)dx=\int_0^2 2xdx$$

Όμως στο ολοκλήρωμα $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής θέτουμε όπου x το f(u)

$x=f(u)\Rightarrow dx=f'(u)du$

Όταν $x=0\Rightarrow f(u)=0\Leftrightarrow f(u)=f(-2)\Leftrightarrow u=-2$

Όταν $x=2\Rightarrow f(u)=2\Leftrightarrow f(u)=f(0)\Leftrightarrow u=0$

Άρα

$$\int_0^2 f^{-1}(x)dx=\int_{-2}^0 f^{-1}(f(u))f'(u)du=\int_{-2}^0 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_{-2}^0-\int_{-2}^0 f(u)du=0f(0)-(-2)f(-2)-\int_{-2}^0 f(u)du=$$

$$=-\int_{-2}^0 f(u)du$$

Τελικά $\int_0^2 f^{-1}(x)dx=-\int_{-2}^0 f(u)du$ άρα έχουμε:

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f^{-1}(x)dx=\int_0^2 2xdx\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx-\int_{-2}^0 f(u)du=\left[x^2\right]_0^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx-\int_{-2}^0 f(u)du=4\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx-\int_{-2}^0 f(x)dx=4 \quad (2)$$

iv.Η ευθεία y=x έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=1 .Για να δείξουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες στο διάστημα $(-4,0)$ οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία y=x αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(-4,0)$ με $f'(x_1)=f'(x_2)=1$ δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες $x_1,x_2\in(-4,0)$

Έτσι $f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=x' \Leftrightarrow f'(x)-x'=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$.Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και κατά συνέπεια συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε

$h(-4)=f(-4)-4=2$, $h(-2)=f(-2)-(-2)=2$ άρα για την συνάντηση h στο διάστημα $\left[-4,-2\right]$ ισχύει το θεώρημα Rolle άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\left(-4,-2\right)$ με

$h'(x_1)=0 \Leftrightarrow f'(x_1)-1=0 \Leftrightarrow f'(x_1)=1$

Έχουμε

$h(-2)=f(-2)-(-2)=2$, $h(0)=f(0)-0=2$ άρα για την συνάντηση h στο διάστημα $\left[-2,0\right]$ ισχύει το θεώρημα Rolle άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\left(-2,0\right)$ με

$h'(x_2)=0 \Leftrightarrow f'(x_2)-1=0 \Leftrightarrow f'(x_2)=1$

v.Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $f(-4)<f(0)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Γνωρίζουμε ότι η f^{-1} θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας άρα και η f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα .Έχουμε:

Για $x\geq 0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)\geq f(0) \Rightarrow f(x)\geq 2$

Για $x\geq 0 \overset{f^{-1}\nearrow}{\Rightarrow} f^{-1}(x)\geq f^{-1}(0) \Rightarrow f^{-1}(x)\geq 2 \overset{f(x)+f^{-1}(x)=2x\Leftrightarrow f^{-1}(x)=2x-f(x)}{\Rightarrow} 2x-f(x)\geq 2 \Rightarrow 2x-2\geq f(x)$

Άρα για κάθε $2\leq f(x)\leq 2x+2$ για κάθε $x\geq 0$

vi.Ολοκληρώνουμε την $2\leq f(x)\leq 2x+2$ και έχουμε

$$\int_0^2 2dx \leq \int_0^2 f(x)dx \leq \int_0^2 (2x+2)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[2x\right]_0^2 \leq \int_0^2 f(x)dx \leq \left[x^2+2x\right]_0^2 \Rightarrow 4\leq \int_0^2 f(x)dx \leq 8$$

$$\overset{\int_0^2 f(x)dx-\int_{-2}^0 f(x)dx=4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx=4+\int_{-2}^0 f(x)dx}{\Rightarrow} 4\leq 4+\int_{-2}^0 f(x)dx \leq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\leq \int_{-2}^0 f(x)dx \leq 4$$

Υπενθυμίζω ότι…

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε η f^{-1} θα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας δηλαδή η f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα .Πως αποδεικνύεται;

Αρκεί για κάθε $y_1,y_2\in D_{f^{-1}}$ με:

$y_1<y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.Εργαζόμαστε με άτοπο

Έστω ότι υπάρχουν $y_1,y_2\in D_{f^{-1}}$ τέτοια ώστε:

$f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(y_1))\geq f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow y_1\geq y_2$, άτοπο.

25.θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x-e^{-x}, x\in\mathbb{R}$

i.Να δείξετε η g είναι 1-1.

ii.αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:**

$$f(x)+e^{-f(x)}=x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Να δείξετε ότι $f(0)=0$ **.**

iii.Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.

iv.Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο $x_0=0$ **.**

v.Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2}{f(x)-x^3+1974x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$

vi.Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ **και η** f^{-1} **είναι παραγωγίσιμη να δείξετε ότι για κάθε** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **με** $\alpha<\beta$ **υπάρχουν** $x_1\in(\alpha,\beta)$ **και** $x_2\in(\alpha,\beta)$ **τέτοια ώστε:**

$$\left(f^{-1}(x_2)\right)'f'(x_1)=1$$

Λύση

i. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.Έτσι

$g'(x)=1+e^{-x}>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και κατ επέκταση 1-1 στο $\mathbb{R}$

Η (1) για x=0 παίρνει την μορφή: $f(0)+e^{-f(0)}=-1\Leftrightarrow g(f(0))=g(0)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=0$

ii. Παραγωγίζουμε την (1)

$\left(f(x)+e^{-f(x)}\right)'=\left(x-1\right)'\Leftrightarrow f'(x)+f'(x)(-\frac{e^{f(x)}}{e^{2f(x)}})=1\Leftrightarrow f'(x)(1+\frac{1}{e^{f(x)}})=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iv. $f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^{f(x)}}\right)'=-\frac{f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή.

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της Cf στο $x_0=0$ είναι η :

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\overset{f'(0)=\frac{f(0)}{1+e^{f(0)}}=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}....\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$$

v. α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2}{f(x)-x^3+1974x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}+x}{\frac{f(x)}{x}-x^2+1974}\overset{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{2}}{=}=\frac{\frac{1}{2}+0}{\frac{1}{2}-0+1974}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1974}$

γ)Η f είναι κυρτή άρα $f(x)\geq\frac{1}{2}x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

δ) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f στο $\left[x,x+1\right]$, $\xi\in\left(x,x+1\right)$

με $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$ έχουμε:

$x<\xi<x+1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$ (2)

Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\overset{u=f(x)}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{1+e^u}=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{f(x+1)}}{1+e^{f(x+1)}} \overset{u+1=f(x)}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{1+e^u} = 1$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=1$

vi.Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για:

την f στο $\left[\alpha,\beta\right]$ άρα υπάρχει $x_1 \in \left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε:

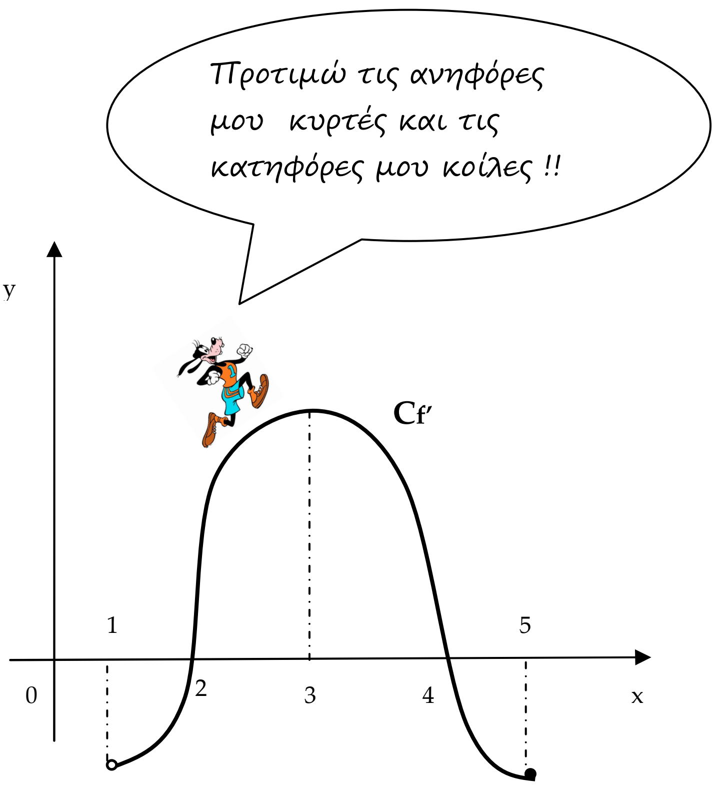
$$f'(x_1) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

την f^{-1} στο $\left[f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)\right]$ άρα υπάρχει $x_2 \in \left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\left(f^{-1}(x_2)\right)' = \frac{f^{-1}(f(\beta)) - f^{-1}(f(\alpha))}{f(\beta)-f(\alpha)} \Leftrightarrow \left(f^{-1}(x_2)\right)' = \frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}$$

Συνεπώς

$$\left(f^{-1}(x_2)\right)' f'(x_1) = \frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} \cdot \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = 1$$



26.Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

- $f'(x)(e^x+1)+f(x)e^x=0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=\frac{1}{2}$

i.Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$**,** $x\in\mathbb{R}$

ii.Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii.Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της Cf στο σημείο A(0,f(0)) την διαπερνά.

iv.Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης της Cf στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$**.**

v.Έστω F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$**, με** $F(0)=0$**.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση**

$$G(x)=F(x)+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{2}$$

Παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο $x_0=0$

vi.Να λύσετε την εξίσωση $8F(\ln x)=2\ln x^2-\ln^2 x, x>0$

vii.Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1)$ **τέτοιο ώστε** $f(x_0)(1-x_0)=F(x_0)$

viii. α) Με την βοήθεια της ανισότητας $e^x\ge x+1$ **που ισχύει για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**, να δείξετε ότι**

$$\int_0^1\frac{x}{e^{x-1}+1}dx<\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$$

β) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 F(x-1)dx>\ln\frac{2}{e}$$

Λύση

i. $f'(x)(e^x+1)+f(x)e^x=0\Leftrightarrow f'(x)(e^x+1)+f(x)(e^x+1)'=0\Leftrightarrow\left(f(x)(e^x+1)\right)'=0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα, $f(x)(e^x+1)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Για x=0 η παραπάνω γίνεται: $f(0)(e^0+1)=c\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot 2=c\Leftrightarrow c=1$, οπότε

$f(x)(e^x+1)=1\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f'(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

iii. Αρκεί να δείξουμε ότι η f στο (0,f(0)) δέχεται εφαπτομένη και έχει σημείο καμπής

$$f''(x)=\left(-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)'=\frac{e^x(e^x-1)}{\left(e^x+1\right)^3}.$$

Κατασκευάζουμε πίνακα πρόσημου για την f''

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\frac{1}{2}$	$\cup$

Σ.Κ

Από τον παραπάνω πίνακα πρόσημου της f'' διαπιστώνουμε ότι η f παρουσιάζει σημείο καμπής στην θέση x=0 .Η εφαπτομένη στο Cf στο σημείο (0,f(0) έχει εξίσωση :

$$y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

iv.Έχουμε $G'(x)=f(x)+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$

-Όταν $x\in(0,+\infty)$ η f είναι κυρτή, άρα η Cf βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο σημείο (0,f(0)), δηλαδή :

$$f(x)>-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow G'(x)>0$$

-Όταν $x\in(-\infty,0)$ η f είναι κοίλη , άρα η Cf βρίσκεται κατω από την εφαπτομένη στο σημείο (0,f(0)), δηλαδή :

$$f(x)<-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}<0\Leftrightarrow G'(x)<0$$

Είναι

$$G'(x)=0\Leftrightarrow f(x)+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow f(x)=-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα πρόσημου της G' και διαπιστώνουμε ότι η G' παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για x=0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
G′(x)	−	0	+
G(x)	↘	0	↗

Ελαχ.

v.Για $x>0$ έχουμε:

$$8F(\ln x)=2\ln x^2-\ln^2 x\Leftrightarrow F(\ln x)+\frac{\ln x^2}{4}-\frac{\ln^2 x}{8}=0\Leftrightarrow G(\ln x)=0,\ (1)$$

Και επειδή η G παίρνει τιμή 0 μόνο για x=0,εχουμε ότι:

$$(1)\ \Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$$

vi.Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1)$,τέτοιο ώστε:

$f(x_0)(1-x_0)=F(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)(1-x_0)-F(x_0)=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=(x-1)F(x)$.Έχουμε:

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$h(1)=h(0)=0$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με:

$h'(x)=F(x)+f(x)(x-1)$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$h'(x_0)=0\Leftrightarrow ..\Leftrightarrow f(x_0)(1-x_0)=F(x_0)$

Θα αποδείξουμε ότι το x_0 είναι μοναδικό. Για κάθε $x \in (0,1)$:

$h''(x) = f(x) + f(x) + (x-1)f'(x) \Leftrightarrow h''(x) = 2f(x) + (x-1)f'(x) > 0$

Άρα η συνάρτηση h′ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$

οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0) = 0$

- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $x-1 < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$,
- $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

vii.α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x \geq x+1$ άρα και για x το x-1 οπότε γίνεται $e^{x-1} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε και για $x \in [0,1]$

Έτσι

$$e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} + 1 \geq x+1 \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e^{x-1}+1} \leq \frac{1}{x+1} \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} \frac{x}{e^{x-1}+1} \leq \frac{x}{x+1}$$

Συνεπώς

$$\int_0^1 \frac{x}{e^{x-1}+1}dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

α) $\int_0^1 F(x-1)dx = \int_0^1 x' \cdot F(x-1)dx = \left[x \cdot F(x-1)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f(x-1)dx = F(0) - \int_0^1 x \cdot f(x-1)dx = \int_0^1 x \cdot f(x-1)dx =$

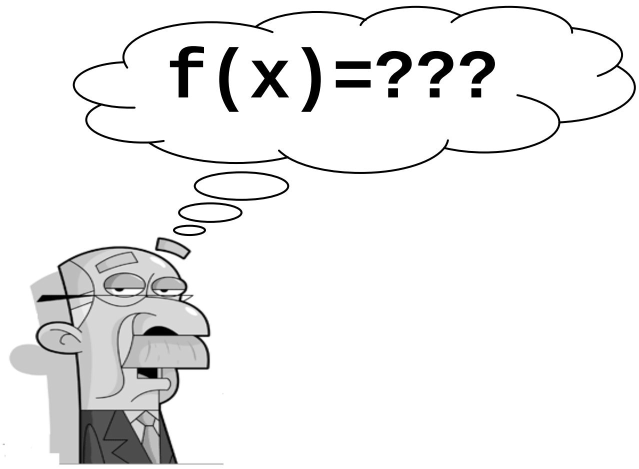
$-\int_0^1 x \cdot f(x-1)dx = -\int_0^1 \frac{x}{e^{x-1}+1}dx$

Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\int_0^1 \frac{x}{e^{x-1}+1}dx < \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$ (δυο συναρτήσεις δεν είναι ίσες στο $[0,1]$)

άρα $\int_0^1 \frac{x}{e^{x-1}+1}dx < \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx \Leftrightarrow -\int_0^1 \frac{x}{e^{x-1}+1}dx > -\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

Άρα η $\int_0^1 F(x-1)dx > -\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

Έχουμε: $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1})dx = \left[x - \ln(x+1)\right]_0^1 = \ln 2 - 1 = \ln\frac{2}{e}$



..old mathematicians never die they just lose some of their functions..

27. Α i.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^3+16x-2^7, x\in\mathbb{R}$ **να δείξετε ότι είναι 1-1.**

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:**

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(f(x))^3+16f(x)-2^7}{x-2}=L\in\mathbb{R}$
- f άρτια
- $xf'(x)-2f(x)=0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**

ii.Να δείξετε ότι $f(2)=4$

iii.Να δείξετε ότι $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$

Β.Αν θεωρήσουμε την ευθεία (ε) $y=x+\alpha$, **όπου** $\alpha\in\mathbb{R}$, **η οποία έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με την Cf.**

i.Να δείξετε ότι $\alpha>-\dfrac{1}{4}$

ii.Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha>-\dfrac{1}{4}$ **το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την Cf και την ευθεία (ε) είναι** $\dfrac{27}{6}$ **τ.μ.**

iii.Υποθέτουμε ότι το $\alpha>-\dfrac{1}{4}$ **αυξάνεται με ρυθμό** $0,3$ **m/sec**

να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του χωρίου που περικλείεται από την Cf και την ευθεία (ε), ως προς τον χρόνο t, την χρονική στιγμή t_0 **κατά την οποία** $E=\dfrac{27}{6}$ **τ.μ**

Γ. (Στα γρήγορα..)Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση h με τύπο $h(x)=f(x), x\in[0,2]$ **και ένα σημείο Α(1974,0) τότε για κάθε σημείο Μ της Cf υπάρχουν σημεία Μ1,Μ2 τέτοια ώστε** $(AM_1)\le(AM)\le(AM_2)$.

Λύση

Αi.Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $g'(x)=3x^2+16>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς 1-1.

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\left((f(x))^3+16f(x)-2^7\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{(f(x))^3+16f(x)-2^7}{x-2}(x-2)\right)=0\cdot L=0$ (2)

Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ (ως παραγωγίσιμη) άρα $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\left((f(x))^3+16f(x)-2^7\right)=(f(2))^3+16f(2)-2^7$ (3)

Από (1),(2) έπεται ότι:

$$(f(2))^3+16f(2)-2^7=0\Leftrightarrow g(f(2))=g(4)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(2)=4$$

iii. Η (1) για x=0 : $0\cdot f'(0)-2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

Για $x\neq 0$:

$$xf'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}=0\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x^2}-\frac{2f(x)}{x^3}=0\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}f'(x)-\frac{2}{x^3}f(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}f'(x)+\left(\frac{1}{x^2}\right)'f(x)=0\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=0$$

Από το θεώρημα των ίσων παραγώγων προκύπτει

$$f(x)=\begin{cases} c_1x^2, x>0\\ 0,\quad x=0\\ c_2x^2, x<0\end{cases}$$

Όμως $f(2)=4$ άρα $c_1 2^2=4 \Leftrightarrow c_1=1$. Η f είναι άρτια άρα $f(-2)=4 \Leftrightarrow c_2(-2)^2=4 \Leftrightarrow c_2=1$

Τελικά $f(x)=\begin{cases} x^2, x>0 \\ 0, \ \ x=0 \\ x^2, x<0 \end{cases}$ ή $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$

B.i.Η Cf τέμνει την ευθεία (ε) $y=x+\alpha$ σε δυο διαφορετικά σημεία άρα η εξίσωση $f(x)=x+\alpha$ έχει δυο άνισες ρίζες

$x^2=x+\alpha \Leftrightarrow x^2-x-\alpha=0$ αρκεί η διακρίνουσα Δ να είναι θετική , έτσι

$\Delta=1+4\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha>-\frac{1}{4}$

ii. όταν $\alpha>-\frac{1}{4}$ η εξίσωση $x^2-x-\alpha=0$ έχει δυο άνισες ρίζες ϱ_1,ϱ_2 με $\varrho_1<\varrho_2$ για τις οποίες από του τύπους του Vieta ισχύει: $\varrho_1+\varrho_2=1$, $\varrho_1\varrho_2=-\alpha$. το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την Cf και την ευθεία (ε) είναι

$E=\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}|f(x)-(x+\alpha)|dx=\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}|x^2-x-\alpha|dx$, όμως $x^2-x-\alpha\le 0$ για κάθε $x\in[\varrho_1,\varrho_2]$, οπότε έχουμε:

$$E=\int_{\varrho_1}^{\varrho_2}(-x^2+x+\alpha)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\alpha x\right]_{\varrho_1}^{\varrho_2}=\left(-\frac{\varrho_2{}^3}{3}+\frac{\varrho_2{}^2}{2}+\alpha\varrho_2\right)-\left(-\frac{\varrho_1{}^3}{3}+\frac{\varrho_1{}^2}{2}+\alpha\varrho_1\right)=$$

$$=\frac{\varrho_1{}^3}{3}-\frac{\varrho_2{}^3}{3}-\frac{\varrho_1{}^2}{2}+\frac{\varrho_2{}^2}{2}-\alpha\varrho_1+\alpha\varrho_2=\frac{2\varrho_1{}^3-2\varrho_2{}^3-3\varrho_1{}^2+3\varrho_2{}^2-6\alpha\varrho_1+6\alpha\varrho_2}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}(2(\varrho_1{}^3-\varrho_2{}^3)-3(\varrho_1{}^2-\varrho_2{}^2)-6\alpha(\varrho_1-\varrho_2)=$$

$$=\frac{1}{6}(2(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1{}^2+\varrho_2\varrho_1+\varrho_2{}^2)-3(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2)-6\alpha(\varrho_1-\varrho_2))=$$

$$=-\frac{1}{6}(\varrho_2-\varrho_1)(2(\varrho_1{}^2+\varrho_2\varrho_1+\varrho_2{}^2)-3(\varrho_1+\varrho_2)-6\alpha)\ (4)$$

Αλλά $\varrho_1+\varrho_2=1 \Leftrightarrow (\varrho_1+\varrho_2)^2=1^2 \Leftrightarrow \varrho_1{}^2+\varrho_2{}^2+2\varrho_1\varrho_2=1 \overset{\varrho_1\varrho_2=-\alpha}{\Leftrightarrow} \varrho_1{}^2+\varrho_2{}^2-2\alpha=1 \Leftrightarrow \varrho_1{}^2+\varrho_2{}^2=1+2\alpha$

$(\varrho_2-\varrho_1)^2=\varrho_2{}^2+\varrho_1{}^2-2\varrho_2\varrho_1=2\alpha+1+2\alpha=4\alpha+1$ άρα $\varrho_2-\varrho_1\overset{\alpha>-\frac{1}{4}}{=}\sqrt{4\alpha+1}$

Η (4) γίνεται

$$E=-\frac{1}{6}(\varrho_2-\varrho_1)(2(\varrho_1{}^2+\varrho_2\varrho_1+\varrho_2{}^2)-3(\varrho_1+\varrho_2)-6\alpha)=-\frac{1}{6}(\sqrt{4\alpha+1})(2(-\alpha+1+2\alpha)-3-6\alpha)=$$

$$=-\frac{1}{6}(\sqrt{4\alpha+1})(-1-4\alpha)=\frac{1}{6}(\sqrt{4\alpha+1})(4\alpha+1)$$

Όμως από υπόθεση $E=\frac{27}{6}$ έτσι

$$\frac{1}{6}(\sqrt{4\alpha+1})(4\alpha+1)=\frac{27}{6}\overset{\alpha>-\frac{1}{4}}{\Leftrightarrow}(\sqrt{4\alpha+1})^3=27 \Leftrightarrow (4\alpha+1)^{\frac{3}{2}}=27 \Leftrightarrow (4\alpha+1)=27^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 4\alpha+1=(3^3)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 4\alpha+1=9 \Leftrightarrow \alpha=2$$

ii.Έστω ότι την χρονική στιγμή t sec είναι $\alpha=\alpha(t)$ μονάδες μήκους και $E=E(t)$ τετραγωνικές μονάδες

Δηλαδή,

$$E(\alpha(t))=\frac{1}{6}(\sqrt{4\alpha(t)+1})(4\alpha(t)+1)$$

$$E'(\alpha(t))=\left(\frac{1}{6}(\sqrt{4\alpha+1})(4\alpha+1)\right)'=\left(\frac{1}{6}(\sqrt{4\alpha(t)+1})^3\right)'=\left(\frac{1}{6}(4\alpha(t)+1)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{1}{6}\frac{3}{2}(4\alpha(t)+1)^{\frac{1}{2}}(4\alpha(t)+1)'=$$

$$=\frac{1}{4}(4\alpha(t)+1)^{\frac{1}{2}}4\alpha'(t)=(4\alpha(t)+1)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t)$$

Για την χρονική στιγμή t_0 είναι:

$E'(t_0)=(4\alpha(t_0)+1)^{\frac{1}{2}}\alpha'(t_0)=(4\cdot 2+1)^{\frac{1}{2}}0,3=0.9$ τ.μ/sec

Γ. Είναι $h(x)=x^2, x\in[0,2]$

Η απόσταση του A(1974,0) από το M(x,h(x)) είναι $d(x)=\sqrt{(x-1974)^2+x^2}, x\in[0,2]$,η d(x) είναι συνεχής στο $[0,2]$ άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,2]$ τέτοια ώστε: $d(x_1)\le d(x)\le d(x_2)$ για κάθε $x\in[0,2]$ δηλαδή υπάρχουν σημεία $M_1(x_1,h(x_1)),M_2(x_2,h(x_2))$ τέτοια ώστε $(AM_1)\le(AM)\le(AM_2)$.

28.Δινονται οι συναρτήσεις $f(x)=xe^x-e^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,$g(x)=e^x+x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στην Cg και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i.Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4\xi-3\xi^2$.

ii.Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iii.Να δείξετε ότι η κλίση της (ε) ισούται με 2.

iv.Να δείξετε ότι $g(2x-1)-g(2x)\ge g(g(x)-1)-g(g(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

v.Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1}.

vi.Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η Cg^{-1} βρίσκεται κάτω από την ευθεία y=x.

vii.Δεδομένου ότι η g^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της να δείξετε ότι το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την Cg^{-1} , την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0,x=e ισούται με $\frac{e^2-3}{2}$ τ.μ

Λύση

i.Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x^2+x^3, x\in\mathbb{Z}$.Η h συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $h(0)=0=h(1)$ άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-4\xi+3\xi^2=0\Leftrightarrow f'(\xi)=4\xi-3\xi^2$.

ii. $f(x)=0$ έχει μια προφανή ρίζα την x=0.Θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική.

$f'(x)=\left(xe^x-e^x+1\right)'=xe^x, f'(x)=0\Leftrightarrow xe^x=0\Leftrightarrow x=0$

Για $x>0\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

συνεπώς αν $x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$

Για $x<0\Leftrightarrow f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$

συνεπώς αν $x<0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την x=0 και όσο αφορά το πρόσημο της f ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$.

iii.Η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει την μορφή $y=\alpha x$ και ταυτίζεται με εφαπτομένη την Cg με σημείο επαφής $A(x_0,f(x_0))$ και έχει εξίσωση

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)\Leftrightarrow y=g'(x_0)x-g'(x_0)x_0+g(x_0)$

Άρα

$$\begin{cases}-g'(x_0)x_0+g(x_0)=0\\ g'(x_0)=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-(e^{x_0}+1)x_0+e^{x_0}+x_0-1=0\\ e^{x_0}+1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_0e^{x_0}-x_0+e^{x_0}+x_0-1=0\\ e^{x_0}+1=\alpha\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x_0e^{x_0}+e^{x_0}-1=0\\ e^{x_0}+1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0e^{x_0}-e^{x_0}+1=0\\ e^{x_0}+1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x_0)=0\\ e^{x_0}+1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\ e^{x_0}+1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\ e^{0}+1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\ \alpha=2\end{cases}$$

Άρα η κλίση της (ε) ισούται με 2.

iv.Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x)=g(x-1)-g(x), x\in\mathbb{R}$

Έχουμε: $k'(x)=g'(x-1)-g'(x)=e^{x-1}-e^{x}=e^{x-1}(1-e)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση k είναι γνησίως φθίνουσα .Έτσι η ζητούμενη ανισότητα γράφεται: $k(g(x))\le k(2x)\overset{k\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)\ge 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ που ισχύει διότι η g είναι κυρτή ($g''(x)=e^{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$) και συνεπώς η Cg βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε): y=2x .

v. $g'(x)=e^{x}+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η g αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$D_{g^{-1}}=g(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=\mathbb{R}$$

vi. $g^{-1}(x)<x\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(g^{-1}(x))<g(x)\Leftrightarrow x<g(x)\Leftrightarrow x<e^{x}+x-1\Leftrightarrow 0<e^{x}-1\Leftrightarrow 1<e^{x}\Leftrightarrow x>0$

vii. $E=\int_0^e\left|g^{-1}(x)-x\right|dx=\int_0^e(x-g^{-1}(x))dx=\int_0^e xdx-\int_0^e g^{-1}(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e-\int_0^e g^{-1}(x)dx$

θέτουμε $u=g^{-1}(x)\Leftrightarrow x=g(u)$ οπότε $dx=g'(u)du$.Για τα άκρα ολοκλήρωσης

-Για $x=0\Leftrightarrow g(x)=g(0)\Leftrightarrow u=0$

-Για $x=e\Leftrightarrow g(x)=g(e)\Leftrightarrow u=1$

$$E=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e-\int_0^e g^{-1}(x)dx=\frac{e^2}{2}-\int_0^1 ug'(u)du=\frac{e^2}{2}-(\left[ug(u)\right]_0^1-\int_0^1 g(u)du)=\frac{e^2}{2}-(g(1)-\int_0^1(e^u+u-1)du)=$$

$$=\frac{e^2}{2}-e+\int_0^1(e^u+u-1)du=\frac{e^2}{2}-e+\left[e^u+\frac{u^2}{2}-u\right]_0^1=\frac{e^2}{2}-e+e+\frac{1}{2}-1-1=\frac{e^2-3}{2}\text{ τ.μ}$$

29.Δίνονται δυο συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με F μια παράγουσα της f και G μια παράγουσα της g.Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $F(1)=0$
- $G(0)=\int_0^1(x(2F(x)-xf(x)))dx$
- $F(x)-xG(x)=2$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $g(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι:

i.(all time classic) Υπάρχει $\xi\in(0,1974)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{1974}f(t)dt=1974f(\xi)$.

ii.Η γραφική παράσταση της G διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii.Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ και ισχύει: $f'(0)=2g(0)$.

iv.Να δείξετε ότι η συνάρτηση G είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

v.Η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=0$.

vi.Η εξίσωση $f(x)-2=2g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

i.Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε:

$$\int_0^{1974}f(t)dt=F(1974)-F(0)=1974\frac{F(1974)-F(0)}{1974-0}\quad(1)$$

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $\left[0,1974\right]$ άρα και συνεχής σε αυτό ,από το Θ.Μ.Τ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(0,1974)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi)=\frac{F(1974)-F(0)}{1974-0}\overset{F'(\xi)=f(\xi)}{\Leftrightarrow} f(\xi)=\frac{F(1974)-F(0)}{1974-0}\ (2)$$

Από (1) ,(2) προκύπτει το ζητούμενο.

ii.Αρκεί να δείξουμε ότι $G(0)=0$

$$G(0)=\int_0^1(x(2F(x)-xf(x)))dx=\int_0^1((2xF(x)-x^2F'(x)))dx=\int_0^1(xF(x))'dx=\left[xF(x)\right]_0^1=F(1)=0$$

iii. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ (2)

Παραγωγίζουμε την (1)

$F'(x)-x'G(x)-xG'(x)=(2)'\overset{F'(x)=f(x),G'(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} f(x)-G(x)-xg(x)=0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για x=0: $f(0)-G(0)-0g(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

Έτσι η (2):

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{f(x)-G(x)-xg(x)=0\Leftrightarrow f(x)=G(x)+xg(x)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{G(x)+xg(x)}{x}==\lim_{x\to 0}\frac{G(x)+xg(x)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{G(x)}{x}+\frac{xg(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{G(x)}{x}+g(x)\right)\underset{\lim_{x\to 0}\frac{G(x)}{x}=G'(0)=g(0)}{\overset{\text{g συνεχης στο 0 αρα}\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)}{=}}2g(0)$$

iv.Έχουμε $G'(x)=g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η g ως συνεχής διατηρεί πρόσημο .Δηλαδή, η G είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.Όμως, από την σχέση (1) για x=1 παίρνουμε $F(1)-1G(1)=2\Leftrightarrow G(1)=-2<0$.Δηλαδή $G(1)<G(0)$.Άρα η G είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ κατά συνέπεια $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

v.Έχουμε:

F′(0)=f(0)=0 και

$F'(x)=f(x)=xg(x)+G(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

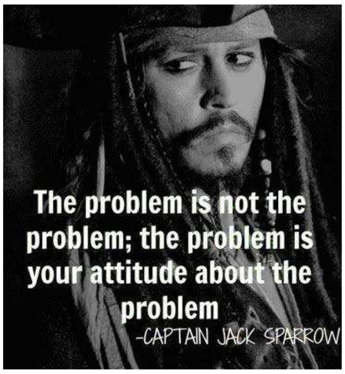
Για $x<0$: $xg(x)>0, G(x)>G(0)=0$. Άρα, $F'(x)>0$ για κάθε $x<0$

Για $x>0$: $xg(x)<0, G(x)<G(0)=0$. Άρα, $F'(x)<0$ για κάθε $x>0$

Οπότε η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=0$.

vi.Η εξίσωση $f(x)-2=2g(x)$ γίνεται $f(x)-2-2g(x)=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)-2x-2G(x)$ που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle $\left[0,1\right]$ από την εφαρμογή του οποίου προκύπτει το ζητούμενο.



30.Α. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$,$f(x)>0$ για κάθε $x>1$ για την οποία ισχύει:

- $2\sqrt{x}f'(x)-f(x)=0$ **για κάθε** $x>1$
- $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-e^2}{x-4}=\dfrac{e^2}{4}$

i)Να δείξετε ότι $f(4)=e^2$ και κατόπιν $f(x)=e^{\sqrt{x}},x>1$.

ii)Να εξετάσετε την f′ ως προς την μονοτονία στο $(1,+\infty)$.

iii)Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$.

iv)Να δείξετε ότι:

$$f'(x^2)<f(x^2+1)-f(x^2)<f'(x^2+1) \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty)$$

v) **Να δείξετε ότι:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2016}{e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x}=0$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x+1)\cdot\ln x^{\sqrt{x+1}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

i)Να δείξετε ότι $g(x)=(x+1)\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

ii)Να εξετάσετε την g ως προς την μονοτονία και το σύνολο τιμών.

iii)Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της Cg στο σημείο της Α(1,0) «διαπερνά» την Cg.

iv)Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cg,την (ε) και τις ευθείες $x=0,x=e^{-1}$.

Λύση

Α i) Για $x\neq 4$:

$$h(x)=\frac{f(x)-e^2}{x-4}\Leftrightarrow h(x)(x-4)=f(x)-e^2\Leftrightarrow h(x)(x-4)+e^2=f(x)$$

Παίρνουμε όρια στο 4 (τα όρια υπάρχουν)

$$\lim_{x\to 4}\left(h(x)(x-4)+e^2\right)=\lim_{x\to 4}f(x)\Leftrightarrow\lim_{x\to 4}f(x)=e^2$$

Η f ως παραγωγίσιμη $(1,+\infty)$ θα είναι και παραγωγίσιμη άρα και συνεχής $x_0=4$ οπότε ισχύει $f(4)=\lim\limits_{x\to 4}f(x)=e^2$

Για κάθε $x>1$

$$2\sqrt{x}f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}f'(x)=f(x)\underset{f(x)>0}{\overset{x>1}{\Leftrightarrow}}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow(\ln f(x))'=\left(\sqrt{x}\right)'\Leftrightarrow\ln f(x)=\sqrt{x}+c$$,c σταθερός πραγματικός .Αλλά, $f(4)=e^2$ οπότε η (1) γίνεται:

$$\ln f(4)=\sqrt{4}+c\Leftrightarrow\ln e^2=2+c\Leftrightarrow 2=2+c\Leftrightarrow c=0$$

Η (1) γίνεται $\ln f(x)=\sqrt{x}\Leftrightarrow f(x)=e^{\sqrt{x}}$, $x>1$

ii)Η f είναι παραγωγίσιμη, συνεχής στο $(1,+\infty)$,έτσι

$$f''(x)=\left(\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\right)'=\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)'=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}>0$$ για κάθε $x>1$ άρα η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

iii) $$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}\underset{u\to+\infty}{\overset{u=\sqrt{x}}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u(u-1)}{4u^3}\underset{D.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u(u-1)-e^u}{12u^2}=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u(u-2)}{12u^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{D.H}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u(u-2)-e^u}{24u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u(u-3)}{24u}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{D.H}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u(u-4)}{24}=+\infty$$

iv) Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $\left[x^2,x^2+1\right]$ άρα υπάρχει

$\xi\in\left(x^2,x^2+1\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x^2+1)-f(x^2)}{x^2+1-x^2}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x^2+1)-f(x^2)$ (2) αλλά

$$x^2<\xi<x^2+1\overset{f'}{\Rightarrow}f'(x^2)<f'(\xi)<f'(x^2+1)\overset{(2)}{\Rightarrow}f'(x^2)<f(x^2+1)-f(x^2)<f'(x^2+1)$$

v)Από το ερώτημα (iv) για κάθε $x\in(1,+\infty)$

$$f'(x^2)<f(x^2+1)-f(x^2)<f'(x^2+1)\underset{f'(x)>0}{\overset{f'(x)>0}{\Rightarrow}}\frac{1}{f'(x^2)}>\frac{1}{f(x^2+1)-f(x^2)}>\frac{1}{f'(x^2+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2016}{f'(x^2)}>\frac{2016}{f(x^2+1)-f(x^2)}>\frac{2016}{f'(x^2+1)}\quad(3)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2016}{f'(x^2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2016}{\frac{e^{\sqrt{x^2}}}{2\sqrt{x^2}}}\overset{x\in(1,+\infty)}{=}2016\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{D.H}{=}}2016\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0\quad(4)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2016}{f'(x^2+1)}=\ldots=0\quad(5)$

Από (3) ,(4),(5) και το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2016}{f(x^2+1)-f(x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2016}{e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x}=0$$

B. i) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$: $g(x)=\ln f(x+1)\cdot\ln x^{\sqrt{x+1}}\overset{x>0}{=}\ln e^{\sqrt{x+1}}\cdot\ln x^{\sqrt{x+1}}=\left(\sqrt{x+1}\right)^2\ln x=(x+1)\ln x$

Άρα $g(x)=(x+1)\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

i)Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

$$g'(x)=\left((x+1)\ln x\right)'=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

Η g' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

$$g''(x)=\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)'=\ldots=\frac{x-1}{x^2}$$

Οπότε έχουμε:

- $g''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$
- $g''(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x^2}<0\Leftrightarrow 0<x<1$
- $g''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x^2}>0\Leftrightarrow x>1$

Η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα η g' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $g'(1)=2$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$g'(x)\geq g'(1)=2>0$

Άρα $g'(x)>0$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to0^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

Οπότε $g((0,+\infty))=\mathbb{R}$

iii)Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο Α(1,0) είναι

$y-g(1)=g'(1)(x-0)\Leftrightarrow ......\Leftrightarrow y=2x-2$

Για να δείξουμε ότι η εφαπτομένη (ε) διαπερνά της γραφική παράσταση της Cg αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο Α(1,0) είναι σημείο καμπής της Cg.

Είναι

$g''(x)=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=1$

$g''(x)<0\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow 0<x<1$

$g''(x)>0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x>1$

Άρα η g''(1)=0 και η g'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 οπότε το Α(1,0) είναι σημείο καμπής της Cg.

Η (ε) διαπερνά την Cg, αφού η g είναι κοίλη στο $(0,1]$ και κυρτή στο $[1,+\infty)$.

iii)Στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},1\right]$ η g είναι κοίλη άρα η εφαπτομένη της βρίσκεται «πάνω» από την Cg , οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\int_{e^{-1}}^{1}(2x-2-g(x))dx=\int_{e^{-1}}^{1}(2x-2-(x+1)\ln x)dx=\int_{e^{-1}}^{1}(2x-2)dx-\int_{e^{-1}}^{1}((x+1)\ln x)dx=\left[x^2-2x\right]_{e^{-1}}^{1}-\int_{e^{-1}}^{1}((x+1)\ln x)dx=$$

$$=\left[x^2-2x\right]_{e^{-1}}^{1}-\int_{e^{-1}}^{1}((\frac{x^2}{2}+x)'\ln x)dx=\left[x^2-2x\right]_{e^{-1}}^{1}-\left(\left[(\frac{x^2}{2}+x)\ln x\right]_{e^{-1}}^{1}-\int_{e^{-1}}^{1}(\frac{\frac{x^2}{2}+x}{x})dx\right)=$$

$$=\left[x^2-2x\right]_{e^{-1}}^{1}-\left[(\frac{x^2}{2}+x)\ln x\right]_{e^{-1}}^{1}+\int_{e^{-1}}^{1}(\frac{x^2+2x}{2x})dx=\left[x^2-2x\right]_{e^{-1}}^{1}-\left[(\frac{x^2}{2}+x)\ln x\right]_{e^{-1}}^{1}+\int_{e^{-1}}^{1}(\frac{x^2}{2}+1)dx=$$

$$=\left[x^2-2x\right]_{e^{-1}}^{1}-\left[(\frac{x^2}{2}+x)\ln x\right]_{e^{-1}}^{1}+\left[\frac{x^3}{6}+x\right]_{e^{-1}}^{1}=....=\frac{1}{4}-\frac{7}{4e^2}$$

31.Ένα έντομο της οικογένειας των Catsaridus-Politicus κινείται στον άξονα x'x με ταχύτητα u(t) που δίνεται από τον τύπο $u(t)=3t^2-4t+1$ μέτρα ανά λεπτό. Αν την χρονική στιγμή t_0 που αρχίζει να κινείται βρίσκεται σε απόσταση 3 m από το σημείο Ο του ημιάξονα Οx να βρείτε :

i)Την θέση του εντόμου στον άξονα μετά από 2 λεπτά.

ii)Να υπολογίσετε το διάστημα που διένυσε το έντομο στο χρονικό διάστημα των δυο αυτών λεπτών.

iii)Να εντοπίσετε την διαφορά των δυο παραπάνω αποτελεσμάτων περιγράφοντας την κίνηση του εντόμου.

Λύση

i)Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε:

$$\int_{t_0}^{t_1}u(t)dt=x(t_1)-x(t_0)\quad (1)$$

Είναι $t_0=0$, $x_{t_0}=3$, $t_1=2$ και ζητούμενη η απόσταση x την χρονική στιγμή t_1 το x_{t_1} .

Από (1) παίρνουμε

$$\int_{0}^{2}(3t^2-4t+1)dt+x_0=x_{t_1}\Leftrightarrow\left[3\frac{t^3}{3}-4\frac{t^2}{2}+t\right]_0^2+3=x_{t_1}\Leftrightarrow\left[t^3-2t^2+t\right]_0^2+3=x_{t_1}\Leftrightarrow 8-8+2+3=x_{t_1}\Leftrightarrow x_{t_1}=5$$

Που σημαίνει ότι μετά από δυο λεπτά το έντομο απέχει από την αρχή του άξονα 5 m.

ii)Η απόσταση S που ζητάμε είναι $\int_0^2 |u(t)|dt = \int_0^2 |3t^2 - 4t + 1|dt$

Αλλά $3t^2 - 4t + 1 \le 0$ για κάθε $t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ και $3t^2 - 4t + 1 \ge 0$ για κάθε $t \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$ οπότε

$$S = \int_0^{\frac{1}{3}} (3t^2 - 4t + 1)dt - \int_{\frac{1}{3}}^{1} (3t^2 - 4t + 1)dt + \int_1^2 (3t^2 - 4t + 1)dt =$$

$$= \left[t^3 - 2t^2 + t\right]_0^{\frac{1}{3}} - \left[t^3 - 2t^2 + t\right]_{\frac{1}{3}}^{1} + \left[t^3 - 2t^2 + t\right]_1^2 = ... = \frac{62}{27} \approx 2,3 \text{ m}$$

Το ότι το έντομο απέχει 2 μέτρα από το σημείο από όπου ξεκίνησε όπως βρήκαμε στο 1ο ερώτημα , ενώ σε δυο λεπτά έχει διανύσει συνολική απόσταση 2,3 μέτρων οφείλεται στο γεγονός ότι δεν κινείται συνεχώς προς την ίδια κατεύθυνση αφού ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η απόσταση του δηλαδή το u(t) παίρνει αρνητικές τιμές από $t = \frac{1}{3}$ min και $t = 1$ min που σημαίνει ότι από την αρχή έως $t = \frac{1}{3}$ min $= 20$ sec απομακρύνεται από το Ο , από το 20ο δευτερόλεπτο με το $t = 1$ min $= 60$ sec κινείται προς τα πίσω προς το Ο και μετά το 1ο λεπτό αρχίζει να απομακρύνεται πάλι από το Ο ,για να διανύσει μετά από 2 λεπτά συνολική απόσταση 2,3 m.

32.Α.Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha^2 x^3 + 2016x^2}{x^2 + 1} - 3\beta x \right) = +\infty$

(2) $f^3(x) + \alpha f^2(x) + \beta f(x) = x^5 + 5x^3 - 20x + 4$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **με** α, β **σταθερούς πραγματικούς αριθμούς**

i)Να δείξετε ότι $\alpha^2 < 3\beta$ **.**

ii)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ **έχει μοναδική ρίζα σο διάστημα** $(0,1)$ **.**

Β.i)Αν ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με σημεία $B(1975, f(1975))$ **,** $A(1974, f(1974))$ **είναι ίσος με 555 να αποδείξετε ότι**

$$I = \int_{1974}^{1975} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{3f^2(x) + 2\alpha f(x) + \beta} dx = 111$$

ii)Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ **έχει μια τουλάχιστον κοινή ρίζα με την εξίσωση** $x^2 - (\kappa + \lambda)x + \kappa\lambda + f(\kappa)f(\lambda) = 0$ **στο διάστημα** (κ, λ)**,** $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ **.**

Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία της Cf, $\Gamma(\xi_1, f(\xi_1)), \Delta(\xi_2, f(\xi_2))$ **στα οποία οι εφαπτομένες της Cf είναι κάθετες μεταξύ τους.**

Λύση

Α. i)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha^2 x^3 + 2016x^2}{x^2 + 1} - 3\beta x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha^2 x^3 + 2016x^2 - 3\beta x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha^2 x^3 + 2016x^2 - 3\beta x^3 - 3\beta x}{x^2 + 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(\alpha^2 - 3\beta)x^3 + 2016x^2 - 3\beta x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(\alpha^2 - 3\beta)x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \left((\alpha^2 - 3\beta)x \right) = (\alpha^2 - 3\beta) \cdot (-\infty)$$

• Αν $\alpha^2 - 3\beta > 0$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha^2 x^3 + 2016x^2}{x^2 + 1} - 3\beta x \right) = -\infty$

• Αν $\alpha^2-3\beta<0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha^2x^3+2016x^2}{x^2+1}-3\beta x\right)=+\infty$

• Αν $\alpha^2-3\beta=0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha^2x^3+2016x^2}{x^2+1}-3\beta x\right)\overset{\alpha^2-3\beta=0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2016x^2-3\beta x}{x^2+1}\right)=2016$

Άρα από υπόθεση πρέπει να ισχύει $\alpha^2-3\beta<0$

Α. ii)Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε παραγωγίζουμε την (2)

$$\left(f^3(x)+\alpha f^2(x)+\beta f(x)\right)'=\left(x^5+5x^3-20x+4\right)'\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+2\alpha f(x)f'(x)+\beta f'(x)=5x^4+15x^2-20\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\left(3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta\right)=5x^4+15x^2-20 \quad (3)$$

Το τριώνυμο $3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4\alpha^2-12\beta=4(\alpha^2-3\beta)<0$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι ομόσημο του 3 δηλαδή $3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (3) παίρνει την μορφή :

$$f'(x)=\frac{5x^4+15x^2-20}{3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{5(x^4+3x^2-4)}{3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta} \quad (4)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{5(x^4+3x^2-4)}{3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta}=0\Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0\overset{x^2=\omega}{\Leftrightarrow}\omega^2+3\omega-4=0\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=1\\ \omega=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\\ x^2=-4,\alpha\delta\upsilon\nu\alpha\tau\eta\end{cases}$$

Άρα, $x^4+3x^2-4=0\overset{x^2=\omega}{\Leftrightarrow}\omega^2+3\omega-4=0\Leftrightarrow(\omega-1)(\omega+4)=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2+4)=0$

Το πρόσημο της f′ ταυτίζεται με το πρόσημο του $x^4+3x^2-4=(x^2-1)(x^2+4)$

Έτσι, κατασκευάζουμε πίνακα

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

Άρα,

f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$

f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,1]$

το x=-1 είναι θέση τοπικού μεγίστου ενώ ο x=1 είναι θέση τοπικού ελαχίστου

Α. iii)Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano .Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$

Η (2) γίνεται

$$f^3(x)+\alpha f^2(x)+\beta f(x)=x^5+5x^3-20x+4\Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+\alpha f(x)+\beta)=x^5+5x^3-20x+4 \ (3)$$

Αλλά, το τριώνυμο $f^2(x)+\alpha f(x)+\beta$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2-4\beta=\left(\alpha^2-3\beta\right)-\beta<0$

(διότι $\alpha^2-3\beta<0$ έτσι $\alpha^2-3\beta<0\Leftrightarrow\alpha^2<3\beta\Leftrightarrow\dfrac{\alpha^2}{3}<\beta$ άρα $0\le\dfrac{\alpha^2}{3}<\beta$)

Οπότε το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του 1 δηλαδή θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι η (3) δίνει:

$$f(0)(f^2(0)+\alpha f(0)+\beta)=0^5+5\cdot0^3-20\cdot0+4\Leftrightarrow f(0)(f^2(0)+\alpha f(0)+\beta)=4\overset{f^2(0)+\alpha f(0)+\beta>0}{\Rightarrow}f(0)>0$$

$$f(1)(f^2(1)+\alpha f(1)+\beta)=1^5+5\cdot1^3-20\cdot1+4\Leftrightarrow f(1)(f^2(1)+\alpha f(1)+\beta)=-10\overset{f^2(1)+\alpha f(1)+\beta>0}{\Rightarrow}f(1)<0$$

Έτσι $f(0)\cdot f(1)<0$ οπότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)\subseteq[-1,1]$, άρα η ρίζα είναι μοναδική.

B i)

$$I=\int_{1974}^{1975}\frac{x^4+3x^2-4}{3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta}dx=\frac{1}{5}\int_{1974}^{1975}\frac{5(x^4+3x^2-4)}{3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta}dx\overset{(f'(x)=\frac{5(x^4+3x^2-4)}{3f^2(x)+2\alpha f(x)+\beta})}{=}\frac{1}{5}\int_{1974}^{1975}f'(x)dx=\frac{1}{5}(f(1975)-f(1974))\ (5)$$

Όμως από υπόθεση, ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος AB με σημεία $B(1975,f(1975))$, $A(1974,f(1974))$ είναι ίσος με 555 δηλαδή

$$\lambda_{AB}=555\Leftrightarrow\frac{f(1975)-f(1974)}{1975-1974}=555\Leftrightarrow f(1975)-f(1974)=555$$

Έτσι η (5) $I=\frac{1}{5}(f(1975)-f(1974))=\frac{1}{5}555=111$

Bii) Έστω $x_0\in(\kappa,\lambda)$ κοινή ρίζα της $f(x)=0$ και της εξίσωση; $x^2-(\kappa+\lambda)x+\kappa\lambda+f(\kappa)f(\lambda)=0$

Δηλαδή

$f(x_0)=0$

$x_0^{\,2}-(\kappa+\lambda)x_0+\kappa\lambda+f(\kappa)f(\lambda)=0$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στην f στα διαστήματα $[\kappa,x_0],[x_0,\lambda]$ άρα υπάρχουν $\xi_1\in(\kappa,x_0),\xi_2\in(x_0,\lambda)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\kappa)-f(x_0)}{\kappa-x_0}\quad,\quad f'(\xi_2)=\frac{f(\lambda)-f(x_0)}{\lambda-x_0}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=-1$. Έτσι,

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{f(\kappa)-f(x_0)}{\kappa-x_0}\cdot\frac{f(\lambda)-f(x_0)}{\lambda-x_0}\overset{f(x_0)}{=}\frac{f(\kappa)}{\kappa-x_0}\cdot\frac{f(\lambda)}{\lambda-x_0}=$$

$$=\frac{f(\kappa)f(\lambda)}{(\kappa-x_0)(\lambda-x_0)}\overset{x_0^{\,2}-(\kappa+\lambda)x_0+\kappa\lambda+f(\kappa)f(\lambda)=0\Leftrightarrow-x_0^{\,2}+(\kappa+\lambda)x_0-\kappa\lambda=f(\kappa)f(\lambda)}{=}\frac{-x_0^{\,2}+(\kappa+\lambda)x_0-\kappa\lambda}{(\kappa-x_0)(\lambda-x_0)}=-\frac{x_0^{\,2}-(\kappa+\lambda)x_0+\kappa\lambda}{x_0^{\,2}-(\kappa+\lambda)x_0+\kappa\lambda}=-1$$

33.Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x)+f'(x)+f''(x)=-x^2\cdot\ln\lambda \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Όπου λ είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης

$$\int_{e^2}^{x}\frac{\ln t^2-3}{t}dt=0,\ x\in(0,+\infty)$$

A. Να δείξετε ότι $\lambda=e$.

B.i)Να δείξετε ότι $f(x)=2x-x^2$.

ii)Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την Cf και τον άξονα x'x.

iii)Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ **ώστε η ευθεία** $y=\lambda x$ **να χωρίζει το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία.**

iv)Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+f(x)+2}+f(x)\right)$.

Λύση

A. $\int_{e^2}^{x}\frac{\ln t^2-3}{t}dt=0\Leftrightarrow\int_{e^2}^{x}(\frac{2\ln t}{t}-\frac{3}{t})dt=0\Leftrightarrow\int_{e^2}^{x}(2\frac{1}{t}\ln t-\frac{3}{t})dt=0\Leftrightarrow\int_{e^2}^{x}2(\ln t)'\ln t dt-3\int_{e^2}^{x}\frac{1}{t}dt=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_{e^2}^{x}(\ln^2 t)'dt-3\int_{e^2}^{x}(\ln t)'dt=0\Leftrightarrow\left[\ln^2 t-3\ln t\right]_{e^2}^{x}=0\Leftrightarrow(\ln^2 x-3\ln x)-(\ln^2 e^2-3\ln e^2)=0\Leftrightarrow$

$\ln^2 x-3\ln x-(4-6)=0\Leftrightarrow\ln^2 x-3\ln x+2=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x=e\ ,\ x=e^2$

Άρα $\lambda=e$.

B.i)είναι $f(x)+f'(x)+f''(x)=-x^2$ (1)

Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ δεν μπορεί να είναι σταθερή ή 1ου βαθμού (γιατί αν $f(x)=\alpha x+\beta$, $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$, τότε $f(x)+f'(x)+f''(x)=..=\alpha x+(\alpha+\beta)$)

Οπότε, δεν είναι δυνατόν να ισχύει η (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, η πολυωνυμική συνάρτηση f πρέπει να είναι βαθμού $\nu\geq 2$

Έχουμε:

•Η παράσταση $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ν

•Η παράσταση $f'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ν-1

•Η παράσταση $f'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού ν-2

Οπότε, η παράσταση $f(x)+f'(x)+f''(x)=-x^2$ είναι πολυώνυμο ν βαθμού

Έτσι η παράσταση του 1ου μέλους της (1) είναι πολυώνυμο ν βαθμού και η παράσταση του 2ου μέλους είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού, οπότε $\nu=2$.

Δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι της μορφής:

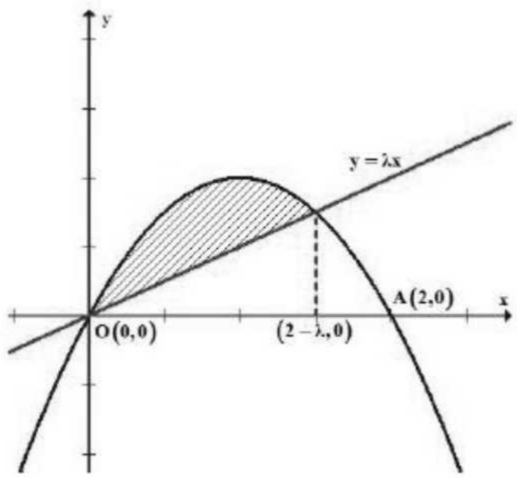
$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma \ , \ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\alpha\neq 0$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)+f'(x)+f''(x)=-x^2 \Leftrightarrow (\alpha x^2+\beta x+\gamma)+(2\alpha x+\beta)+2\alpha=-x^2 \Leftrightarrow \alpha x^2+(\beta+2\alpha)x+2\alpha+\beta+\gamma=-x^2 \ (2)$$

Για να ισχύει η (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta+2\alpha=0\\ 2\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\\ \gamma=0\end{cases}$$



Άρα $f(x)=2x-x^2$

ii)Έχουμε

$$f(x)=0\Leftrightarrow 2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2$$

Άρα η Cf τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία $O(0,0)$, $A(2,0)$.Επομένως το ζητούμενο εμβαδό του χωρίου Ω είναι

$$E(\Omega)=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2|2x-x^2|dx$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		−	0	+		+	
(2−x)		+		+	0	−	
x(2−x)		−	0	+	0	−	

Είναι όμως $2x-x^2=x(2-x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Οπότε $E(\Omega)=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2|2x-x^2|dx=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=..=\frac{4}{3}$ τ.μ

iii)Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=\lambda x$

Έχουμε :

$$f(x)=\lambda x\Leftrightarrow -x^2+2x=\lambda x\Leftrightarrow (2-\lambda)x-x^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=2-\lambda\end{cases}$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon):y=\lambda x$ τέμνει την Cf στα σημεία $(0,0),(2-\lambda,\lambda(2-\lambda))$

Για να χωρίζει η (ε) το χωρίο Ω σε δυο χωρία πρέπει:

$$0<2-\lambda<2 \Leftrightarrow -2<-\lambda<0 \Leftrightarrow 0<\lambda<2$$

Για $\lambda \in (0,2)$ βρίσκουμε το εμβαδό του χωρίου Ω1 που περικλείεται από την Cf και την ευθεία (ε)

Είναι:

$$E(\Omega_1)=\int_0^{2-\lambda}\left|f(x)-\lambda x\right|dx=\int_0^{2-\lambda}\left|2x-x^2-\lambda x\right|dx=\int_0^{2-\lambda}\left|(2-\lambda)x-x^2\right|dx$$

Είναι $(2-\lambda)x-x^2\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2-\lambda]$

x	$-\infty$		0		$2-\lambda$		$+\infty$
$(2-\lambda)x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Έτσι

$$E(\Omega_1)=\int_0^{2-\lambda}\left|(2-\lambda)x-x^2\right|dx=\int_0^{2-\lambda}((2-\lambda)x-x^2)dx=\left[\frac{(2-\lambda)x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{2-\lambda}=$$

$$=..=\frac{1}{6}(2-\lambda)^3 \text{ τ.μ}$$

Για να χωρίζει η ευθεία $(\varepsilon): y=\lambda x$ το χωρίο Ω σε δυο ισεμβαδικά χωρία πρέπει και αρκεί:

$$E(\Omega_1)=\frac{1}{2}E(\Omega)\Leftrightarrow \frac{1}{6}(2-\lambda)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\Leftrightarrow (2-\lambda)^3=4\Leftrightarrow 2-\lambda=\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow \lambda=2-\sqrt[3]{4}\in(0,2)$$

iv)Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$

Έτσι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+f(x)+2}+f(x)\right)\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}{\overset{\omega=f(x)}{=}}\lim_{\omega\to-\infty}\left(\sqrt{\omega^2+\omega+2}+\omega\right)=\lim_{\omega\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{\omega^2+\omega+2}\right)^2-\omega^2}{\sqrt{\omega^2+\omega+2}-\omega}\right)=$$

$$\lim_{\omega\to-\infty}\left(\frac{\omega+2}{\sqrt{\omega^2+\omega+2}-\omega}\right)=\lim_{\omega\to-\infty}\left(\frac{\omega(1+\frac{2}{\omega})}{-\omega(\sqrt{1+\frac{1}{\omega}+\frac{2}{\omega}}+1)}\right)=\lim_{\omega\to-\infty}-\frac{1+\frac{2}{\omega}}{\sqrt{1+\frac{1}{\omega}+\frac{2}{\omega}}+1}=-\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=-\frac{1}{2}$$

34.A.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta h(x)dx=0$.Να δείξετε ότι $h(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

B.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g:[1,e]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $\int_1^e g^2(x)dx+e-2\kappa\leq 2\int_1^e(\ln x\cdot g(x))dx$
- **κ: η κλίση της συνάρτησης $\phi(x)=x^x, x>0$ στο $x_0=1$**

i)Να δείξετε ότι κ=1

ii)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^e \ln^2 x dx$.

iii)Να δείξετε ότι $g(x)=\ln x, x\in[1,e]$.

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xg(x),\ x\in(0,+\infty)$

i)Να δείξετε ότι $e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}<\frac{e(x+1)}{x}, x>0$

ii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e$

iii)Να δείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)+x}{x^{x+1}}dx=\frac{e^e-1}{e^e}$

Λύση

A. Αν $\int_\alpha^\beta h(x)dx=0$, τότε θα αποδείξουμε ότι $h(x)=0\,,x\in[\alpha,\beta]$

Έστω ότι η συνάρτηση h όχι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.Τότε η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $h(x)\ge 0$.Άρα $\int_\alpha^\beta h(x)dx>0$, άτοπο αφού $\int_\alpha^\beta h(x)dx=0$.Επομένως $h(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

B.i)Η κλίση της $\phi(x)=x^x\,,x>0$ στο $x_0=1$ είναι $\phi'(1)$.Έτσι

$\phi'(x)=\left(x^x\right)'=\left(e^{\ln x^x}\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

Άρα, $\phi'(1)=1^1(\ln 1+1)=1$ δηλ $\kappa=1$.

ii) $I=\int_1^e \ln^2 x dx=\int_1^e (x)'\ln^2 xdx\overset{\Pi.O}{=}\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e x2\ln x\frac{1}{x}dx=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-2\int_1^e \ln xdx=$

$=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-2\int_1^e (x)'\ln xdx=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-2\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\frac{1}{x}dx\right)=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-2\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1dx\right)=$

$=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-2\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\left[x\right]_1^e\right)=e\ln^2 e-1\ln^2 1-2(e\ln e-1\ln 1-(e-1))=e-2(e-(e-1))=e-2$

iii)η δοθείσα ισότητα για κ=1 και $\int_1^e \ln^2 xdx=e-2$ λαμβάνει την μορφή

$\int_1^e g^2(x)dx+e-2\kappa\le 2\int_1^e \ln xg(x)dx\Leftrightarrow\int_1^e g^2(x)dx+\int_1^e \ln^2 xdx\le 2\int_1^e \ln xg(x)dx\Leftrightarrow\int_1^e g^2(x)dx+\int_1^e \ln^2 xdx\le 2\int_1^e \ln xg(x)dx$

$\Leftrightarrow\int_1^e g^2(x)dx+\int_1^e \ln^2 xdx-2\int_1^e \ln xg(x)dx\le 0\Leftrightarrow\int_1^e\left(g^2(x)+\ln^2 xdx-2\ln xg(x)\right)dx\le 0\Leftrightarrow\int_1^e\left(g(x)-\ln x\right)^2dx\le 0$ (1)

Αλλά $\int_1^e\left(g(x)-\ln x\right)^2dx\ge 0\,,x\in[1,e]$ (2)

Από (1) ,(2) $\int_1^e\left(g(x)-\ln x\right)^2dx=0\Rightarrow\int_1^e\left(g(x)-\ln x\right)dx=0\,,x\in[1,e]$ από το ερώτημα (Α) προκύπτει $g(x)-\ln x=0\Leftrightarrow g(x)=\ln x\,,x\in[1,e]$.

Γ. Η συνάρτηση $f(x)=xg(x)=x\ln x\,,x\in(0,+\infty)$

i)Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ ως πράξεις συνεχών, η f παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$.Άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$:

$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

Αλλά $f'(x)=\left(x\ln x\right)'=\ln x+1$ για $x>0$, οπότε $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow\ln\xi+1=f(x+1)-f(x)$

Έτσι $x<\xi<x+1\Rightarrow\ln x<\ln\xi<\ln(x+1)\Rightarrow\ln x+1<\ln\xi+1<\ln(x+1)+1\Rightarrow\ln x+1<f'(\xi)<\ln(x+1)+1\Rightarrow$

$\ln x+1<f(x+1)-f(x)<\ln(x+1)+1\Rightarrow\ln x+1<(x+1)\ln(x+1)-x\ln x<\ln(x+1)+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\ln x+\ln e<\ln(x+1)^{x+1}-\ln x^x<\ln(x+1)+\ln e\Rightarrow\ln x+\ln e<\ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}<\ln(x+1)+\ln e\Rightarrow$

$\ln(xe)<\ln\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}<\ln((x+1)e)\overset{\ln x\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow}xe<\frac{(x+1)^{x+1}}{x^x}<(x+1)e\overset{x>0}{\Rightarrow}$

$e<\frac{(x+1)^{x+1}}{x^{x+1}}<\frac{x+1}{x}e\Rightarrow e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}<\frac{e(x+1)}{x}$

ii)Από ερώτημα i)για κάθε $x>0$ ισχύει : $e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}<\frac{e(x+1)}{x}$ (3)

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} e=e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e(x+1)}{x}=e$,από το κριτήριο παρεμβολής και την (3) προκύπτει:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e$$

iii) $\int_1^e\frac{f(x)+x}{x^{x+1}}dx=\int_1^e\frac{x\ln x+x}{x^{x+1}}dx=\int_1^e\frac{x(\ln x+1)}{x^{x+1}}dx=\int_1^e\frac{\ln x+1}{x^x}dx=\int_1^e\frac{x^x(\ln x+1)}{\left(x^x\right)^2}dx\overset{B(i)}{=}\int_1^e\frac{\left(x^x\right)'}{\left(x^x\right)^2}dx=$

$=-\int_1^e-\frac{\left(x^x\right)'}{\left(x^x\right)^2}dx=-\int_1^e\left(\frac{1}{x^x}\right)'dx=-\left[\frac{1}{x^x}\right]_1^e=1-\frac{1}{e^e}=\frac{e^e-1}{e^e}$

35.Μια αυτοκινητοβιομηχανία πουλάει σε ένα μήνα α εκατοντάδες αυτοκίνητα μοντέλο Α, από την πώληση αυτών έχει έσοδα $\alpha^3+5\alpha$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ , κόστος παραγωγής $3\alpha^2$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ , και κέρδη 100000 ευρώ. Η ίδια εταιρεία πουλάει β εκατοντάδες αυτοκίνητα μοντέλο Β, έχει από την πώληση έσοδα $\beta^3+5\beta$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ, κόστος παραγωγής για το προϊόν αυτό $3\beta^2$ εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ και κέρδος 500000 ευρώ.

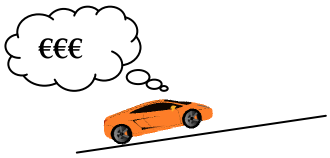
Α. Να θεωρήσετε την συνάρτηση $f(x)=x^3+2x$.Να αποδείξετε ότι:

i)η f είναι περιττή.

ii)η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii)η f είναι 1-1.

iv) $f(\alpha-1)+f(\beta-1)=0$



Β.Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα συνολικά από τα μοντέλα Α και Β πουλάει η αυτοκινητοβιομηχανία και πόσα είναι τα συνολικά κέρδη.

Λύση

Α.i) $D_f=\mathbb{R}$ και $f(-x)=(-x)^3+2(-x)=-(x^3+2x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η f είναι περιττή.

ii)Είναι $f'(x)=3x^2+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in\mathbb{R}$.

iii)Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1.

iv)Το κέρδος που προκύπτει ,αν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος, από υπόθεση ισχύει:

$$\alpha^3+5\alpha-3\alpha^2=1 \quad (1)$$
$$\beta^3+5\beta-3\beta^2=5 \quad (2)$$

Άρα:

$f(\alpha-1)+f(\beta-1)=(\alpha-1)^3+2(\alpha-1)+(\beta-1)^3+2(\beta-1)=..=(\alpha^3+5\alpha-3\alpha^2-3)+(\beta^3+5\beta-3\beta^2-3)=$
$=(1-3)+(5-3)=0$

Β. θα υπολογίσουμε τον αριθμό $\alpha+\beta$.Είναι:

$f(\alpha-1)+f(\beta-1)=0\Leftrightarrow f(\alpha-1)=-f(\beta-1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(\alpha-1)=f(1-\beta)\Leftrightarrow \alpha-1=1-\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=2$

Άρα , η εταιρεία πούλησε 2 εκατοντάδες συνολικά ,200 αυτοκίνητα.

36.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποίες ισχύει:

- $\int_0^1 xf(x)dx+3x=f(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $g(x)-2016=\frac{1}{3}xg'(x)-\frac{2016}{L}$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(2)**
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g'(\kappa)x^3+x^2+1974}{x^2+x+2016}=+\infty$ **για κάθε** $\kappa\in\mathbb{R}^*$ **(3)**
- $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_0^x f(t)e^t dt$ **(4)**

i)Να δείξετε ότι $f(x)=3x+2$ **,** $x\in\mathbb{R}$

ii)Να δείξετε ότι $g'(x)>0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}^*$**.**

iii)Να δείξετε ότι $L=1$**.**

iv)Να δείξετε ότι $g'(0)=g(0)=0$**.**

v)Να μελετήσετε την g′ ως προς την μονοτονία.

vi)Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

vii)Να δείξετε ότι η g′′ είναι συνεχής στο $x_0=0$**.**

Λύση

i)Έχουμε ότι $\int_0^1 xf(x)dx=c$, c σταθερός πραγματικός αριθμός η σχέση (1) παίρνει την μορφή: $\int_0^1 xf(x)dx+3x=f(x)\Leftrightarrow c+3x=f(x)\Leftrightarrow f(x)=c+3x$

Έτσι

$$\int_0^1 xf(x)dx=c\Leftrightarrow\int_0^1(x(c+3x))dx=c\Leftrightarrow\left[\frac{cx^2}{2}+x^3\right]_0^1=c\Leftrightarrow\frac{c}{2}+1=c\Leftrightarrow c=2$$

Άρα $f(x)=3x+2$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Ισχύει για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g'(\kappa)x^3+x^2+1974}{x^2+x+2016}=+\infty$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

• Αν υπάρχει $\kappa\in\mathbb{R}^*$ τέτοιο ώστε $g'(\kappa)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1974}{x^2+x+2016}=1$ άτοπο.

Άρα $g'(\kappa)\neq0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}^*$, η g συνεχής ως παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ οπότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά .

• Αν $g'(\kappa)<0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}^*$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(\kappa)x^3+x^2+1974}{x^2+x+2016}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(\kappa)x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}g'(\kappa)x=g'(\kappa)\lim_{x\to+\infty}x=g'(\kappa)\cdot(+\infty)\overset{g'(\kappa)<0}{=}-\infty \text{ άτοπο}$$

Άρα τελικά $g'(\kappa)>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}^*$ ή $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

iii)

$$\int_0^x f(t)e^t dt=\int_0^x(3t+2)e^t dt=\int_0^x(3t+2)\left(e^t\right)'dt=\left[(3t+2)e^t\right]_0^x-\int_0^x(3t+2)'e^t dt=$$

$$=\left[(3t+2)e^t\right]_0^x-\int_0^x 3e^t dt=\left[(3t+2)e^t\right]_0^x-\left[3e^t\right]_0^x=(3x+2)e^x-3e^x-(3\cdot0+2)e^0+3e^0=$$

$$=(3x+2-3)e^x-2+3=(3x-1)e^x+1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left((3x-1)e^x\right) \overset{(-\infty)\cdot 0}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{e^{-x}}\right) \underset{D.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{-e^{-x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-3e^x\right) = 0$$

άρα $L = \lim_{x\to-\infty}\int_0^x f(t)e^t dt = \lim_{x\to-\infty}\left[(3x-1)e^x + 1\right] = 0 + 1 = 1$

iv) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$g(x) - 2016 = \frac{1}{3}xg'(x) + \frac{2016}{L} \overset{L=1}{\Leftrightarrow} g(x) - 2016 = \frac{1}{3}xg'(x) + 2016 \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{3}xg'(x) \quad (5)$$

Για $x = 0$ η (5) : $g(0) = \frac{1}{3}\cdot 0 \cdot g'(0) = 0$

Από την (5) λαμβάνουμε:

$$g(x) = \frac{1}{3}xg'(x) \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} g'(x) = \frac{3g(x)}{x}$$

Άρα $\lim_{x\to 0} g'(x) = 3\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$ (6)

Η g′ είναι συνεχής εφόσον είναι παραγωγίσιμη. Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$$

Επομένως η σχέση (6) γράφεται: $g'(0) = 3g'(0) \Leftrightarrow g'(0) = 0$

v) Παραγωγίζουμε την σχέση (5) και λαμβάνουμε :

$$g'(x) = \frac{1}{3}g'(x) + \frac{1}{3}xg''(x) \Leftrightarrow 3g'(x) = g'(x) + xg''(x) \Leftrightarrow 2g'(x) = xg''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Όμως από το ερώτημα ii)

$g'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$

Άρα

$g''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

$g''(x) < 0$ για κάθε $x < 0$

Οπότε η g′ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και η g′ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

vi)Από την μονοτονία της g′ συμπεραίνουμε ότι g είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Άρα η Cg έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το (0,0).

vii)Η συνάρτηση g′ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$. Άρα, από το θεώρημα Fermat ισχύει η σχέση $g''(0) = 0$. Επίσης,

$$\lim_{x\to 0} g''(x) = \lim_{x\to 0} 2\frac{g'(x)}{x} = 0$$

37.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+\kappa x e^x-3e^2$, κ σταθερός πραγματικός αριθμός και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $g'(1)=1$
- $1+\eta\mu 2x\le g(x)\le e^{2x}$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις g και gog είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ και μάλιστα ισχύει $(gog)'(0)=g'(0)$.

ii)Να βρείτε το όριο $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(\eta\mu x)-1}{x}$

iii)Αν L ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να δείξετε ότι $\kappa=1$.

iv) Να δείξετε ότι ο αριθμός L είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$.

v)Σημείο $A(x,0)$ κινείται στον θετικό ημιάξονα Ox έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2\ cm/sec$. Αν $E(t)$ είναι το εμβαδό του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(x,e^x)$ να βρείτε την χρονική στιγμή t_0, που το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ μεταβάλλεται με ρυθμό $3e^2\ cm^2/sec$.

Λύση

i)Για $x=0: 1+\eta\mu(2\cdot 0)\le g(0)\le e^{2\cdot 0}\Leftrightarrow 1\le g(0)\le 1$ άρα $g(0)=1$

Για $x>0$

$$\frac{1+\eta\mu 2x}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le\frac{e^{2x}}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le\frac{e^{2x}}{x}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{g(x)}{x}-\frac{1}{x}\le\frac{e^{2x}}{x}-\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{g(x)-1}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{x}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\le\frac{e^{2x}-1}{x}$$

Αλλά

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu 2x}{x}=\lim_{x\to0^+}2\frac{\eta\mu 2x}{2x}=2\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu 2x}{2x}=2\cdot1=2$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1}{x}\underset{D,H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{2x}-1)'}{x'}=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{2x}}{1}=2$$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=2$

Ανάλογα για $x>0$ προκύπτει: $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=2$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=2\Rightarrow g'(0)=2$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη 0 και η g είναι παραγωγίσιμη g(0)=1 οπότε η gog είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει:

$(gog)'(0)=g'(g(0))\cdot g'(0)=g'(1)\cdot g'(0)=1\cdot2=2=g'(0)$ (**)

ii) Θέτουμε $h(x)=\eta\mu x\Rightarrow h'(x)=\sigma\upsilon\nu x, h'(0)=1$ όπου

$$L=\lim_{x\to0}\frac{g(\eta\mu x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(\eta\mu x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(h(x))-g(h(0))}{x-0}=$$

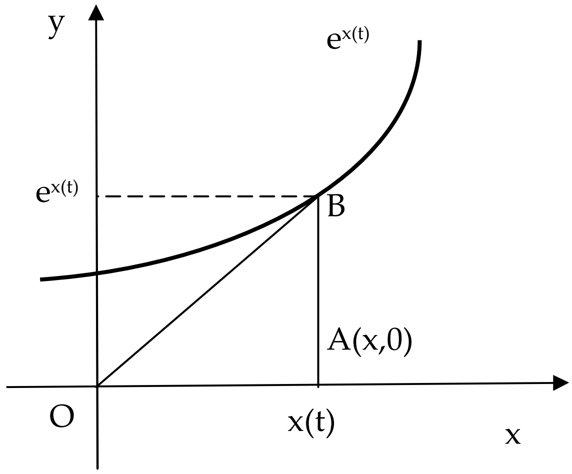
$$=\lim_{x\to0}\frac{(goh)(x)-(goh)(0)}{x-0}=(goh)'(0)=g'(h(0))h'(0)=g'(0)h'(0)=2\cdot1=2$$

iii) $f(2)=0\Leftrightarrow e^2+2\kappa e^2-3e^2=0\Leftrightarrow 2\kappa e^2=2e^2\Leftrightarrow\kappa=1$

iv)Η εξίσωση είναι $f(x)=0\Leftrightarrow e^x+xe^x-3e^2=0$ λύση της εξίσωσης είναι $x=2$. Έστω ότι υπάρχει μια άλλη ρίζα στο $(0,+\infty)$ την x_2. Αν $x_2>2$ τότε στο διάστημα $[2,x_2]$ η f ικανοποίει τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(2,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Αλλά

$f'(x)=\left(e^x+xe^x-3e^2\right)'=2e^x+xe^x>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$. Άτοπο.

Ανάλογα προκύπτει άτοπο αν $x_2<2$. Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.



v)το εμβαδό του τριγώνου είναι:

$E(t)=\frac{1}{2}(OA)(AB)=\frac{1}{2}x(t)\cdot e^{x(t)}$ (1)

από υπόθεση $x'(t)=2\,cm/sec$. Από την (1) :

$E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)\cdot e^{x(t)}+\frac{1}{2}x'(t)\cdot x(t)\cdot e^{x(t)}$ (2)

Αλλά $x'(t)=2=(2t)'$ οπότε $x(t)=2t+c$. Για $t=0$

$\begin{cases}x(0)=0\\ x(0)=2\cdot 0+c\end{cases}$ οπότε $c=0$, άρα $x'(t)=2t$ και

από (2) :

$E'(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{2t}+\frac{1}{2}2t\cdot e^{2t}2\Leftrightarrow E'(t)=e^{2t}+2te^{2t}$ (3)

Όμως από υπόθεση $E'(t_0)=3e^2\Leftrightarrow e^{2t_0}+2t_0e^{2t_0}=3e^2\Leftrightarrow e^{2t_0}+2t_0e^{2t_0}-3e^2=0\overset{(i)}{\Leftrightarrow}f(2t_0)=0$ εξίσωση που από το ερώτημα (ι) έχει μοναδική ρίζα το 2 στο $(0,+\infty)$ άρα $2t_0=2\Leftrightarrow t_0=1\,sec$

38.Δινεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει

(1) $f(f(x))=xf(x)$ **για κάθε** $x\in[0,+\infty)$

Η Cf διέρχεται από τα σημεία A(2,6),B(3,2).

i)Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii)Να λύσετε την εξίσωση

$$f(f(x^2+x)-f(2)+f^{-1}(6))=3+f^{-1}(2)$$

iii)Να δείξετε ότι η Cf διέρχεται από το σημείο A(1,1).

iv)Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την διχοτόμο του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου.

v)Δίνεται η 1-1 παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την όποια για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g'(g(x))=1$, $g(0)=0$ να βρείτε τον τύπο της g.

vi)Αν επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε:

α) η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

β) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(666)x^3+2016x^2\right)$$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)+1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$

δ) Να δείξετε $1-\frac{1}{e}<\int_1^e f(x)dx<e-1$

Λύση

i)Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty):f(x_1)=f(x_2)\overset{f\ \text{συναρτηση}}{\Rightarrow}f(f(x_1))=f(f(x_2))\overset{(1)}{\Rightarrow}x_1f(x_1)=x_2f(x_2)\overset{f(x_1)=f(x_2)}{\Rightarrow}x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

ii)Η f ως 1-1 αντιστρέφεται και επειδή $A(2,6),B(3,2)\in C_f$ άρα προκύπτουν οι ισότητες

$f(2)=6$, $f^{-1}(6)=2$

$f(3)=2$, $f^{-1}(2)=3$

Η ζητούμενη εξίσωση :

$f(f(x^2+x)-f(2)+f^{-1}(6))=3+f^{-1}(2) \underset{f^{-1}(6)=2}{\overset{f(2)=6}{\Leftrightarrow}} f(f(x^2+x)-6+2)=3+3 \Leftrightarrow f(f(x^2+x)-6+2)=6 \overset{f(2)=6}{\Leftrightarrow} f(f(x^2+x)-6+2)=f(2)$

$\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x^2+x)-6+2=2 \Leftrightarrow f(x^2+x)=6 \Leftrightarrow f(x^2+x)=f(2) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x^2+x=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-2$.

iii)Η (1) ισχύει για κάθε $x\in[0,+\infty)$ άρα θα ισχύει και για $x=1$ τότε

$f(f(1))=f(1) \overset{f\ 1-1}{\Rightarrow} f(1)=1$ άρα η Cf διέρχεται από το σημείο Α(1,1).

iv)Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=x$,ο αριθμός 1 είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωση και επειδή η f είναι 1-1 είναι μοναδική.

v)Επειδή $g'(g(x))=1$ είναι $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$g'(g(x))=1 \Leftrightarrow g'(g(x))g'(x)=g'(x) \Leftrightarrow (g(g(x)))'=(g(x))' \Leftrightarrow g(g(x))=g(x)+c$

Για $x=0: g(g(0))=g(0)+c \Leftrightarrow c=0$

Άρα $g(g(x))=g(x) \overset{g\ 1-1}{\Rightarrow} g(x)=x$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις.

vi) α) Έστω $x_0\in(0,+\infty)$.

Για $x<x_0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)>f(x_0) \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(f(x))<f(f(x_0)) \Leftrightarrow xf(x)<x_0f(x_0) \Leftrightarrow f(x)<\frac{x_0f(x_0)}{x}$ (1)

Αλλά , $f(x)>f(x_0)$ (2) Από (1),(2) : $f(x_0)<f(x)<\frac{x_0f(x_0)}{x}$ για κάθε $x<x_0$

Από το κριτήριο της παρεμβολής έπεται ότι: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

Ομοίως αν $x>x_0$ προκύπτει: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

Οπότε, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in(0,+\infty)$, άρα f συνεχής στο $(0,+\infty)$

β) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.Επειδή $f(1)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα και $f(666)>0$ οπότε το ζητούμενο όριο

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(666)x^3+2016x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(666)x^3\right)\overset{f(666)>0}{=}-\infty$$

γ) $f(x)=g(x)+1 \Leftrightarrow f(x)=x+1$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-x-1, x\in[0,1]$.Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ και:

- $h(0)=f(0)-1>0$, διότι $0<1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(0)>f(1)=1$
- $h(1)=f(1)-2=-1<0$,

Άρα, από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1): h(\xi)=0$

Από την μονοτονία της h θα εξασφαλίσουμε την μοναδικότητα της ρίζας .

Αν $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)$

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow -x_1-1>-x_2-1$ προσθέτουμε κατά μέλη

$f(x_1)-x_1-1>f(x_2)-x_2-1 \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$

Οπότε η ρίζα ξ της εξίσωσης είναι μοναδική .

δ) Για $1<x<e \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(1)>f(x)>f(e) \Leftrightarrow 1>f(x)>f(e)$

Εφόσον $1>f(e) \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(1)<f(f(e)) \Leftrightarrow 1<f(f(e)) \Leftrightarrow 1<ef(e) \Leftrightarrow f(e)>\frac{1}{e}$

Δηλαδή $\frac{1}{e}<f(x)<1$ άρα $\int_1^e \frac{1}{e}dx<\int_1^e f(x)dx<\int_1^e 1dx \Leftrightarrow \frac{e-1}{e}<\int_1^e f(x)dx<e-1$

39.Δινεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο όπου g'' γνησίως αύξουσα για τις όποιες ισχύουν:

- $10f(x) > 11x - xf'(x)$ **για κάθε** $x \neq 0$
- $g(1) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\eta\mu\dfrac{3}{x+3}\right]$
- $g'(1) = \dfrac{3e}{e-1}$
- $g(0)$:**η κλίση μιας άρτιας και παραγωγίσιμης συνάρτησης στο σημείο της** $x_0 = 0$
- $\int_0^1 (g''(x) - g(x))e^x dx = 0$

i)Να δείξετε ότι $g(1) = 3$ **,** $g(0) = 0$ **.**

ii)Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $h(x) = x^{10}f(x) - x^{11}$ **.**

iii)Να δείξετε ότι $f(x) \geq x$ **για κάθε** $x \in \mathbb{R}$ **.**

iv)Αν επιπλέον $f(x) > 0, f(1) = 1$ **και** $10f(x) + xf'(x) = 0$ **για κάθε** $x > 0$ **,να βρείτε το διάστημα Δ στο οποίο ισχύει** $f(x) \geq x$ **.**

v)Να αποδείξετε ότι γραφική παράσταση της g έχει το πολύ ένα σημείο καμπής στο Δ.

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\eta\mu\dfrac{3}{x+3}\right] \overset{u=\frac{3}{x+3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{u}-3}{\underset{x\to+\infty\ u\to0}{=}} \lim\limits_{u\to0}\left[(\dfrac{3}{u}-3+1)\eta\mu u\right] =$

$= \lim\limits_{u\to0}\left[(\dfrac{3}{u}-2)\eta\mu u\right] = \lim\limits_{u\to0}\left[3\dfrac{\eta\mu u}{u} - 2\eta\mu u\right] = 3\cdot1 - 2\cdot0 = 3$

Άρα $g(1) = 3$.

Αν φ μια άρτια παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα συμμετρικό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in A$.Ισχύει για κάθε $x \in A : \phi(-x) = \phi(x)$

παραγωγίζουμε : $\phi'(-x)(-x)' = \phi'(x) \Leftrightarrow -\phi'(-x) = \phi'(x)$ για κάθε $x \in A$

Για $x = 0$: $-\phi'(0) = \phi'(0) \Leftrightarrow \phi'(0) = 0$.Άρα $g(0) = 0$.

ii)η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$h'(x) = \left(x^{10}f(x) - x^{11}\right)' = 10x^9 f(x) + x^{10}f'(x) - 11x^{10} = x^9(10f(x) + xf'(x) - 11x)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^9(10f(x) + xf'(x) - 11x) = 0 \overset{10f(x)>11x-xf'(x)\Leftrightarrow10f(x)+xf'(x)-11x>0}{\Leftrightarrow} x^9 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Έχουμε:

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $h(0) = 0^{10}f(0) - 0^{11} = 0$

iii) Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $h(0) = 0$ άρα

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^{10}f(x) - x^{11} \geq 0 \Leftrightarrow x^{10}(f(x) - x) \geq 0 \overset{x^{10}\geq0}{\Rightarrow} f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x$

iv)Για κάθε $x > 0$

$10f(x)+xf'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{10}{x} \Leftrightarrow (\ln f(x))'=(-10\ln x)' \Leftrightarrow \ln f(x)=-10\ln x+c$

Για $x=1$ $\ln f(1)=-10\ln 1+c \Leftrightarrow \ln 1=c \Leftrightarrow c=0$

Άρα, τελικά $\ln f(x)=-10\ln x \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^{10}}$

Για κάθε $x>0$: $f(x)\geq x \Leftrightarrow \frac{1}{x^{10}}\geq x \Leftrightarrow 1\geq x^{11} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x\leq 1$ τελικά $\Delta=(0,1]$

v) $\int_0^1 (g''(x)-g(x))e^x dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 (g''(x)e^x-g(x)e^x)dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 g''(x)e^x dx-\int_0^1 g(x)e^x dx=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[g'(x)e^x\right]_0^1-\int_0^1 g'(x)e^x dx-\int_0^1 g(x)e^x dx=0 \Leftrightarrow \left[g'(x)e^x\right]_0^1-(\left[g(x)e^x\right]_0^1-\int_0^1 g(x)e^x dx)-\int_0^1 g(x)e^x dx=0 \Leftrightarrow$

$\left[g'(x)e^x\right]_0^1-\left[g(x)e^x\right]_0^1+\int_0^1 g(x)e^x dx)-\int_0^1 g(x)e^x dx=0 \Leftrightarrow \left[g'(x)e^x\right]_0^1-\left[g(x)e^x\right]_0^1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(1)e-g'(0)e^0-(g(1)e^1-g(0)e^0)=0$

$\Leftrightarrow g'(1)e-g'(0)e^0-(g(1)e^1-g(0)e^0)=0 \overset{g'(1)=\frac{3e}{e-1},g(1)=3,g(0)=0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \frac{3e}{e-1}e-g'(0)-(3e^1-0e^0)=0 \Leftrightarrow \frac{3e^2-3e(e-1)}{e-1}=g'(0)$

$\Leftrightarrow \frac{3e}{e-1}=g'(0)$

Δηλαδή $g'(1)=\frac{3e}{e-1}=g'(0)$,η g' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi)=0$ λόγω της μονοτονίας της g'' το ξ θα είναι και η μοναδική ρίζα της $g''(x)=0$ άρα προκύπτει το ζητούμενο.

40.(ΣΧ.) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και F μια αρχική της συνάρτηση με τις ιδιότητες:

- $f(x)e^{F(x)}=2xe^{x^2+1}$**,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $F(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha^x+\beta^x-2}{x}$ **όπου α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε** $\alpha\cdot\beta=e$

i)Να δείξετε ότι $F(0)=1$

ii)Να αποδείξετε ότι $F(x)=x^2+1$**,** $x\in\mathbb{R}$ **.**

iii)Να βρείτε τον τύπο της f καθώς και τα κοινά σημεία των Cf,CF.

iv)Να δείξετε ότι η Cf εφάπτεται της CF.

v)Αν είναι γνωστό ότι το χωρίο που περικλείεται από την CF και την ευθεία $y=5$ **χωρίζεται από την ευθεία** $y=\lambda^2+1$**,** $\lambda>0$ **σε δυο ισεμβαδικά χωρία να βρείτε την τιμή του λ.**

Λύση

i) $F(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha^x+\beta^x-2}{x}\underset{\text{D.Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\alpha^x+\beta^x-2)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta}{1}=\ln\alpha+\ln\beta=\ln(\alpha\beta)\overset{\alpha\beta=e}{=}\ln e=1$

ii) $f(x)e^{F(x)}=2xe^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(e^{F(x)}\right)'=\left(e^{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow e^{F(x)}=e^{x^2+1}+c$, c σταθερός πραγματικός αριθμός. (1)

Αλλά, $F(0)=1$ οπότε η (1) για $x=0$: $e^{F(0)}=e^{0^2+1}+c \Leftrightarrow e=e+c \Leftrightarrow c=0$ άρα

$e^{F(x)}=e^{x^2+1} \overset{e^x\ 1-1}{\Rightarrow} F(x)=x^2+1, x\in\mathbb{R}$

iii) $F'(x)=\left(x^2+1\right)'=2x$, $F(x)=f(x) \Leftrightarrow x^2+1=2x \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ οπότε οι Cf,CF έχουν ένα κοινό σημείο το A(1,2).

iv)Παρατηρούμε ότι $f(1)=2=F(1)$ και $f'(1)=2=F'(1)$ άρα οι Cf,CF έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους το Α(1,2).

v)Οι τετμημένες των σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+1=5$,δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-2, x_2=2$.Οι τετμημένες των Γ και Δ είναι οι ρίζες της εξισώσεις $x^2+1=\lambda^2+1$,δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-\lambda, x_2=\lambda$.

Το εμβαδό Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από την ευθεία $y=5$ και την γραφική παράστασης της $y=x^2+1$ είναι:

$$E=\int_{-2}^{2}(5-x^2-1)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=(-\frac{8}{3}+8)-(\frac{8}{3}-8)=\frac{32}{3}\ \text{τ.μ}$$

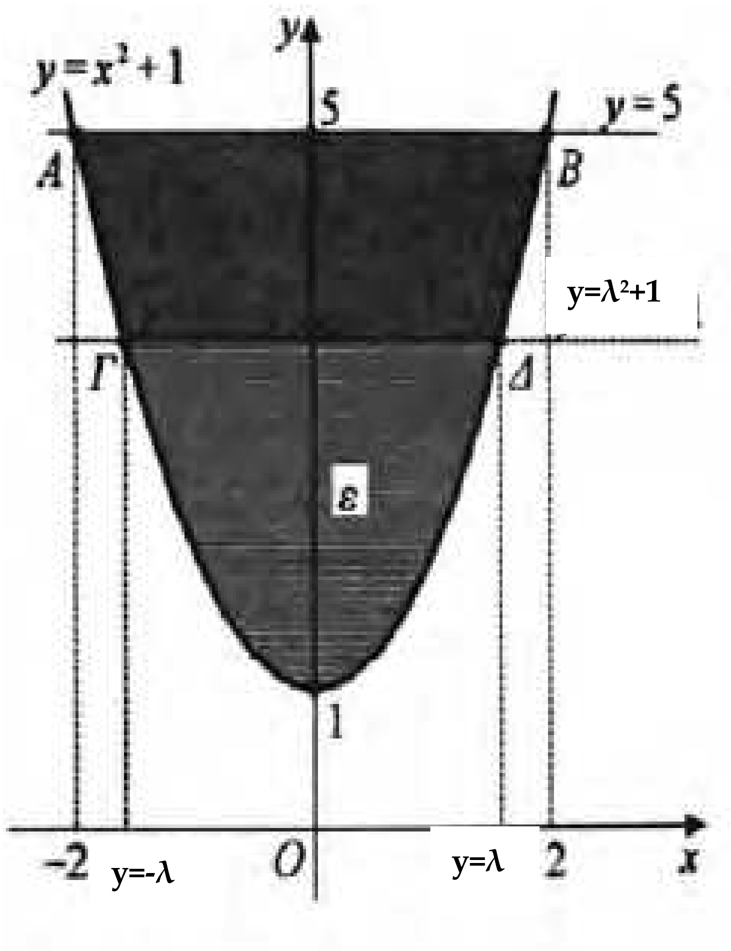
Το εμβαδό ε του χωρίου περικλείεται από την ευθεία $y=\lambda^2+1$ και την γραφική παράσταση της $y=x^2+1$ είναι:

$$\varepsilon=\int_{-\lambda}^{\lambda}(\lambda^2+1-x^2-1)dx=\int_{-\lambda}^{\lambda}(\lambda^2-x^2)dx=\lambda^2\int_{-\lambda}^{\lambda}1dx-\int_{-\lambda}^{\lambda}x^2dx=\lambda^2(\lambda+\lambda)-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\lambda}^{\lambda}=$$

$$=\lambda^2(\lambda+\lambda)-(\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^3}{3})=\frac{4}{3}\lambda^3\ \text{τ.μ}$$

Το Ω χωρίζεται από την $y=\lambda^2+1$ σε δυο ισεμβαδικά χώρια ,αν και μόνο αν

$$\varepsilon=\frac{E}{2}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\lambda^3=\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda=\sqrt[3]{4}$$



41.(ΣΧ.) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to (0,+\infty)$ **και συνεχής συνάρτηση** g **ορισμένη στο** $\mathbb{R}$**.Είναι γνωστό ότι:**

- $xf'(x)+2f(x)=0$ **, για κάθε** $x\in\mathbb{R}^*$
- $f(1)=f(-1)=1$ **,** $g(4)>f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- $g(1)<f\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$ **,** $g(4)>f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

i) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x^2}, x\neq 0$**.**

ii)Να βρείτε το εμβαδό Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f του άξονα x'x και τις ευθείες $x=1, x=\lambda, \lambda>0$**.**

iii)Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ αν ισχύει $E(\lambda)\leq\frac{\lambda(5-\lambda)-5}{\lambda}$**.**

iv)Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=\frac{25-2\lambda x}{3}$ **έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.**

v)Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=(MA)+MB)$ **έχει ελάχιστη τιμή το 5 ,όπου A,B,M τρία σημεία με** $A(4,3), B(1,7), M(x,g(x))$, $x\in\mathbb{R}$ **.**

Λύση

i)Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*: xf'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow xf'(x)=-2f(x) \underset{f(x)>0}{\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}} \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (1)

Άρα η (1) ισχύει σε ένωση διαστημάτων και είναι συνεχής σε καθένα από αυτά ως παραγωγίσιμη οπότε:

$$x\in(0,+\infty): \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x} \Rightarrow (\ln f(x))'=(-2\ln x)' \Rightarrow \ln f(x)=-2\ln x+c_1 \quad (2)$$

$$x\in(-\infty,0): \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x} \Rightarrow (\ln f(x))'=(-2\ln(-x))' \Rightarrow \ln f(x)=-2\ln(-x)+c_2 \quad (3)$$

Αλλά

$f(1)=1$ οπότε η (2): $\ln f(1)=-2\ln 1+c_1 \Leftrightarrow \ln 1=-2\ln 1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

$f(-1)=1$ οπότε η (2): $\ln f(-1)=-2\ln 1+c_2 \Leftrightarrow \ln 1=-2\ln 1+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$

Δηλαδή

$$x\in(0,+\infty): \ln f(x)=-2\ln x \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln x^{-2} \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$x\in(-\infty,0): \ln f(x)=-2\ln(-x) \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln(-x)^{-2} \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln x^{-2} \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}$$

Τελικά: $f(x)=\frac{1}{x^2}, x\neq 0$

ii) Το εμβαδό Ε(λ) του ζητούμενου χωρίου

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda\left|\frac{1}{x^2}\right|dx=\int_1^\lambda\frac{1}{x^2}dx=-\int_1^\lambda-\frac{1}{x^2}dx=-\int_1^\lambda\left(\frac{1}{x}\right)'dx=-\left[\frac{1}{x}\right]_1^\lambda=-(\frac{1}{\lambda}-1)=1-\frac{1}{\lambda}$$

iii)

$$E(\lambda)\leq\frac{\lambda(5-\lambda)-5}{\lambda}\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}1-\frac{1}{\lambda}\leq\frac{5\lambda-\lambda^2-5}{\lambda}\Leftrightarrow\frac{\lambda-1}{\lambda}\leq\frac{5\lambda-\lambda^2-5}{\lambda}\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\lambda-1\leq5\lambda-\lambda^2-5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5\lambda+\lambda^2+5+\lambda-1\leq0 \Leftrightarrow -4\lambda+\lambda^2+4\leq0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2\leq0$$

άρα $(\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$

iv) Από υπόθεση

$g(1) < f\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow g(1) < 7$

$g(4) > f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow g(4) > 3$.Για $\lambda = 2$: $g(x) = \frac{25-2\lambda x}{3} = \frac{25-4x}{3}$

θεωρούμε την συνάρτηση $\phi(x) = g(x) - \frac{25-4x}{3}$ είναι συνεχής στο $[1,4]$

$$\phi(1) = g(1) - \frac{25-4}{3} = g(1) - 7 < 0$$

$$\phi(4) = g(4) - \frac{25-16}{3} = g(4) - 3 > 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,4)$ έτσι ώστε

$\phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) - \frac{25-4x_0}{3} = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = \frac{25-4x_0}{3}$ (*)

v) Η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = (MA) + MB) = \sqrt{(x-4)^2 + (g(x)-3)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (g(x)-7)^2}$ δεν γνωρίζουμε αν είναι παραγωγίσιμη (από υπόθεση g συνεχής) άρα δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε την πεπατημένη για την εύρεση ακρότατων.

Από τριγωνική ανισότητα ισχύει στο τρίγωνο MAB

$(MA) + MB) \geq (AB) = \sqrt{(1-4)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{(3^2 + 4^2} = 5$,άρα ισχύει

$$h(x) \geq 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 5$

Παρατηρούμε ότι αν βρούμε την τιμή της h στο $x_0 \in (1,4)$ από το ερώτημα (iv) λαμβάνουμε:

$$h(x_0) = \sqrt{(x_0-4)^2 + (g(x_0)-3)^2} + \sqrt{(x_0-1)^2 + (g(x_0)-7)^2} \overset{(*)}{=}$$
$$= \sqrt{(x_0-4)^2 + (\frac{25-4x_0}{3} - 3)^2} + \sqrt{(x_0-1)^2 + (\frac{25-4x_0}{3} - 7)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_0-4)^2 + (\frac{25-4x_0-9}{3})^2} + \sqrt{(x_0-1)^2 + (\frac{25-4x_0-21}{3})^2} =$$
$$= \sqrt{(x_0-4)^2 + (\frac{16-4x_0}{3})^2} + \sqrt{(x_0-1)^2 + (\frac{4-4x_0}{3})^2} =$$
$$= \sqrt{(x_0-4)^2 + \frac{16}{9}(4-x_0)^2} + \sqrt{(x_0-1)^2 + \frac{16}{9}(1-x_0)^2}$$
$$= \sqrt{(x_0-4)^2(\frac{16}{9}+1)} + \sqrt{(x_0-1)^2(\frac{16}{9}+1)} =$$
$$= \sqrt{(x_0-4)^2\frac{25}{9}} + \sqrt{(x_0-1)^2\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{(x_0-4)^2} + \frac{5}{3}\sqrt{(x_0-1)^2} =$$
$$= \frac{5}{3}(|x_0-4| + |x_0-1|) \overset{1<x_0<4}{=} \frac{5}{3}((4-x_0) + (x_0-1)) = \frac{5}{3} \cdot 3 = 5$$

Άρα $h(x) \geq h(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν έφτασες μέχρι εδώ κάνε ένα διάλλειμα με ένα τραγουδάκι !!

https://www.youtube.com/watch?v=gUTyhmACoH0

42.Α.Εστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.Να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

Β.Η συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[0,2]$ και είναι γνωστό ότι:

- $3\int_0^2 (f'(x))^2dx-12\int_2^0 f(x)dx=64$ **(1)**

- $\lim_{x\to 2}\frac{(f(x))^5+16(f(x))^3-2^{11}}{x-2}\in\mathbb{R}$ **(2)**

i)Να εξετάσετε τη συνάρτηση $g(x)=x^5+16x^3-2^{11}, x\in\mathbb{R}$ ως προς την μονοτονία και να υπολογίσετε την τιμή της στο 4.
ii)Να δείξετε ότι $f(2)=4$.
iii)Να δείξετε ότι $f(x)=x^2, x\in[0,2]$.
iv)(Bonus ερώτημα ,θέλετε το κάνετε, θέλετε δεν το κάνετε..)
Μια συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ και η εφαπτομένη της Ch στο σημείο της A(-1,h(-1)) είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: y=-f(1)x+2016$ ενώ η εφαπτομένη της Ch στο σημείο της B(3,h(3) είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1: y=-\frac{f(2)}{12}x+1974$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$.
(Υπόδειξη: Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε θεώρημα Bolzano .Γιατί;)

Λύση
Α.($\Rightarrow$)
Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και έστω ότι η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.Τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\ge 0$.Κατά συνέπεια $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, άτοπο ,εφόσον $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$.Οπότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

($\Leftarrow$)Αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε είναι προφανές ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$

Β.i) $g(x)=x^5+16x^3-2^{11}, x\in\mathbb{R}$
Είναι $g'(x)=\left(x^5+16x^3-2^{11}\right)'=5x^4+48x^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ την ισότητα να ισχύει στο $x=0$ αρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Είναι $g(4)=4^5+16\cdot 4^3-2^{11}=4^5+4^5-2^{11}=4^5+4^5-2^{11}=2^{10}+2^{10}-2^{11}=2\cdot 2^{10}-2^{11}=2^{11}-2^{11}=0$

ii)Θέτουμε $h(x)=\frac{(f(x))^5+16(f(x))^3-2^{11}}{x-2}\Leftrightarrow h(x)(x-2)=(f(x))^5+16(f(x))^3-2^{11}$
Λαμβάνουμε όρια και στα δυο μέλη στο 2 .Γνωρίζουμε ότι τα όρια υπάρχουν λογω της παραγωγισιμότητας άρα και της συνέχειας της f ($\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$)και της (2)
$\lim_{x\to 2}\left(h(x)(x-2)\right)=\lim_{x\to 2}\left((f(x))^5+16(f(x))^3-2^{11}\right)\Leftrightarrow 0=(f(2))^5+16(f(2))^3-2^{11}$ (3)
Από το ερώτημα (i) η (3) : $0=g(f(2))\Leftrightarrow g(4)=g(f(2))$ η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 οπότε $f(2)=4$

iii) $3\int_0^2 (f'(x))^2dx - 12\int_2^0 f(x)dx = 64 \Leftrightarrow 3\int_0^2 (f'(x))^2dx + 12\int_0^2 f(x)dx = 64 \Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2dx + 4\int_0^2 f(x)dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2dx + 4\int_0^2 (x)'f(x)dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2dx + 4\left(\left[xf(x)\right]_0^2 - \int_0^2 xf'(x)dx\right) = \frac{64}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2dx + 4\left(2f(2) - 0f(0) - \int_0^2 xf'(x)dx\right) = \frac{64}{3} \overset{f(2)=4}{\Leftrightarrow} \int_0^2 (f'(x))^2dx + 4\left(8 - \int_0^2 xf'(x)dx\right) = \frac{64}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2dx + 32 - 4\int_0^2 xf'(x)dx = \frac{64}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2dx + 32 - \frac{64}{3} - 4\int_0^2 xf'(x)dx = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (f'(x))^2dx + \frac{32}{3} - 4\int_0^2 xf'(x)dx = 0 \underset{(*)}{\overset{(ii)}{\Leftrightarrow}}$

$\underset{(*)}{\overset{(ii)}{\Leftrightarrow}} \int_0^2 (f'(x))^2dx + \int_0^2 4x^2dx - 4\int_0^2 xf'(x)dx = 0 \Leftrightarrow$ (*) $\int_0^2 4x^2dx = \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}$

$\Leftrightarrow \int_0^2 \left((f'(x))^2 - 4xf'(x) + 4x^2\right)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(f'(x) - 2x\right)^2dx = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x) = \left(f'(x) - 2x\right)^2$, ορισμένη στο $[0,2]$,συνεχή στο $[0,2]$ με $\Phi(x) \geq 0$,για κάθε $x \in [0,2]$οπότε από το ερώτημα Α προκύπτει
για κάθε $x \in [0,2]$
$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x) - 2x\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) = \left(x^2\right)' \Leftrightarrow f(x) = x^2 + c,$ (4)c σταθερός πραγματικός
Αλλά, $f(2) = 4$ οπότε με αντικατάσταση στην (4) προκύπτει $c = 0$,τελικά $f(x) = x^2, x \in [0,2]$.

iv) Η εφαπτομένη της Ch στο σημείο της A(-1,h(-1)) είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y = -f(1)x + 2016$ άρα $h'(-1) = -f(1) = -1 \Leftrightarrow h(-1) = -1$

Η εφαπτομένη της Ch στο σημείο της B(3,h(3)) κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y = -\frac{f(2)}{12}x + 1974$ άρα

$h'(3) \cdot \left(-\frac{f(2)}{12}\right) = -1 \Leftrightarrow h'(3)\left(-\frac{4}{12}\right) = -1 \Leftrightarrow h'(3)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow h'(3) = 3$

Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε θ.bolzano καθώς δεν γνωρίζουμε αν η h′ είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

Έτσι:

- $h'(-1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{h(x) - h(-1)}{x - (-1)} = -1 < 0$.Άρα: $\frac{h(x) - h(-1)}{x - (-1)} < 0$ για τιμές του x κοντά στο -1.

Επειδή $x > -1 \Leftrightarrow x - (-1) > 0$ ισχύει: $h(x) - h(-1) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(-1)$ (5)

- $h'(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 3 > 0$ Άρα: $\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} > 0$ για τιμές του x κοντά στο 1.

Επειδή $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$ ισχύει: $h(x) - h(1) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(1)$ (6)

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν εσωτερικά σημεία του x στο διάστημα $[-1,1]$ στα οποία η h λόγω (5),(6) παίρνει μικρότερες τιμές από τις τιμές της στα άκρα του διαστήματος. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-1,1]$ θα έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο ,με το ολικό ελάχιστο να σημειώνεται σε εσωτερικό σημείο ξ τότε $[-1,1]$.Επομένως, από το θεώρημα Fermat θα ισχύει: $h'(\xi) = 0$, $\xi \in (-1,1)$

43. (ΣΧ.) Α. Έστω δυο συναρτήσεις f,g συνεχείς το $\left[\alpha,\beta\right]$.

Να δείξετε ότι:

i)Αν $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\ge\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

ii)Αν M,m είναι η μέγιστη κι η ελάχιστη τιμή της f στο $\left[\alpha,\beta\right]$ τότε :

$$M(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le m(\beta-\alpha)$$

Β. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x>0$ και $g(x)=\ln(x+\dfrac{1}{f(x)}),x\in\mathbb{R}$

i)Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

ii)Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}f(t)dt$.

iii)Να δείξετε ότι $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Να δείξετε ότι $\left(g(\varepsilon\varphi x)\right)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

v)Έστω μια συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)\ne0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $h^{-1}(x)=\varepsilon\varphi x,x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ να βρείτε την παράγωγο της h.

Λύση

Α.i) Για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$:

$$f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge0\Rightarrow\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\ge0\Rightarrow\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx\ge0\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)dx\ge\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

ii) M,m είναι η μέγιστη κι η ελάχιστη τιμή της f στο $\left[\alpha,\beta\right]$ άρα

$$m\le f(x)\le M\overset{(i)}{\Rightarrow}\int_{\alpha}^{\beta}mdx\le\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le\int_{\alpha}^{\beta}Mdx\Leftrightarrow m\int_{\alpha}^{\beta}1dx\le\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le M\int_{\alpha}^{\beta}1dx\Leftrightarrow m(\beta-\alpha)\le\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le M(\beta-\alpha)$$

Β. i)Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=-\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}<0 \text{ για } x>0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

ii)Για $x>0$,και για κάθε

$$t\in\left[x,x+1\right]:x\le t\le x+1\Rightarrow f(x)\ge f(t)\ge f(x+1)\overset{(A)}{\Rightarrow}f(x)(x+1-x)\ge\int_{x}^{x+1}f(t)dt\ge f(x+1)(x+1-x)$$

$$\left.\begin{cases}f(x)\ge\int_{x}^{x+1}f(t)dt\ge f(x+1)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)=0\end{cases}\right.\overset{\kappa\rho\iota\tau\eta\rho\iota o\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\eta\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}f(t)dt=0$$

iii) Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$g(x)=\ln(x+\frac{1}{f(x)})=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),x\in\mathbb{R}$$

$$g'(x)=\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R}$$

iv) $$\left(g(\varepsilon\phi x)\right)'=\left(g'(\varepsilon\phi x)\right)\left(\varepsilon\phi x\right)'=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\phi^2 x+1}}\frac{1}{\sigma\upsilon^2\nu x}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\underset{\sigma\upsilon\nu x>0}{=}}\sigma\upsilon\nu x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

v) Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $h'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,η h ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε η h′ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ άρα είναι γνησίως μονότονη κατά συνέπεια και 1-1 .

$$h^{-1}(x)=\varepsilon\phi x\overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow}h\left(h^{-1}(x)\right)=h\left(\varepsilon\phi x\right)\Leftrightarrow x=h\left(\varepsilon\phi x\right)\Rightarrow x'=\left(h\left(\varepsilon\phi x\right)\right)'\overset{(iv)}{\Leftrightarrow}$$

$$1=h'\left(\varepsilon\phi x\right)\left(\varepsilon\phi x\right)'\Leftrightarrow 1=h'\left(\varepsilon\phi x\right)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Leftrightarrow 1=h'\left(\varepsilon\phi x\right)(\varepsilon\phi^2 x+1)\Leftrightarrow h'\left(\varepsilon\phi x\right)=\frac{1}{\varepsilon\phi^2 x+1}$$

Θέτουμε $u=\varepsilon\phi x$ άρα $h'\left(u\right)=\frac{1}{u^2+1}$ δηλαδή $h'\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1},x\in\mathbb{R}$

44.(ΣΧ.) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(0)=0$ **και** $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ **για κάθε** $x,y\in\mathbb{R}$

i)Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii)Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+2x-1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii)Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

iv)Να υπολογίσετε τα όρια

$$\kappa=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2016x^2}\quad,\ \lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{2016x^2+3f(x)}{1008x^2+|f(x)|}$$

v)☺ (Bonus ερώτημα)

Αν $h:[\kappa,\lambda]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $h(\kappa)=h(\lambda)$.Να δειχτεί ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in[\kappa,\lambda]$ τέτοιοι ώστε $|\alpha-\beta|=1$ και $h(\alpha)=h(\beta)$.

Λύση

i)Έχουμε $f(0)=0$ και $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Έστω τυχαίος $x_0\in\mathbb{R}$.Από (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$|f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0|\Leftrightarrow-|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq|x-x_0|\Leftrightarrow$

$f(x_0)-|x-x_0|\leq f(x)\leq f(x_0)+|x-x_0|$

Αλλά

$\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)-|x-x_0|\right)=f(x_0)$, $\lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+|x-x_0|\right)=f(x_0)$

Από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει:

$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Αν $x_1\neq x_2$ και $\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ των x_1,x_2 ,τότε

- f γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow\lambda>0$
- f γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow\lambda<0$

ii)Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)+2x-1,x\in\mathbb{R}$

Αν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ έχουμε

$$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)+2x_1-1-f(x_2)-2x_2+1}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)+2(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+\frac{2(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+2$$

Όμως από την σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|\overset{x_1\neq x_2}{\Leftrightarrow}\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}\leq 1\Leftrightarrow\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leq 1\Leftrightarrow-1\leq\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq 1\Leftrightarrow$$

$-1+2\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+2\le 1+2 \Leftrightarrow 1\le\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\le 3$ δηλαδή $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii)Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.Η (1) για $y=0$:

$$|f(x)-f(0)|\le|x-0| \Leftrightarrow |f(x)|\le|x| \Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x| \Leftrightarrow -|x|+2x-1\le f(x)+2x\le|x|+2x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|x|+2x-1\le f(x)+2x-1\le|x|+2x-1 \Leftrightarrow -|x|+2x-1\le g(x)\le|x|+2x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$: $-|0|+2\cdot 0-1\le g(0)\le|0|+2\cdot 0-1 \Leftrightarrow -1\le g(0)\le -1$ άρα $g(0)=-1<0$

Για $x=2$: $-|2|+2\cdot 2-1\le g(2)\le|2|+2\cdot 2-1 \Leftrightarrow 1\le g(2)\le 5$ άρα $g(2)>0$

Για την συνάρτηση g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,2]$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,2)$: $g(\xi)=0$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα το ξ είναι μοναδικό.

iv)Από ερώτημα iii) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-|x|\le f(x)\le|x|$ οπότε για $x\neq 0$

$$-|x|\le f(x)\le|x| \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} -\frac{|x|}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{|x|}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{|x|}{|x|^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{|x|}{|x|^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{2016}\le\frac{f(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{2016}\le\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{2016} \Leftrightarrow -\frac{1}{2016|x|}\le\frac{f(x)}{2016x^2}\le\frac{1}{2016|x|}$$

όμως $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2016|x|}\right)=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2016|x|}=0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής

- $\kappa=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2016x^2}=0$
- $\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{2016x^2+3f(x)}{1008x^2+|f(x)|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2016+3\frac{f(x)}{x^2}\right)}{x^2\left(1008+\frac{|f(x)|}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2016+3\frac{f(x)}{x^2}}{1008+\frac{|f(x)|}{x^2}}=\frac{2016}{1008}=2$

vi)Όταν $\kappa=0,\lambda=2$ $h:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $h(0)=h(2)$

Για να δείξουμε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in[0,2]$ τέτοιοι ώστε $|\alpha-\beta|=1$ ή

$$\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta+1\\ \alpha=\beta-1\end{cases} \text{ αντίστοιχα να ισχύει: } \begin{cases}h(\alpha)=h(\beta)\\ h(\alpha)=h(\beta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h(\beta+1)=h(\beta)\\ h(\beta-1)=h(\beta)\end{cases}$$

Δυο περιπτώσεις

- Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi(x)=h(x+1)-h(x)$ που είναι συνεχής στο $[0,2]$ άρα και στο $[0,1]$.Είναι ,

$$\left.\begin{aligned}\phi(0)=h(0+1)-h(0)=h(1)-h(0)\\ \phi(1)=h(1+1)-h(1)=h(2)-h(1)\end{aligned}\right\}\overset{h(0)=h(2)}{\Rightarrow}\phi(0)\cdot\phi(1)=\big(h(1)-h(2)\big)\big(h(2)-h(1)\big)=-\big(h(1)-h(2)\big)^2\le 0$$

Άρα υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιος ώστε $\phi(\xi)=0\Leftrightarrow h(\xi+1)-h(\xi)$ με $\xi,\xi+1\in[0,2]$ και $(\xi+1)-\xi=1$

Για $\alpha=\xi+1,\beta=\xi$ προκύπτει $h(\alpha)=h(\beta)$ και $\alpha-\beta=1$

- Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi_1(x)=h(x)-h(x-1)$ που είναι συνεχής στο $[0,2]$ άρα και στο $[1,2]$ Είναι

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(1)=h(1)-h(1-1)=h(1)-h(0)\\ \phi_1(2)=h(2)-h(2-1)=h(2)-h(1)\end{aligned}\right\}\overset{h(0)=h(2)}{\Rightarrow}\phi_1(0)\cdot\phi_1(1)=\big(h(1)-h(2)\big)\big(h(2)-h(1)\big)=-\big(h(1)-h(2)\big)^2\le 0$$

Άρα υπάρχει $\xi\in[1,2]$ τέτοιος ώστε $\phi_1(\xi)=0\Leftrightarrow h(\xi)-h(\xi-1)$ με $\xi,\xi-1\in[0,2]$ και $(\xi-1)-\xi=-1$

Για $\alpha=\xi-1,\beta=\xi$ προκύπτει $h(\alpha)=h(\beta)$ και $\alpha-\beta=-1$

45.Α.Δίνεται η συνάρτηση g **με** $g(x)=x\ln x$ **,** $x>0$ **.**
Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και το σύνολο τιμών.
Β. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\ , & x>0 \\ \kappa(\kappa-2)+e^{\lambda}(e^{\lambda}-2\eta\mu^2\theta)-2e^{\lambda}\sigma\upsilon\nu^2\theta+2, & x=0 \end{cases}$$

Όπου κ,λ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί , $\theta\in[0,2\pi]$**.**

i)Να βρείτε τις τιμές των κ , λ αν η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$**.**

ii)Για κ=1 και λ=0 :

α)Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία ,τα ακρότατα και το σύνολο τιμών.

β)Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $\ln x=\dfrac{\alpha}{x}$ **για όλες τις πραγματικές τιμές του α.**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cf στο A(1,f(1)).

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα στο πεδίο ορισμού της και κατόπιν να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cf, την (ε) και τις ευθείες $x=1, x=e$**.**

ε)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο της B(e,f(e)) και στην συνέχεια να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{1974}{f(xe)-2ex+e}$$

Λύση

Α.Η g συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως γινόμενο μια πολυωνυμικής και λογαριθμικής)

$g'(x)=(x\ln x)'=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

$g'(x)<0\Leftrightarrow \ln x+1<0\Leftrightarrow \ln x<-1\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{e}$

$g'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+1>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην θέση $x_0=\dfrac{1}{e}$ το $g(\dfrac{1}{e})=\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}=-\dfrac{1}{e}$

Στο διάστημα $\Delta_1=\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$, $g\searrow$ άρα $g(\Delta_1)=\left[g(\dfrac{1}{e}),\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\right)$

Στο διάστημα $\Delta_2=\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$, $g\nearrow$ άρα $g(\Delta_2)=\left[g(\dfrac{1}{e}),\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{D.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}g(x)=\lim_{x\to +\infty}(x\ln x)=+\infty$$

Άρα $g(\Delta_1)=\left[g(\dfrac{1}{e}),\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\right)=\left[-\dfrac{1}{e},0\right)$, $g(\Delta_2)=\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ τελικά το σύνολο τιμών της g είναι $g(D_g)=\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

B.i) $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ \kappa(\kappa-2)+e^{\lambda}(e^{\lambda}-2\eta\mu^2\theta)-2e^{\lambda}\sigma\upsilon\nu^2\theta+2, & x=0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, όπου από προηγούμενο ερώτημα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$

$f(0)=0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa-2)+e^{\lambda}(e^{\lambda}-2\eta\mu^2\theta)-2e^{\lambda}\sigma\upsilon\nu^2\theta+2=0 \Leftrightarrow$

$\kappa^2-2\kappa+e^{2\lambda}-2e^{\lambda}\eta\mu^2\theta-2e^{\lambda}\sigma\upsilon\nu^2\theta+2=0 \Leftrightarrow$

$\kappa^2-2\kappa+e^{2\lambda}-2e^{\lambda}(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+e^{2\lambda}-2e^{\lambda}+2=0 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1+e^{2\lambda}-2e^{\lambda}+1=0 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2+(e^{\lambda}-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=1\\ e^{\lambda}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=1\\ \lambda=0\end{cases}$

α)Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην θέση $x_0=\frac{1}{e}$ το $g(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$

$x\in\Delta_1=\left[0,\frac{1}{e}\right), f(\Delta_1)=\left[-\frac{1}{e},0\right)$

$x\in\Delta_2=\left[\frac{1}{e},+\infty\right), f(\Delta_2)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ άρα $f(D_f)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

β)Η εξίσωση $\ln x=\frac{\alpha}{x}$ έχει λύση όταν $x>0$

$\ln x=\frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha, x>0 \quad (1)$

Όμως $f(D_f)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

<u>1η περίπτωση</u>

Αν $\alpha\in\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$ η (1) είναι αδύνατη

<u>2η περίπτωση</u>

Αν $\alpha=-\frac{1}{e}$, η τιμή $-\frac{1}{e}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f την οποία παίρνει μόνο για $x=\frac{1}{e}$

Έτσι η (1) έχει ρίζα την $x=\frac{1}{e}$.

<u>3η περίπτωση</u>

Αν $\alpha\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$, επειδή $\left(-\frac{1}{e},0\right)=f(\left(0,\frac{1}{e}\right))$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ που είναι θετική.

Επίσης επειδή $\left[-\frac{1}{e},0\right)=f(\left[\frac{1}{e},+\infty\right))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς άλλη μια ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ που είναι επίσης θετική

<u>4η περίπτωση</u>

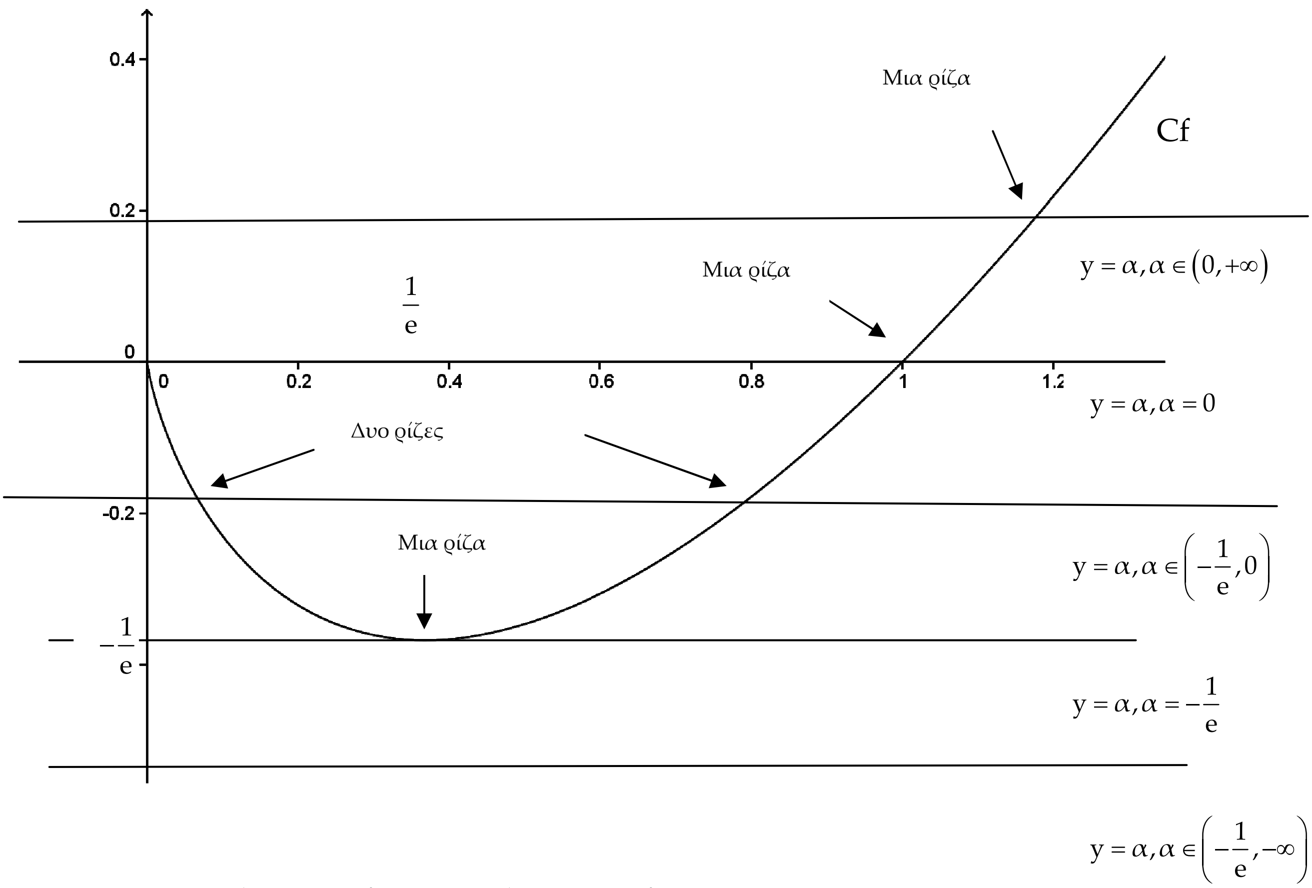
Αν $\alpha=0$ η (1) γίνεται $x\ln x=0 \Leftrightarrow x=0$ (απορρίπτεται) ή $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ (μια θετική ρίζα.

<u>5η περίπτωση</u>

Αν $\alpha \in (0,+\infty)$ επειδή $(0,+\infty) \subseteq \left[-\frac{1}{e},+\infty\right) = f(\left[\frac{1}{e},+\infty\right))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$,

προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, που είναι θετική.

Ένα σχήμα θα βοηθήσει να συνοψίσουμε:



γ) Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της A(1,f(1)):

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η Cf είναι πάνω από την εφαπτομένη (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής κατά συνέπεια το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\int_1^e (f(x)-(x-1))dx = \int_1^e (x\ln x - (x-1))dx = ... = \frac{4e-e^2-1}{4} \text{ τ.μ}$$

ε) Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της A(e,f(e)):

$$(\varepsilon): y - f(e) = f'(e)(x-e) \Leftrightarrow y - e = 2(x-e) \Leftrightarrow y - e = 2x - 2e \Leftrightarrow y = 2x - e$$

Λόγω της κυρτότητας για κάθε $x > 0 : f(x) \geq 2x - e \Leftrightarrow f(x) - 2x + e \geq 0$ (*)

Χειριζόμαστε το όριο με αντικατάσταση :

$$\lim_{x\to 1}\frac{1974}{f(xe)-2ex+e} \overset{u=xe \Leftrightarrow x=\frac{u}{e}}{\underset{u\to e}{=}} \lim_{u\to e}\frac{1974}{f(u)-2u+e}$$

Αλλά κοντά στο e από την (*)ισχύει $f(u)-2u+e > 0$, $\lim_{u\to e}(f(u)-2u+e) = 0$

οπότε το ζητούμενο όριο $\lim_{u\to e}\frac{1974}{f(u)-2u+e} = +\infty$

46.Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$**, με** $f(1)=0$ **και** $f'(1)=1$**,και η παραγωγίσιμη συνάρτηση** $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ **για τις οποίες ισχύει:**

- $f''(x)=-[f'(x)]^2<0$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$ **(1)**
- $g'(x)>\dfrac{1}{xf(x)}$ **για κάθε** $x\in(1,+\infty)$ **(2)**

i)Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x,\ x>0$**.**

ii)Να αποδείξετε ότι $g(5)-g(e)>\ln(\ln 5)$**.**

iii)Υλικό σημείο Μ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $x'(t)=e^2\ cm/s$**.Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η ευθεία ΟΜ με τον άξονα x'x,όταν η ΟΜ γίνεται εφαπτομένη της Cf(όπου Ο η αρχή των αξόνων).**

iv) Να δείξετε ότι $\int_1^e(\eta\mu x\cdot f(x))dx\le 1$

v) (Μεζεδάκι..) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ **με** $x_1<x_2$**,ώστε:**

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε βοηθητική συνάρτηση $h(x)=\ln(\ln x)$ και εφαρμόστε Θ.Μ.Τ σε κατάλληλα διαστήματα...)

Λύση

i)Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f''(x)=-[f'(x)]^2<0\Leftrightarrow-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f'(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x)}=x+c,c\in\mathbb{R}\ \text{σταθερός}\ (3)$$

Για $x=1$ η (3) : $\dfrac{1}{f'(1)}=1+c\Leftrightarrow c=0$.Άρα, για κάθε $x>0$

$$\frac{1}{f'(x)}=x\Leftrightarrow\frac{1}{x}=f'(x)\Leftrightarrow f'(x)=(\ln x)'\Leftrightarrow f(x)=\ln x+c\ ,c\in\mathbb{R}\ \text{σταθερός}\ (4)$$

Για $x=1$ η (4): $f(1)=\ln 1+c\Leftrightarrow c=0$,τελικά $f(x)=\ln x,\ x>0$

ii)Η (2) από το ερώτημα (i) γίνεται:

$g'(x)>\dfrac{1}{x\ln x}$,για κάθε $x\in(1,+\infty)$, Έτσι

$$g'(x)>\frac{1}{x\ln x}\Leftrightarrow g'(x)>\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\Leftrightarrow g'(x)>\frac{(\ln x)'}{\ln x}\Leftrightarrow g'(x)>(\ln(\ln x))'\Leftrightarrow g'(x)-(\ln(\ln x))'>0\Leftrightarrow(g(x)-\ln(\ln x))'>0$$

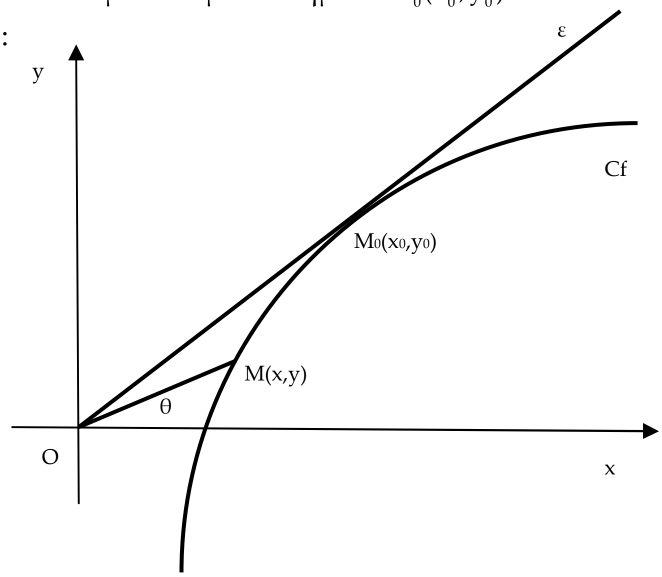
για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=g(x)-\ln(\ln x)$, $x\in(1,+\infty)$

Ισχύει $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Άρα, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι,

$$5>e\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(5)>h(e)\Rightarrow g(5)-\ln(\ln 5)>g(e)-\ln(\ln e)\Rightarrow g(5)-\ln(\ln 5)>g(e)\Rightarrow g(5)-g(e)>\ln(\ln 5)$$

iii)Έστω η ΟΜ γίνεται εφαπτομένη της Cf,όταν το Μ συμπέσει με το σημείο $M_0(x_0,y_0)$.Τότε η εφαπτομένη (ε) της Cf στο M_0 θα έχει εξίσωση:



$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

Και επειδή η (ε) διέρχεται από την αρχή O(0,0),θα ισχύει:

$$0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e$$

Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΟΜ με τον άξονα x'x. Τότε έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{y}{x}$$

-Κάθε χρονική στιγμή t θα ισχύει:

$\varepsilon\varphi\big(\theta(t)\big)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$, όπου $y(t)=\ln(x(t))$

Παραγωγίζουμε:

$$\big(\varepsilon\varphi\big(\theta(t)\big)\big)'=\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)'\Leftrightarrow\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2(\theta(t))}=\frac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{(x(t))^2}\Leftrightarrow\big(\varepsilon\varphi^2(\theta(t))+1\big)\theta'(t)=\frac{y'(t)\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{(x(t))^2}$$

$$\overset{y'(t)=\ln(x(t))\Leftrightarrow y'(t)=\frac{x'(t)}{x(t)}}{\Leftrightarrow}\big(\varepsilon\varphi^2(\theta(t))+1\big)\theta'(t)=\frac{\frac{x'(t)}{x(t)}\cdot x(t)-y(t)\cdot x'(t)}{(x(t))^2}\Leftrightarrow\big(\varepsilon\varphi^2(\theta(t))+1\big)\theta'(t)=\frac{x'(t)-y(t)\cdot x'(t)}{(x(t))^2}$$

$$\Leftrightarrow\big(\varepsilon\varphi^2(\theta(t))+1\big)\theta'(t)=\frac{x'(t)(1-y(t))}{(x(t))^2}$$

Την χρονική στιγμή $t=t_0$ που το Μ βρίσκεται στην θέση $M_0(e,1)$

$$x(t_0)=e\ ,\ y(t_0)=1,\ \ \varepsilon\varphi(\theta(t_0))=\frac{1}{e}$$

Οπότε

$$\big(\varepsilon\varphi^2(\theta(t_0))+1\big)\theta'(t_0)=\frac{x'(t_0)(1-y(t_0))}{(x(t_0))^2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{e}+1\right)\theta'(t_0)=\frac{e^2(1-1)}{e^2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{e}+1\right)\theta'(t_0)=0\Leftrightarrow\theta'(t_0)=0$$

iv)Πρέπει να δείξουμε ότι $\int_1^e(\eta\mu x\cdot\ln x)dx\le 1$

Για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει: $\eta\mu x\cdot\ln x\le\ln x$ οπότε $\int_1^e(\eta\mu x\cdot\ln x)dx\le\int_1^e\ln x dx\overset{\Pi.O}{=}....=\big[x\ln x-x\big]_1^e=1$

v) Πρέπει να δείξουμε ότι $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\sqrt{\ln x_1\ln x_2}$

Θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση $h(x)=\ln(\ln x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ έτσι:

$$h'(x)=\frac{1}{x\ln x}\ \ ,\ h''(x)=-\frac{\ln x+1}{(x^2\ln x)}<0$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Μέσης τιμής στην συνάρτηση h στα διαστήματα $\left(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right),\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2}\right),\xi_2\in\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},x_2\right)$ τέτοια ώστε:

$$h'(\xi_1)=\frac{h(\frac{x_1+x_2}{2})-h(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2}-x_1}=2\frac{\ln(\ln\frac{x_1+x_2}{2})-\ln(\ln x_1)}{x_2-x_1}$$

$$h'(\xi_2)=\frac{h(x_2)-h(\frac{x_1+x_2}{2})}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=2\frac{\ln(\ln(x_2)-\ln(\ln(\frac{x_1+x_2}{2}))}{x_2-x_1}$$

Η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ άρα

$$\xi_1<\xi_2\Rightarrow h'(\xi_1)>h'(\xi_2)\Leftrightarrow 2\frac{\ln((\ln\frac{x_1+x_2}{2}))-\ln(\ln x_1)}{x_2-x_1}>2\frac{\ln(\ln(x_2)-\ln(\ln(\frac{x_1+x_2}{2}))}{x_2-x_1}\overset{x_2-x_1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x_2-x_1>0}{\Leftrightarrow}\ln((\ln\frac{x_1+x_2}{2}))>\frac{1}{2}\left[\ln(\ln(x_2)+\ln(\ln x_1)\right]\Leftrightarrow\ln((\ln\frac{x_1+x_2}{2}))>\ln(\ln x_2\cdot\ln x_1)^{\frac{1}{2}}\overset{\ln x 1-1}{\Rightarrow}$$

$$\ln(\frac{x_1+x_2}{2})>\sqrt{\ln x_2\cdot\ln x_1}\Leftrightarrow f(\frac{x_1+x_2}{2})>\sqrt{f(x_2)\cdot f(x_1)}$$

47.Α.Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη τότε και η αντίστροφη της η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+x+3$ και η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση g ορισμένη στο $[0,+\infty)$, με $g''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

i)Να δείξετε ότι ορίζεται η $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii)Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3)x^2+2016x+1974}{x+2016}=+\infty$,λ πραγματικός αριθμός.

iii) Θεωρούμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,να υπολογίσετε τις τιμές $f(1),f(0)$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\int_3^5 f^{-1}(x)dx=\frac{4}{3}$$

iv)Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(\xi)=\frac{2}{3}$.

v)Αν επιπλέον ισχύει $(g'(x))^2+(g(x))^2<3x^2+1$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι $(g(1))^2-(g(0))^2<2$.

β) υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_2)\cdot g'(\xi_2)<1$.

vi)Αν h συνάρτηση με τύπο $h(x)=f(x)+g(x)$ να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ τότε για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει:

$$h(x)<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x+\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}$$

(Υπόδειξη: Τι εκφράζει γεωμετρικά η παραπάνω ανισοτική σχέση;)

Λύση

Α.Η f είναι γνησίως μονότονη άρα 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται θα δείξουμε ότι έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f^{-1}.Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .Θα αποδείξουμε ότι και η f^{-1}ειναι γνησίως αύξουσα δηλαδή

Για κάθε $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$ ισχύει $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

Αν ίσχυε $f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(f^{-1}(y_1))\geq f(f^{-1}(y_2))\Rightarrow y_1\geq y_2$ άτοπο άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Ανάλογα αν υποθέταμε ότι η f ήταν γνησίως φθίνουσα.

Β.i)Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική άρα $f'(x)=5x^4+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1 στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται.

$D_{f^{-1}} = f(D_f) \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3)x^2+2016x+1974}{x+2016} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3)x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3)x$ το όριο

εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3>0 \Leftrightarrow f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-f^{-1}(0)>0 \Leftrightarrow f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)>f^{-1}(0) \underset{\text{ερωτημα (A)}}{\overset{f^{-1}\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}} \lambda^2+\lambda+16>0$

που ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα $f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Οπότε $\lim_{x\to+\infty}(f^{-1}(\lambda^2+\lambda+16)-3)x=+\infty$

iii) $f(1)=5, f(0)=3$

Θέτουμε $u=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u)=x$ όπου $f'(u)du=dx$

Για τα άκρα ολοκλήρωσης

$f(1)=5 \Leftrightarrow 1=f^{-1}(5)$

$f(0)=3 \Leftrightarrow 0=f^{-1}(3)$

$$\int_3^5 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \left[u(u^5+u+3)\right]_0^1 - \int_0^1 (u^5+u+3)du = \left[u(u^5+u+3)\right]_0^1 - \left[\frac{u^6}{6}+\frac{u^2}{2}+3u\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

iv) $\int_3^5 f^{-1}(x)dx = \frac{4}{3}$

Έστω A μια παράγουσα της f^{-1} (δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R} : A'(x)=f^{-1}(x)$)

$$\int_3^5 f^{-1}(x)dx = \frac{4}{3} \Leftrightarrow A(5)-A(3)=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{A(5)-A(3)}{5-3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A(5)-A(3)}{5-3} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

Η συνάρτηση A ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[3,5]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(3,5)$ τέτοιο ώστε $A'(\xi)=\frac{A(5)-A(3)}{5-3} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} A'(\xi)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow f^{-1}(\xi)=\frac{2}{3}$

v)α) Ισχύει ότι: $(g'(x)-g(x))^2 \ge 0 \Leftrightarrow (g'(x))^2+(g(x))^2 \ge 2g'(x)g(x)$

αλλά, από υπόθεση $(g'(x))^2+(g(x))^2 < 3x^2+1$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

έτσι $2g'(x)g(x) \le 3x^2+1$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Ολοκληρώνουμε στο $[0,1]$

$$\int_0^1 2g'(x)g(x)dx < \int_0^1 3x^2+1 \Leftrightarrow \int_0^1 [g^2(x)]'dx < \left[x^3+x\right]_0^1 \Leftrightarrow g^2(1)-g^2(0)<2$$

β) Η συνάρτηση $g^2(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,1]$ άρα υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε (2) $\quad g^2(\xi_2)=\frac{g^2(1)-g^2(0)}{1-0}<2$ από το προηγούμενο ερώτημα

Όμως $(g^2(x))'=2g(x)g'(x)$

Άρα η (2) γίνεται: $2g(\xi_2)g'(\xi_2)=\frac{g^2(1)-g^2(0)}{1-0}<2 \Leftrightarrow 2g(\xi_2)g'(\xi_2)<2 \Leftrightarrow g(\xi_2)g'(\xi_2)<1$

vi) $h'(x)=(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)=5x^4+1+g'(x)$

$h''(x)=(5x^4+1+g'(x))'=20x^3+g''(x)>0$ διότι $20x^3>0$ στο $(0,+\infty)$ και από υπόθεση $g''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ άρα η h είναι στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο $(0,+\infty)$ οπότε κάθε σημείο (x,y) του ευθύγραμμου τμήματος AB , A(α,h(α)), B(β,h(β)) είναι «**πάνω**» από κάθε σημείο $(x_0,h(x_0))$, $x_0\in(\alpha,\beta)$ δηλαδή $h(x)<y$, $\alpha<x<\beta$ (1)

Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει εξίσωση

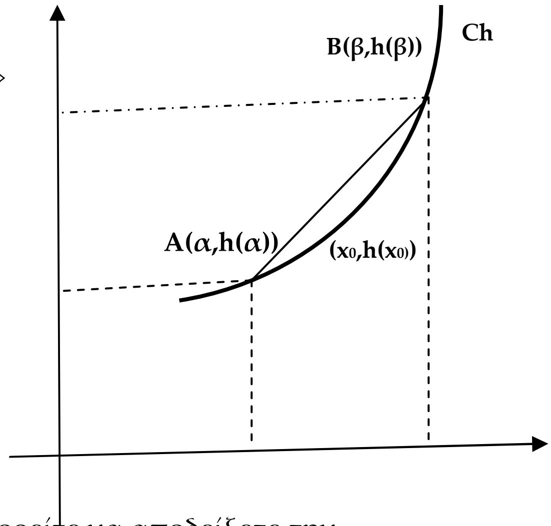
$$y - f(\beta) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\beta) \Leftrightarrow y = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\beta + f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\beta + \frac{f(\beta)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x - \frac{f(\beta)\beta-f(\alpha)\beta}{\beta-\alpha} + \frac{f(\beta)\beta-f(\beta)\alpha}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x + \frac{-f(\beta)\beta+f(\alpha)\beta+f(\beta)\beta-f(\beta)\alpha}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x + \frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}, \quad \alpha < x < \beta \quad (2)$$



Από (1),(2) προκύπτει το ζητούμενο.(Εναλλακτικά, μπορείτε να αποδείξετε την παραπάνω ανισοτική σχέση θεωρώντας συνάρτηση με χρήση μονοτονίας)

48.(ΣΧ)Δινεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=x^4-\alpha x^3+\beta x^2$,α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,με συνεχή πρώτη παράγωγο για τις οποίες ισχύουν:

- **Η g έχει τρία διαφορετικά τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2<x_3$.**
- **Το σημείο A(1,f(1)) βρίσκεται «πάνω» από την ευθεία $y=x$.**
- $f'(x)\ge f^2(0)+f(1)+\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3\alpha}$ **για κάθε** $x\in[0,1]$
- $\int_0^1 e^x f(x)dx = 1$

i)Να αποδείξετε $x_1+x_2+x_3=\dfrac{3\alpha}{4}$.

ii)Να δείξετε ότι $f(0)=-\dfrac{1}{2}$.

iii)Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0,1)$.

iv)Να βρείτε τον τύπο της f.

v)Να δείξετε ότι $f(1)=\dfrac{e}{2}$.

Λύση

i)Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, αν x_1,x_2,x_3 σημεία που η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα άρα από Θ.Fermat $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.Έτσι:

$$g'(x)=\left(x^4-\alpha x^3+\beta x^2\right)'=4x^3-3\alpha x^2+2\beta x = x(4x^2-3\alpha x+2\beta)$$

Πρέπει η εξίσωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow x(4x^2-3\alpha x+2\beta)=0$ να έχει τρεις ρίζες .Μια ρίζα είναι το 0 και από τους τύπους του Vieta προκύπτει:

$$x_1+x_2+x_3=0+(-\frac{-3\alpha}{4})=\frac{3\alpha}{4}$$

ii) Για κάθε $x\in[0,1]$:

$$f'(x)\ge f^2(0)+f(1)+\frac{x_1+x_2+x_3}{3\alpha} \Leftrightarrow f'(x)\ge f^2(0)+f(1)+\frac{\frac{3\alpha}{4}}{3\alpha} \Leftrightarrow f'(x)\ge f^2(0)+f(1)+\frac{1}{4} \ (1)$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στην f στο διάστημα $[0,1]$,(ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, παραγωγισιμότητα στο $(0,1)$, συνέχεια στο$[0,1]$)

Άρα υπάρχει $\xi \in (0,1): f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1)-f(0)$ (2)

Η (1) ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$ άρα ισχύει και για $x = \xi$, έτσι

$$f'(\xi) \geq f^2(0) + f(1) + \frac{1}{4} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(1) - f(0) \geq f^2(0) + f(1) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow -f(0) \geq f^2(0) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \geq f^2(0) + f(0) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$0 \geq f^2(0) + 2\frac{1}{2}f(0) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(0) + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \text{ οπότε } f(0) + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$$

iii)Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - x, x \in [0,1]$, τότε η h είναι συνεχής ως διαφορα παραγωγίσιμων άρα και συνεχών στο $[0,1]$, επίσης ισχύει:

$h(0) = f(0) - 0 = -\frac{1}{2} < 0$

$h(1) = f(1) - 1 > 0$ (Από υπόθεση ,το σημείο A(1,f(1)) βρίσκεται «πάνω» από την ευθεία $y = x$ άρα $f(1) > 1$)

Δηλαδή $h(0) \cdot h(1) < 0$ άρα από το θ.Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Για κάθε $x \in [0,1]: h'(x) = f'(x) - 1 \geq f^2(0) + f(1) + \frac{1}{4} - 1 = \left(f^2(0) + \frac{1}{4}\right) + \left(f(1) - 1\right) > 0$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε η παραπάνω λύση είναι μοναδική.

iv)Από ερώτημα (ii) ,για κάθε $x \in [0,1]$

$f'(x) \geq \frac{1}{4} + f(1) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow f'(x) \geq \frac{1}{2} + f(1) \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{2} - f(1) \geq 0$ (3)

Έστω $\Phi(x) = f'(x) - \frac{1}{2} - f(1), x \in [0,1]$.Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $\Phi(x_0) > 0$,τότε έχουμε:

$$\int_0^1 \Phi(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) - \frac{1}{2} - f(1))dx > 0 \Leftrightarrow \left[f(x) - \frac{1}{2}x - f(1)x\right]_0^1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(1) - \frac{1}{2} - f(1)\right) - f(0) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - f(0) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow 0 > 0 \text{ ατοπο}$$

Άρα θα ισχύει $\Phi(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ ή

$$f'(x) - \frac{1}{2} - f(1) = 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + f(1) \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{2} + f(1)\right)x\right)' \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

(4) $$f(x) = \left(\frac{1}{2} + f(1)\right)x + c \text{ για κάθε } x \in [0,1] \text{ c σταθερός πραγματικός}$$

Για $x = 0$ η (4): $f(0) = c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$

Άρα $f(x) = \left(\frac{1}{2} + f(1)\right)x - \frac{1}{2}, x \in [0,1]$

$$\text{v)} \int_0^1 e^x f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^x\left(\left(\frac{1}{2} + f(1)\right)x - \frac{1}{2}\right)dx = 1 \overset{\Pi.O}{\Leftrightarrow} \left[e^x\left(\left(\frac{1}{2} + f(1)\right)x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\left(\frac{1}{2} + f(1)\right)dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left[e^x\left(\left(\frac{1}{2} + f(1)\right)x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \left(\frac{1}{2} + f(1)\right)\int_0^1 e^x dx = 1 \Leftrightarrow \left[e^x\left(\left(\frac{1}{2} + f(1)\right)x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \left(\frac{1}{2} + f(1)\right)\left[e^x\right]_0^1 = 1$$

$$ef(1)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+f(1)\right)(e^1-1)=1 \Leftrightarrow ef(1)+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+f(1)\right)(e-1)=1 \Leftrightarrow$$

$$ef(1)+\frac{1}{2}-\frac{e}{2}-ef(1)+\frac{1}{2}+f(1)=1 \Leftrightarrow -\frac{e}{2}+f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=\frac{e}{2}$$

49.(ΣΧ)Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και μια συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι ιδιότητες

• $g(x)=\begin{cases} x^{2\lambda+2016\mu}\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ \mu^2+1+\lambda(\lambda-2), x=0 \end{cases}$, $\mu\geq 0, \lambda>0$

• $f(x)f'(-x)=1$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

• $f(0)=\dfrac{1}{e^6}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-1}$

A.i)Να δείξετε ότι $\mu=0, \lambda=1$**.**

ii)Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και να βρείτε την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της Cg στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

iii)Να δείξετε ότι η (ε) «διαπερνά» την Cg σε άπειρα σημεία .

B.i) Να δείξετε ότι $f(0)=1$**.**

ii) Να δείξετε ότι $f(x)f(-x)=1$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

iii) Να βρείτε τον τύπο της f.

Γ. Αν $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf στο $x_0=0$ μετατοπισμένη κατά μια μονάδα προς τα «κάτω» είναι ασύμπτωτη της Cg στο $+\infty$

Δ. Ζητήθηκε από ένα μαθητή ο ορισμός της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μια συνάρτησης f στο σημείο της x_0 και αυτός έγραψε:

«πρόκειται για μια ευθεία που έχει με την γραφική παράσταση της f ένα κοινό σημείο το $A(x_0,f(x_0))$.»

Είναι σωστό ή λάθος; Αιτιολογήστε.

Λύση

Αi)Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$ άρα ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)\,(1)$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2\lambda+2016\mu}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

Για κάθε $x\neq 0$: $\left|x^{2\lambda+2016}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|x^{2\lambda+2016\mu}\right| \Leftrightarrow -\left|x^{2\lambda+2016\mu}\right|\leq x^{2\lambda+2016}\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq\left|x^{2\lambda+2016\mu}\right|$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^{2\lambda+2016\mu}\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left|x^{2\lambda+2016\mu}\right|\right)=0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{2\lambda+2016\mu}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$

Από (1) λαμβάνουμε: $\mu^2+1+\lambda(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \mu^2+1+\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \mu^2+(\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \mu=0$ και $\lambda=1$

ii) Για $\mu=0$ και $\lambda=1$: $g(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$$

Για $x\neq 0$

$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$, $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = 0$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$(\varepsilon): y - g(0) = g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 0 = 0(x-0) \Leftrightarrow y = 0$

iii)Τα κοινά σημεία της Cg με την (ε) προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$

•Για $x \ne 0$ $\eta\mu\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{1}{x} = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x} = 2\kappa\pi \\ \frac{1}{x} = 2\kappa + \pi\end{cases}$ $\kappa \in \mathbb{Z}^* \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \nu\pi, \nu \in \mathbb{Z}^* \Leftrightarrow x = \frac{1}{\nu\pi}, \nu \in \mathbb{Z}^*$

•Για $x = 0$

$g(0) = 0$

Άρα η (ε) «διαπερνά» την Cg σε άπειρα σημεία .

B.i) $f(0) = \frac{1}{e^6}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-1} = \frac{1}{e^6}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-1}} = \frac{1}{e^6}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(3x-1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

Αλλά

$$\lim_{x\to+\infty}\left((3x-1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{3x-1}}\right) \underset{\text{L Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right))'}{\left(\frac{1}{3x-1}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)'}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{-\frac{(3x-1)'}{(3x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{2}{x^2}}{\left(\frac{x+2}{x}\right)}}{-\frac{3}{(3x-1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x(x+2)}}{-\frac{3}{(3x-1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(3x-1)^2}{3x(x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{18x^2}{3x^2} = 6$$

Άρα $f(0) = \frac{1}{e^6}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(3x-1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{e^6}e^6 = 1$

ii)Η σχέση $f(x)f'(-x) = 1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα θα ισχύει και για $-x$ έτσι:

$f(-x)f'(x) = 1$ τα δεύτερα μέλη ίσα άρα και τα πρώτα οπότε

$f(-x)f'(x) = f(x)f'(-x) \Leftrightarrow f(-x)f'(x) - f(x)f'(-x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x)f(-x)\right)' = 0$ άρα $f(x)f(-x) = c$,για

x=0 $\left(f(0)\right)^2 = c \Leftrightarrow c = 1$,οπότε ισχύει $f(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii)Από τις σχέσεις $f(x)f'(-x) = 1, f(x)f(-x) = 1$ παίρνουμε ότι $f(x) = f'(x)$

Άρα $f(x) = ce^x$ (από εφαρμογή σχολικού βιβλίου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτούσια στις ασκήσεις)

Όμως $f(0) = 1$ έτσι $f(0) = ce^0 \Leftrightarrow 1 = c$ οπότε $f(x) = e^x$

Γ.Η εξίσωση της εφαπτόμενης της Cf στο $x_0 = 0$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - e^0 = e^0(x-0) \Leftrightarrow y = x+1$$

Η ε μετατοπισμένη μια μονάδα προς τα κάτω έχει τύπο $y = x$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - x) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2\eta\mu\frac{1}{x} - x) \overset{x=\frac{1}{u}}{=} \lim_{u\to 0}(\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}) \Leftrightarrow \lim_{u\to 0}(\frac{\eta\mu u - u}{u^2}) \underset{\text{d.l.hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{u\to 0}(\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u}) \underset{\text{d.l.hospital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{u\to 0}(\frac{-\eta\mu u}{2}) = 0$$

Δ. Δεν ισχύει αυτό που ισχυρίζεται ο μαθητής και το αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της στο $x_0 = 0$.

50.Α.Δίνεται η δυο φόρες παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία είναι γνωστό ότι:

- $f(f'(x))+f(x)=0$ **,για κάθε** $x>0$
- $f'(x)>0$ **για κάθε** $x>0$
- $f'(1)=1, f(1)=0$

Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

Β. Χωρίς την χρήση υπολογιστή τσέπης με την βοήθεια της συνάρτησης f ,να αποδείξετε την ανισοτική σχέση: $3-\frac{e^2}{7}<\ln 7<1+\frac{7}{e^2}$

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f\left(\sqrt{\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}}\right)$

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

ii)Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την g^{-1} (πεδίο ορισμού, τύπος)

iii)Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=-\frac{1}{2}$

Δ. i)Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{e}{x}$ έχει μοναδική ρίζα την $\rho=e$ στο $[1,+\infty)$.

ii)Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f ,την υπερβολή $y=\frac{e}{x}$, τον άξονα x'x και της ευθείας $x=3e$.

Λύση

Α. Εφόσον η σχέση $f(f'(x))+f(x)=0\,(1)$ για κάθε $x>0$ θα ισχύει και για x το $f'(x)>0$, οπότε η (1) γίνεται: $f(f'(f'(x)))+f(f'(x))=0$ (2)

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει:

$f(f'(f'(x)))=f(x)$ (3)

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και 1-1 στο $(0,+\infty)$, οπότε η (3) γίνεται: $f'(f'(x))=x$ (4)

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$f'(f'(x))f''(x)+f'(x)=0\overset{(4)}{\Leftrightarrow}xf''(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow(xf'(x))'=0\Leftrightarrow xf'(x)=c, x>0$$

Για $x=1$ έχουμε: c=1 ,οπότε : $xf'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=\ln x+c_1, x>0$

Για $x=1$ έχουμε: $c_1=0$, τελικά $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$ η οποία επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες.

Β. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στην συνάρτηση $f(x)=\ln x$,στο διάστημα $[7,e^2]$

f συνεχής στο $[7,e^2]$, παραγωγίσιμη στο $(7,e^2)$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(7,e^2)$

$$f'(\xi)=\frac{f(7)-f(e^2)}{7-e^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\frac{\ln 7-\ln e^2}{7-e^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\frac{\ln 7-2}{7-e^2}$$

Αλλά $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0, x>0$ άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $[7,e^2]$ οπότε

$$7<\xi<e^2\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(7)>f'(\xi)>f'(e^2)\Rightarrow\frac{1}{7}>\frac{\ln 7-2}{7-e^2}>\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow\frac{7-e^2}{7}<\ln 7-2<\frac{7-e^2}{e^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{7-e^2}{7}+2<\ln 7<\frac{7-e^2}{e^2}+2\Leftrightarrow 1-\frac{e^2}{7}+2<\ln 7<\frac{7}{e^2}-1+2\Leftrightarrow 3-\frac{e^2}{7}<\ln 7<\frac{7}{e^2}+1$$

Γ. i) $g(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}}\right)$. Πρέπει $\dfrac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}>0 \Leftrightarrow e^{x-1}-1>0 \Leftrightarrow e^{x-1}>1 \Leftrightarrow e^{x-1}>e^{0} \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ άρα $Dg=(1,+\infty)$

ii)Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{\frac{e^{x_1-1}-1}{e^{x_1-1}+1}}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{e^{x_2-1}-1}{e^{x_2-1}+1}}\right)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{\frac{e^{x_1-1}-1}{e^{x_1-1}+1}}=\sqrt{\frac{e^{x_2-1}-1}{e^{x_2-1}+1}}\Leftrightarrow\frac{e^{x_1-1}-1}{e^{x_1-1}+1}=\frac{e^{x_2-1}-1}{e^{x_2-1}+1}\Leftrightarrow$$

$$(e^{x_1-1}-1)(e^{x_2-1}+1)=(e^{x_1-1}+1)(e^{x_2-1}-1)\Leftrightarrow e^{x_1+x_2-2}+e^{x_1-1}-e^{x_2-1}-1=e^{x_1+x_2-2}-e^{x_1-1}+e^{x_2-1}-1\Leftrightarrow$$

$2e^{x_1-1}=2e^{x_2-1}\Leftrightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

θέτουμε

$$y=g(x)\Leftrightarrow y=\ln\left(\sqrt{\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}}\right)\Leftrightarrow e^{y}=\sqrt{\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}}\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}\Leftrightarrow e^{2y}(e^{x-1}+1)=e^{x-1}-1\Leftrightarrow$$

$$e^{2y}\cdot e^{x-1}+e^{2y}=e^{x-1}-1\Leftrightarrow e^{2y}\cdot e^{x-1}-e^{x-1}=-1-e^{2y}\Leftrightarrow e^{x-1}(e^{2y}-1)=-1-e^{2y}\Leftrightarrow e^{x-1}(1-e^{2y})=1+e^{2y}\Leftrightarrow$$

$$e^{x-1}=\frac{1+e^{2y}}{1-e^{2y}}\overset{1-e^{2y}>0\Leftrightarrow..\Leftrightarrow y<0}{\Leftrightarrow}e^{x}=\frac{e+e^{2y+1}}{1-e^{2y}}\Leftrightarrow x=\ln\frac{e+e^{2y+1}}{1-e^{2y}},\ x<0$$. Δηλαδή $g^{-1}(x)=\ln\dfrac{e+e^{2x+1}}{1-e^{2x}},x<0$

iii) $$g(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow g^{-1}(g(x))=g^{-1}(-\frac{1}{2})\Leftrightarrow x=g^{-1}(-\frac{1}{2})=\ln\frac{e+e^{2(-\frac{1}{2})+1}}{1-e^{2(-\frac{1}{2})}}=\ln\frac{e+1}{1-e^{-1}}=\ln\frac{e+1}{1-\frac{1}{e}}=\ln\frac{e+1}{\frac{e-1}{e}}=\ln\frac{e(e+1)}{e-1}$$

Δ. i) Η εξίσωση $f(x)=\dfrac{e}{x}$ έχει προφανή ρίζα το e, θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική.

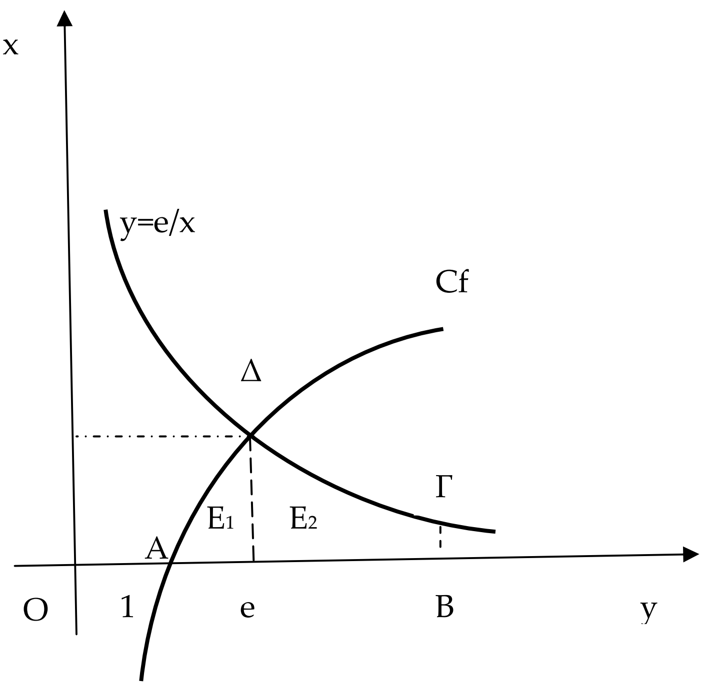
Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-\dfrac{e}{x}=\ln x-\dfrac{e}{x},x>1$ (συνεχής , παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$)

$h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{e}{x^2}>0$ η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα η ρίζα ρ=e>1 είναι μοναδική.

ii)Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=E_1+E_2=\int_1^e f(x)dx+\int_e^{3e}\frac{e}{x}dx=\int_1^e \ln x dx+e\int_e^{3e}\frac{1}{x}dx=\int_1^e(x'\cdot\ln x)dx+e\int_e^{3e}\frac{1}{x}dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e(x\frac{1}{x})dx+e\left[\ln x\right]_e^{3e}=$$

$$=\left[x\ln x\right]_1^e-\left[x\right]_1^e+e\left[\ln x\right]_e^{3e}=e\ln e-(e-1)+e(\ln 3e-\ln e)=e-e+1+e\ln 3=1+e\ln 3$$ τ.μ



51.Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x-1}, 0<x\neq 1\\ 0, \qquad x=0\\ 1, \qquad x=1\end{cases}$$

i)Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

ii)Να δείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$**.**

β) $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$**.**

δ) $e(\pi-1)<\ln \pi^{\pi(e-1)}$

ii)Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{2016(x-1)}{x}}=x$ **στο** $(1,+\infty)$**.**

iii)α) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)-x<0$ **για κάθε** $x\in(0,1)$

β) Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[9]{x+1}-1}{xf^{-1}(x)-x^2}$

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1-\frac{1}{x}}\underset{D.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(1-\frac{1}{x})'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x-1}\underset{D.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{1}=0+1=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\ln x}{x-1}\underset{D.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x\ln x)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x+1}{1}=+\infty$

ii)α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων .Επίσης είναι :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$

Άρα η f είναι συνεχής και στα σημεία $x=0$ και $x=1$, οπότε είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{x\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{x\ln x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}\underset{D.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{2(x-1)}\underset{D.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}$

γ) Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

$f'(x)=\left(\dfrac{x\ln x}{x-1}\right)'=...=\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$ **(1)**

Θεωρούμε συνάρτηση $\phi(x)=x-1-\ln x, x>0$,

$\phi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,έχουμε

$\phi'(x)=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=1$

$\phi'(x)<0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x<1$

$\phi'(x)>0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x>1$

Άρα η ϕ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$,δηλαδή για κάθε $x>0:\phi(x)\ge\phi(1)\Leftrightarrow\phi(x)\ge 0\Leftrightarrow x-1-\ln x\ge 0$ ή $x\in(0,1)\cup(1,+\infty):x-1-\ln x>0$

Οπότε από την (1) προκύπτει $f'(x)>0$ στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $f'(1)=\frac{1}{2}>0$.Άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

δ) $e<\pi\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(e)<f(\pi)\Leftrightarrow\frac{e\ln e}{e-1}<\frac{\pi\ln\pi}{\pi-1}\Leftrightarrow\frac{e}{e-1}<\frac{\ln\pi^{\pi}}{\pi-1}\Leftrightarrow e(\pi-1)<\ln\pi^{\pi(e-1)}$

ii))Η εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$e^{\frac{2016(x-1)}{x}}=x\overset{x>1}{\Leftrightarrow}\ln e^{\frac{2016(x-1)}{x}}=\ln x\Leftrightarrow\frac{2016(x-1)}{x}=\ln x\Leftrightarrow\frac{x\ln x}{x-1}=2016\Leftrightarrow f(x)=2016\ ,\ x>1$$

$A_1=(1,+\infty)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(A_1)=\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(1,+\infty)$ βλέπουμε ότι $2016\in f(A_1)=(1,+\infty)$ άρα από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0\in(1,+\infty)$ (μοναδικό λογω της μονοτονίας της f) τέτοιο ώστε $f(x_0)=2016$.

iii)α) Αρκεί να δείξουμε για κάθε $x\in(0,1):f^{-1}(x)-x<0$

Έτσι: $f^{-1}(x)-x<0\Leftrightarrow f^{-1}(x)<x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(f^{-1}(x))<f(x)\Leftrightarrow x<f(x)\Leftrightarrow x<\frac{x\ln x}{x-1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\frac{x\ln x}{x-1}<0\Leftrightarrow x(1-\frac{\ln x}{x-1})<0\Leftrightarrow x(\frac{x-1-\ln x}{x-1})<0\Leftrightarrow\frac{xh(x)}{x-1}<0$ που ισχύει διότι για κάθε $x\in(0,1)$: $h(x)>0$, (ερώτημα γ) επίσης $x>0$, $x-1<0$.

iii)β) $L=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[9]{x+1}-1}{xf^{-1}(x)-x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x(f^{-1}(x)-x)}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x}\cdot\frac{1}{(f^{-1}(x)-x)}\right)$

- $\lim_{x\to0^+}(f^{-1}(x)-x)=0,$

$f^{-1}(x)-x<0$ κοντά στο 0 από θετικές τιμές άρα $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(f^{-1}(x)-x)}=-\infty$

- $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x}\underset{\text{οταν } x\to0^+ \text{ τοτε } u\to1^+}{\overset{u=\sqrt[9]{x+1}\Leftrightarrow u^9=x+1\Leftrightarrow u^9-1=x}{=}}\lim_{u\to1^+}\frac{u-1}{u^9-1}=\lim_{u\to1^+}\frac{u-1}{(u-1)(u^8+u^7+u^6+..+1)}=\lim_{u\to1^+}\frac{1}{u^8+u^7+u^6+..+1}=\frac{1}{9}$

$$L=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt[9]{x+1}-1}{x}\cdot\frac{1}{(f^{-1}(x)-x)}\right)=\frac{1}{9}\cdot(-\infty)=-\infty$$

52.Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,τέτοια ώστε:

$$f^3(x)+f(x)=2x+4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i)Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

iii)Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

iv)Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της M(3,f(3)) με του άξονες x'x,y'y.

v)Να βρεθεί η εξίσωση (η) της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0=2$.

vi)(Ερώτημα bonus)Να δείξετε ότι:

$$\text{α) } \int_0^2 f^{-1}(x)dx=-1 \qquad \text{β) } \int_{-2}^3 f^3(x)dx=25$$

Λύση

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f^3(x)+f(x)=2x+4 \quad (1)$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$

$$\begin{cases} f^3(x_1)=f^3(x_2) \\ f(x_1)=f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} 2x_1+4=2x_2+4 \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα, η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

ii)Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=3$ θα έχουμε: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Για $x=3$ η (1) είναι:

$f^3(3)+f(3)=10 \Leftrightarrow f^3(3)+f(3)-10=0$ με χρήση σχήματος Horner βρίσκουμε ότι $f(3)=2$ άρα $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

iii)Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$, το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Έχουμε:

$$\begin{cases} f^3(x)+f(x)=2x+4 \\ f^3(x_0)+f(x_0)=2x_0+4 \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow} f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=2x-2x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0))((f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0))+f(x)-f(x_0)=2(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0))((f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1)=2(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2}{(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2}{3f^2(x_0)+1} \Rightarrow f'(x_0)=\frac{2}{3f^2(x_0)+1} \quad (2)$$

iv)Η (2) για $x=3$: $f'(3)=\dfrac{2}{3f^2(3)+1}=\dfrac{2}{13}$

Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο της M(3,f(3)) έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-2=\frac{2}{13}(x-3) \Leftrightarrow y-2=\frac{2}{13}x-\frac{6}{13} \Leftrightarrow y=\frac{2}{13}x-\frac{6}{13}+2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{13}x+\frac{20}{13}$$

Τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες είναι $B(0,\frac{20}{13}),\Gamma(-10,0)$ οπότε ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{20}{13}\right|\cdot|-10|=\dfrac{100}{13}$ τ.μ v)Παρατηρούμε ότι

$$f(3)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2)=3$$

Άρα αναζητούμε την εφαπτομένη (η) της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $(2,3)$

Αρκεί να βρούμε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $(3,2)$ και κατόπιν να εκμεταλλευτούμε την συμμετρία των C_f ,$C_{f^{-1}}$ ως προς την y=x.Δηλαδή το γεγονός ότι και οι (ε) ,(η) θα είναι συμμετρικές ως ε προς την y=x.

Από το ερώτημα (iv) έχουμε ήδη βρει την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $(3,2)$ είναι η $y=\frac{2}{13}x+\frac{20}{13}$.Λόγω συμμετρίας, αν (x,y) ανήκει την (ε) τότε (y,x) ανήκει την (η). Άρα, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση της (ε) προς x:

Οπότε $y=\frac{2}{13}x+\frac{20}{13} \Leftrightarrow 13y=2x+20 \Leftrightarrow 13y-20=2x \Leftrightarrow x=\frac{13}{2}y-10$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η (η): $y=\frac{13}{2}x-10$

vi)Επειδή η f αντιστρέφεται, έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow y=f^{-1}(x)$$

Οπότε η (1) γράφεται:

$$y^3+y=2f^{-1}(y)+4 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{y^3+y-4}{2}$$

Άρα : $f^{-1}(x)=\frac{x^3+x-4}{2}, x\in\mathbb{R}$

$$\int_0^2 f^{-1}(x)dx=\int_0^2\left(\frac{x^3+x-4}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-4x\right]_0^2=..=-1$$

Από την (1) έχουμε:

$$f^3(x)+f(x)=2x+4 \Leftrightarrow f^3(x)=2x+4-f(x)$$

$$\int_{-2}^3 f^3(x)dx=\int_{-2}^3(2x+4-f(x))dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^3-\int_{-2}^3 f(x)dx=32-\int_{-2}^3 f(x)dx \Rightarrow \int_{-2}^3 f^3(x)dx=32-\int_{-2}^3 f(x)dx \ (3)$$

Για το $\int_{-2}^3 f^3(x)dx$ θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, $dx=\left(f^{-1}(y)\right)'dy$

Για $x=-2 \Rightarrow f^{-1}(y)=-2 \Leftrightarrow \frac{y^3+y-4}{2}=-2 \Leftrightarrow y^3+y-4=-4 \Leftrightarrow y^3+y=0 \Leftrightarrow y=0$

Για $x=3 \Rightarrow f^{-1}(y)=3 \Leftrightarrow \frac{y^3+y-4}{2}=3 \Leftrightarrow y^3+y-4=6 \Leftrightarrow y^3+y-10=0 \Leftrightarrow y=2$

Επομένως

$$\int_{-2}^3 f(x)dx=\int_0^2 y(f^{-1}(y))'dx=\left[yf^{-1}(y\right]_0^2-\int_0^2 f^{-1}(y)dx=...=7$$

Άρα, από την (3): $\int_{-2}^3 f^3(x)dx=32-7=25$

53.Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)+1=2x(f(x)+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης συνάρτηση $g(x)=F(x)-F(2-x), x\in\mathbb{R}$ όπου F είναι αρχική της f.

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^{x^2}-x, x\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και ότι η $(e+1)f(e^3)<f(e^4)+ef(e^2)$.

iii. Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την εξίσωση $\dfrac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\dfrac{x}{x^2}$.

iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

v. Να αποδείξετε ότι $4\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}f(2t)dt<\int_0^2 f(t)dt$.

Λύση

i) Έστω $h(x)=f(x)+x, x\in\mathbb{R}$ τότε

$f'(x)+1=2x(f(x)+x)\Leftrightarrow(f(x)+x)'=2x(f(x)+x)\Leftrightarrow(h(x))'=2x(f(x)+x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(h(x))'=2x(f(x)+x)\Leftrightarrow(h(x))'=2x\cdot h(x)\Leftrightarrow(h(x))'-2x\cdot h(x)=0\Leftrightarrow(h(x))'+(-x^2)'h(x)=0\overset{\cdot e^{-x^2}}{\Leftrightarrow}$

$e^{-x^2}(h(x))'+e^{-x^2}(-x^2)'h(x)=0\Leftrightarrow e^{-x^2}(h(x))'+(e^{-x^2})'h(x)=0\Leftrightarrow(e^{-x^2}h(x))'=0$

Άρα $e^{-x^2}h(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι

$e^{-x^2}h(x)=c\Leftrightarrow h(x)=ce^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)+x=ce^{-x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0: f(0)+0=ce^{-0^2}\Leftrightarrow 1=c$. Άρα $f(x)+x=e^{-x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{-x^2}-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $f'(x)=-2xe^{-x^2}-1, x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}(2+4x^2)>0, x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[e^2,e^3],[e^3,e^4]$ και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(e^2,e^3),(e^3,e^4)$ άρα εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[e^2,e^3],[e^3,e^4]$. Οπότε υπάρχουν $x_1\in(e^2,e^3), x_2\in(e^3,e^4)$ τέτοια ώστε :

$$f'(x_1)=\frac{f(e^3)-f(e^2)}{e^3-e^2}, f'(x_2)=\frac{f(e^4)-f(e^3)}{e^4-e^3}$$

Έτσι

$x_1<x_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x_1)<f'(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{f(e^3)-f(e^2)}{e^3-e^2}<\dfrac{f(e^4)-f(e^3)}{e^4-e^3}\Leftrightarrow\dfrac{f(e^3)-f(e^2)}{e^2(e-1)}<\dfrac{f(e^4)-f(e^3)}{e^3(e-1)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(e^3)-f(e^2)<\dfrac{f(e^4)-f(e^3)}{e}\Leftrightarrow ef(e^3)-ef(e^2)<f(e^4)-f(e^3)\Leftrightarrow ef(e^3)+f(e^3)<f(e^4)+ef(e^2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(e+1)f(e^3)<f(e^4)+ef(e^2)$

iii) $x\in(0,+\infty)$ τότε

$\dfrac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\dfrac{x}{x^2}\Leftrightarrow x^2e^{x^4}=xe^{x^2}\Leftrightarrow 2x^2e^{x^4}=2xe^{x^2}\Leftrightarrow -2x^2e^{(x^2)^2}=-2xe^{x^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x^2)=f'(x)\overset{f'\nearrow \text{ άρα και } 1-1}{\Leftrightarrow}x^2=x\overset{x\in(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}x=1$

iv)Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη οπότε για $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=f(x)-f(2-x)(2-x)'=f(x)+f(2-x)$

$g''(x)=f'(x)-f'(2-x)$

Έτσι

$g''(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-f'(2-x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(2-x)\overset{f'\nearrow \text{ άρα } f' \text{ } 1-1}{\Leftrightarrow}x=2-x\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$

$g''(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)-f'(2-x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(2-x) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x>2-x \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow x>1$

$g''(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)-f'(2-x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(2-x) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} x<2-x \Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frown$	ΣΚ	$\smile$

Άρα η g είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$ και κυρτή στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στην θέση $x_0=1$ το σημείο $(1,g(1))$ ή $(1,0)$.

v.Στο ολοκλήρωμα $4\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(2t)dt$ θέτουμε $2t=u \Leftrightarrow t=\frac{u}{2}$ δηλαδή $2dt=du$

Για $t=\frac{1}{4} \Rightarrow 2\frac{1}{4}=u \Leftrightarrow \frac{1}{2}=u$

Για $t=\frac{3}{4} \Rightarrow 2\frac{3}{4}=u \Leftrightarrow \frac{3}{2}=u$

$$4\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(2t)dt = 4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(u)\frac{du}{2} = 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(u)du$$

Άρα η προς απόδειξη γίνεται

$2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(t)dt < \int_0^2 f(t)dt$ (1) Αν F μια παράγουσα της f τότε η (1) γίνεται:

$$2\left(F(\tfrac{3}{2})-F(\tfrac{1}{2})\right) < F(2)-F(0) \Leftrightarrow 2\left(F(\tfrac{3}{2})-F(2-\tfrac{3}{2})\right) < F(2)-F(2-2) \Leftrightarrow 2g(\tfrac{3}{2}) < g(2) \quad (3)$$

Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[1,\frac{3}{2}\right],\left[\frac{3}{2},2\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(1,\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2},2\right)$ άρα Θ.Μ.Τ στην g υπάρχουν $x_3\in\left(1,\frac{3}{2}\right), x_4\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ τέτοια ώστε

$$g'(x_3)=\frac{g(\frac{3}{2})-g(1)}{\frac{3}{2}-1}=\frac{g(\frac{3}{2})-g(1)}{\frac{1}{2}}=2(g(\tfrac{3}{2})-g(1)) \overset{g(1)=0}{=} 2g(\tfrac{3}{2})$$

$$g'(x_4)=\frac{g(2)-g(\frac{3}{2})}{2-\frac{3}{2}}=\frac{g(2)-g(\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}}=2(g(2)-g(\tfrac{3}{2}))$$

$x_3\in\left(1,\frac{3}{2}\right), x_4\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ άρα

$$x_3<x_4 \overset{g'\nearrow[1,+\infty)}{\Rightarrow} g'(x_3)<g'(x_4) \Leftrightarrow 2g(\tfrac{3}{2})<2(g(2)-g(\tfrac{3}{2})) \Leftrightarrow g(\tfrac{3}{2})<g(2)-g(\tfrac{3}{2}) \Leftrightarrow 2g(\tfrac{3}{2})<g(2)$$

54.i)Αν $f:[-2,1]\to\mathbb{R}$ **παραγωγίσιμη με** $f(-2)=f(1)=0$ **και** $e^{f'(x)}+f(x)=e^{3x^2-3}+x^2-3x+2$**, για κάθε** $x\in[-2,1]$ **να δείξετε ότι** $f(x)=x^3-3x+2$**.**

ii)Αν φ,h δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες στο $[-2,1]$ **για τις οποίες ισχύει** $\phi'(x)=\dfrac{f(x)-x^3+2x-1}{e^x}+h'(x)$ **για κάθε** $x\in[-2,1]$ με $\phi(0)=h(0)=0$**.Να υπολογίσετε το χωρίο που περικλείεται από τις Cφ,Ch και τις ευθείες** $x=0,x=1$**.**

Λύση

i)Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-(x^3-3x+2),x\in[-2,1]$

Ισχύει:

$g(-2)=f(-2)-((-2)^3-3(-2)+2)=0$

$g(1)=f(1)-(1^3-3\cdot1+2)=0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2,1]$ άρα και η g ως πράξη παραγωγίσιμων οπότε

$f'(x)=g'(x)+(x^3-3x+2)'=g'(x)+(3x^2-3)$

Από την σχέση της υπόθεσης

$e^{f(x)}+f(x)=e^{3x^2-3}+x^2-3x+2\Leftrightarrow e^{g'(x)+(3x^2-3)}+g(x)+x^3-3x+2=e^{3x^2-3}+x^2-3x+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{g'(x)+(3x^2-3)}+g(x)=e^{3x^2-3}\Leftrightarrow e^{g'(x)}\cdot e^{3x^2-3}+g(x)=e^{3x^2-3}\Leftrightarrow e^{g'(x)}\cdot e^{3x^2-3}+g(x)=e^{3x^2-3}\quad(1)$

Η συνάρτηση g(x) είναι συνεχής στο κλειστό $[-2,1]$.Συνεπώς , θα παίρνει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή μ .Θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[-2,1]$ ώστε $g(x_1)=M$ και $g(x_2)=\mu$ είναι $g(-2)=g(1)=0$.

• Αν $M>0$ τότε $x_1\in(-2,1)$ και από το θεώρημα Fermat($x_1\in(-2,1)$ εσωτερικό , κα ακρότατο) θα ισχύει: $g'(x_1)=0$

Για $x=x_1$ η σχέση (1) γίνεται:

$e^{g'(x_1)}\cdot e^{3x_1^2-3}+g(x_1)=e^{3x_1^2-3}\overset{g'(x_1)=0}{\Leftrightarrow}e^{3x_1^2-3}+g(x_1)=e^{3x_1^2-3}\Leftrightarrow g(x_1)=0$ Άτοπο, διότι $g(x_1)=M>0$.Άρα $M=0$.Όμοια αν $\mu<0$ καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $\mu=0$.Δηλαδή $0\le g(x)\le0$ για κάθε $x\in[-2,1]$ κατά συνέπεια

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-(x^3-3x+2)=0\Leftrightarrow f(x)=x^3-3x+2$ για κάθε $x\in[-2,1]$

ii) Για κάθε $x\in[-2,1]$

$$\phi'(x)=\frac{f(x)-x^3+2x-1}{e^x}+h'(x)\Leftrightarrow\phi'(x)=\frac{x^3-3x+2-x^3+2x-1}{e^x}+h'(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\phi'(x)=\frac{1-x}{e^x}+h'(x)\Leftrightarrow\phi'(x)-h'(x)=\frac{1-x}{e^x}\Leftrightarrow(\phi(x)-h(x))'=\left(\frac{x}{e^x}\right)'$$

αρα από το θεωρημα των ίσων παραγωγων $\phi(x)-h(x)=\dfrac{x}{e^x}+c,\ (2)$

c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Η (2) για $x=0:\phi(0)-h(0)=\dfrac{0}{e^0}+c\Leftrightarrow c=0$ άρα, $\phi(x)-h(x)=\dfrac{x}{e^x}\ge0$ για κάθε $x\in[-2,1]$

Το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι

$$E=\int_0^1(\phi(x)-h(x))dx=\int_0^1\frac{x}{e^x}dx=\int_0^1xe^{-x}dx=\int_0^1-x(e^{-x})'dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1e^{-x}dx=e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=1\ \text{τ.μ}$$

55.Εστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,4]$.

Α.Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι:

i)Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ii)Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $f''(\xi)+f'(\xi)=0$.

iii)Η εξίσωση $f'(x)=(e^x+x^2)f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Β. Δίνεται ακόμα συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη με συνεχή και γνησίως μονότονη παράγωγο g'.Αν ισχύει $g'(f(x)+1)=e^x f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,να δείξετε ότι $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Α.i)Από υπόθεση το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,4]$

• Η f έχει μέγιστη τιμή το 4 και την παρουσιάζει όταν $x=x_1 \in \mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα από το θεώρημα Fermat : $f'(x_1)=0$

• Η f έχει ελάχιστη τιμή το -1 και την παρουσιάζει όταν $x=x_2 \in \mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα από το θεώρημα Fermat : $f'(x_2)=0$

Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ii)(σκέψη στο πρόχειρο $f''(\xi)+f'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{\xi}f''(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \left(e^{\xi}f'(\xi)\right)'=0$)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^x f'(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) επίσης

- $h(x_1)=e^{x_1}f'(x_1)=0$
- $h(x_2)=e^{x_2}f'(x_2)=0$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (x_1,x_2)$, τέτοιος ώστε

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{\xi}f''(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{\xi}(f''(\xi)+f'(\xi))=0 \Leftrightarrow f''(\xi)+f'(\xi)=0$.

(χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρήσαμε ότι $x_1<x_2$)

iii)θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x)=f'(x)-(e^x+x^2)f(x)$ η Φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών. Έχουμε:

$\Phi(x_1)=f'(x_1)-(e^{x_1}+x_1^{\ 2})f(x_1)=-4(e^{x_1}+x_1^{\ 2})<0$ ($f'(x_1)=0, f(x_1)=4$)

$\Phi(x_2)=f'(x_2)-(e^{x_2}+x_2^{\ 2})f(x_2)=(e^{x_2}+x_2^{\ 2})>0$ ($f'(x_2)=0, f(x_2)=-1$)

Άρα από το θεώρημα Bolzano για την Φ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ισχύει το ζητούμενο.

Β. Ισχύει ότι $g'(f(x)+1)=e^x f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x=x_1$: $g'(f(x_1)+1)=e^{x_1}f(x_1) \Leftrightarrow g'(4+1)=e^{x_1}\cdot 4 \Leftrightarrow g'(5)=4e^{x_1}>0$

Για $x=x_2$: $g'(f(x_2)+1)=e^{x_2}f(x_2) \Leftrightarrow g'(-1+1)=e^{x_2}\cdot(-1) \Leftrightarrow g'(0)=-e^{x_2}<0$

Παρατηρούμε επίσης ότι το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_3)=0$,έτσι $g'(f(x_3)+1)=e^{x_3}f(x_3) \Leftrightarrow g'(1)=0$

Από υπόθεση η g' είναι γνησίως μονότονη και επίσης $g'(0)<g'(1)$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε λοιπόν : $g'(1)=0$

$x>1 \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)>g'(1) \Leftrightarrow g'(x)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

$x<1 \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)<g'(1) \Leftrightarrow g'(x)<0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

Συνεπώς η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην θέση $x_0=1$

Άρα $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

56.Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+f^{-1}(4)x^2+f^{-1}(3)x-4}{x-1}=7$$

i)Να δείξετε ότι $f^{-1}(4)=1, f^{-1}(3)=2$.Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

ii)Να λύσετε την ανίσωση $f(f(|x|+1)-4x)<f(3-4x)$

iii)Αν $x^2+\alpha x+\beta<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R},\alpha>1$.Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f^{-1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})-f^{-1}(2))x^3+2016}{(f(\alpha^2)-f(4\beta))x^2+2x+666}=-\infty$$

iv)Θεωρούμε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(gog)(x)=g(x)+f(x^5+1)-4$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$g(\ln(x+f(1)-3)^{x+1})-g(\frac{x}{f(2)-1})=g(0),\ x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

Λύση

i) $h(x)=\dfrac{x^3+f^{-1}(4)x^2+f^{-1}(3)x-4}{x-1}\Leftrightarrow h(x)(x-1)=x^3+f^{-1}(4)x^2+f^{-1}(3)x-4$

Λαμβάνουμε όρια στο 1

$\lim_{x\to1}\left(h(x)(x-1)\right)=\lim_{x\to1}\left(x^3+f^{-1}(4)x^2+f^{-1}(3)x-4\right)\Leftrightarrow$

$0=1+f^{-1}(4)+f^{-1}(3)-4\Leftrightarrow f^{-1}(4)+f^{-1}(3)=3$ (1)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+f^{-1}(4)x^2+f^{-1}(3)x-4}{x-1}\overset{f^{-1}(4)+f^{-1}(3)=3\Leftrightarrow f^{-1}(4)=3-f^{-1}(3)}{=}\lim_{x\to1}\frac{x^3+(3-f^{-1}(3))x^2+f^{-1}(3)x-4}{x-1}=$$

(Το πολυώνυμο $x^3+(3-f^{-1}(3))x^2+f^{-1}(3)x-4$ με την βοήθεια του σχήματος Horner για x=1 δίνει $x^3+(3-f^{-1}(3))x^2+f^{-1}(3)x-4=(x-1)(x^2+(4-f^{-1}(3))x+4)$ **)**

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+(4-f^{-1}(3))x+4)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+(4-f^{-1}(3))x+4)=1^2+(4-f^{-1}(3))1+4=9-f^{-1}(3)$$

Αλλά από υπόθεση $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3+f^{-1}(4)x^2+f^{-1}(3)x-4}{x-1}=7$ οπότε $9-f^{-1}(3)=7\Leftrightarrow f^{-1}(3)=2$ από τη (1) προκύπτει $f^{-1}(4)=1$.Θα δείξουμε ότι :

Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη τότε και η αντίστροφη της η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Η f είναι γνησίως μονότονη άρα 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται θα δείξουμε ότι έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f^{-1}.Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .Θα αποδείξουμε ότι και η f^{-1}ειναι γνησίως αύξουσα δηλαδή

Για κάθε $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$ ισχύει $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$

Αν ίσχυε $f^{-1}(y_1)\ge f^{-1}(y_2)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(f^{-1}(y_1))\ge f(f^{-1}(y_2))\Rightarrow y_1\ge y_2$ άτοπο άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Ανάλογα αν υποθέταμε ότι η f ήταν γνησίως φθίνουσα.

Άρα εφόσον $f^{-1}(4)<f^{-1}(3)$ η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε από την προηγούμενη πρόταση και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii)Ισχύει : $f^{-1}(4)=1\Leftrightarrow f(1)=4$, $f^{-1}(3)=2\Leftrightarrow f(2)=3$

$$f(f(|x|+1)-4x)<f(3-4x)\overset{f\searrow\text{ στο }\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}f(|x|+1)-4x>3-4x\Leftrightarrow f(|x|+1)>3\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(|x|+1) > f(2) \overset{f \searrow \text{στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} |x|+1<2 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f^{-1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})-f^{-1}(2))x^3+2016}{(f(\alpha^2)-f(4\beta))x^2+2x+666} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f^{-1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})-f^{-1}(2))x^3}{(f(\alpha^2)-f(4\beta))x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f^{-1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})-f^{-1}(2))}{(f(\alpha^2)-f(4\beta))}x$

Όλα εξαρτώνται από τον αριθμό $\dfrac{(f^{-1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})-f^{-1}(2))}{(f(\alpha^2)-f(4\beta))}$

• Για κάθε $\alpha>1$ ισχύει $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}>2$

$(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}>2 \Leftrightarrow \alpha^2+1>2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1-2\alpha>0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2>0)$

Έτσι

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}>2 \overset{f^{-1}\searrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(\alpha+\dfrac{1}{\alpha})<f^{-1}(2) \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha+\dfrac{1}{\alpha})-f^{-1}(2)<0$ (2)

•Το τριώνυμο $x^2+\alpha x+\beta<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R},\alpha>1$ άρα η διακρίνουσα του είναι αρνητική δηλ $\Delta<0 \Leftrightarrow \alpha^2-4\beta<0 \Leftrightarrow \alpha^2<4\beta \overset{f^{-1}\searrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2)>f(4\beta) \Leftrightarrow f(\alpha^2)-f(4\beta)>0$ (3)

Από (2),(3) : $\dfrac{(f^{-1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})-f^{-1}(2))}{(f(\alpha^2)-f(4\beta))}<0$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f^{-1}(\alpha+\frac{1}{\alpha})-f^{-1}(2))x^3+2016}{(f(\alpha^2)-f(4\beta))x^2+2x+666}=-\infty$

iv)α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$.Έτσι:

$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow g(g(x_1))=g(g(x_2)) \Leftrightarrow g(x_1)+f(x_1^5+1)-4=g(x_2)+f(x_2^5+1)-4 \overset{g(x_1)=g(x_2)}{\Leftrightarrow} f(x_1^5+1)=f(x_2^5+1)$

$\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x_1^5+1=x_2^5+1 \Leftrightarrow x_1^5=x_2^5 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.

β)Για $x=0$

$(gog)(0)=g(0)+f(0^5+1)-4 \Leftrightarrow g(g(0))=g(0)+f(1)-4 \overset{f(1)=4}{\Leftrightarrow} g(g(0))=g(0)+4-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(g(0))=g(0) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(0)=0$

Η εξίσωση παίρνει την μορφή

$g(\ln(x+f(1)-3)^{x+1})-g(\dfrac{x}{f(2)-1})=g(0) \Leftrightarrow g(\ln(x+4-3)^{x+1})-g(\dfrac{x}{3-1})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(\ln(x+1)^{x+1})-g(\dfrac{x}{2})=0 \Leftrightarrow g(\ln(x+1)^{x+1})=g(\dfrac{x}{2}) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} \ln(x+1)^{x+1}=\dfrac{x}{2}, x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (4)

Η (4) έχει μια προφανή ρίζα το $x=0$.Θα εξετάσουμε αν είναι μοναδική

(Σκέψη στο πρόχειρο για $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

$\ln(x+1)^{x+1}=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1)=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow 2\ln(x+1)=\dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow 2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}=0$ *)*

Θεωρούμε συνάρτηση $\phi(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}, x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

Η φ παραγωγίσιμη στο $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$\phi'(x)=\left(2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$

Όταν $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ ισχύει $\phi'(x)\geq 0$ άρα η φ είναι γνησίως αυξουσα στο $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ οπότε η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.

57.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **με** $f(0)=0$ **και**

$$e^{2f(x)}+2xe^{f(x)}=1, x\in\mathbb{R}$$

i)Να δείξετε ότι $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ **,** $x\in\mathbb{R}$

ii)Να δείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

iii)Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2+1}+1=0$ **,για κάθε** $x\in\mathbb{R}$**.**

iv)Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **και** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$**.**

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)}-1974=0$ **έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.**

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-e^{f(x)}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}{x^4+x^2}$

v)Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)+x=f(x)$**.**

Λυση

i)Εχουμε:

$e^{2f(x)}+2xe^{f(x)}=1\Leftrightarrow e^{2f(x)}+2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow(e^{f(x)}+x)^2=x^2+1\Leftrightarrow\left|e^{f(x)}+x\right|=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ (1)

Θέτουμε $g(x)=e^{f(x)}+x$ οπότε η (1) παίρνει την μορφή: $|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ (2)

Από την (2) είναι προφανές ότι $g(x)\neq0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις συνεχών θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $g(0)=e^{f(0)}+0=1>0$, οπότε και $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έτσι από την (2) $g(x)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow e^{f(x)}+x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}-x\Rightarrow f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$, $x\in\mathbb{R}$

ii)Είναι $\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq0$

Άρα, $\sqrt{x^2+1}-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}(\sqrt{x^2+1}-x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}(\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}-1)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1)=$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}})=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}+1=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}+1=-1+1=0$$

iv)• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln(\sqrt{x^2+1}-x))$ (3).Ομως:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)\right)=(+\infty)\cdot2=+\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln(\sqrt{x^2+1}-x))\overset{u=\sqrt{x^2+1}-x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln(u))=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(\sqrt{x^2+1}-x))$ (4)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(\sqrt{x^2+1}-x))\overset{u=\sqrt{x^2+1}-x>0}{=}\lim_{u\to0^+}(\ln(u))=-\infty$$

v) $e^{f(x)}-1974=0\Leftrightarrow e^{f(x)}=1974\Leftrightarrow f(x)=\ln1974\Leftrightarrow f(x)-\ln1974=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-\ln1974\,,\,x\in\mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\ln1974\right)=+\infty$ άρα υπάρχει αριθμός α<0 τέτοιος ώστε $g(\alpha)>0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln1974\right)=-\infty$ άρα υπάρχει αριθμός β>0 τέτοιος ώστε $g(\beta)<0$

Άρα ισχύουν για την g όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $\left[\alpha,\beta\right]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow e^{f(x_0)}-1974=0$

iv) $$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-e^{f(x)}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-e^{f(x)}\right)(-\eta\mu\left(x\right))}{x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{f(x)}-1\right)\eta\mu x}{x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{f(x)}-1}{x^3+x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$

$$\overset{e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}-x}{=}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x^3+x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{x^3+x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)}{x(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(x+1)^2}{x(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+1-(x^2+2x+1)}{x(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{-2x}{x(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{-2}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{-2}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+(x+1)\right)}\right)\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$

$$=\frac{-2}{(0^2+1)\left(\sqrt{0^2+1}+(0+1)\right)}\cdot1=-1$$

v)Η εξισωση παιρνει την μορφη: $f(2x)+x=f(x)\Leftrightarrow f(2x)+2x=f(x)+x$ (5)

Θεωρούμε συνάρτηση $\Phi(x)=f(x)+x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,έτσι

$\Phi'(x)=f'(x)+1=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+1=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}\geq0$ άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε και 1-1.Η (5) γίνεται : $f(2x)+2x=f(x)+x\Leftrightarrow\Phi(2x)=\Phi(x)\overset{\Phi\ 1-1}{\Leftrightarrow}2x=x\Leftrightarrow x=0$

58.(all time classic..)Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **τέτοιες ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες:**

- $xf(x)-3x^4+x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x=0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $g^2(x)=f(0)x^6$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$ **(2)**
- $g(2)<0, g(-2)>0$ **(3)**

i)Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ii)Να δείξετε ότι $f(0)=1$.

iii)Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει τουλάχιστον μια λύση στο** $\mathbb{R}$.

iv)Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$.

v)Να δείξετε ότι η g διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$**,**$(0,+\infty)$**.**

vi)Να δείξετε ότι $g(x)=-x^3$

vii)Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την g^{-1}.

viii)Να βρείτε τα κοινά σημεία των Cg, Cg^{-1}.

Λύση

i)Για $x\neq 0$ η (1) γίνεται

$$f(x)=\frac{3x^4-x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=3x^3-1+\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}$$

Είναι: $\left|\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right|=\left|\frac{2}{x}\right|\left|\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x\right|\leq\left|\frac{2}{x}\right|$ άρα $-\left|\frac{2}{x}\right|\leq\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\leq\left|\frac{2}{x}\right|$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{2}{x}\right|\right)=0, \lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{2}{x}\right|=0$ από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=0$

Έτσι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-1+\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)=+\infty$

Ανάλογα δείχνουμε : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3-1+\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)=-\infty$

ii)Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι και συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^3-1+\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^3-1+2\frac{\eta\mu x}{x}\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=3\cdot 0^3-1+2\cdot 1\cdot 1^2=1$ άρα $f(0)=1$.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ τότε υπάρχει $x_1>0$ τέτοιο ώστε $f(x_1)>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ τότε υπάρχει $x_2<0$ τέτοιο ώστε $f(x_2)<0$

Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[x_1,x_2]$ οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(x_1,x_2)\subseteq\mathbb{R}$.

iv)Έχουμε $g(x)=0\Leftrightarrow g^2(x)=0\Leftrightarrow x^6=0\Leftrightarrow x=0$

v)Η συνάρτηση g στο $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται άρα σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Η συνάρτηση g στο $(0,+\infty)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται άρα σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα, η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

vi)Η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$ και από υπόθεση $g(-2)>0$ οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$g^2(x)=f(0)x^6 \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} g^2(x)=x^6 \Leftrightarrow g(x)=-x^3$ αφού $x<0$.

Επειδή $g(0)=0$ έχουμε τελικά $g(x)=-x^3$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$ (4)

Η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και από υπόθεση $g(2)<0$ οπότε $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$g^2(x)=f(0)x^6 \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} g^2(x)=x^6 \Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{(x^3)^2} \underset{g(x)<0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} -g(x)=x^3 \Leftrightarrow g(x)=-x^3$ αφού $x>0$.

Επειδή $g(0)=0$ έχουμε τελικά $g(x)=-x^3$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ (5)

Από (4) ,(5) : $g(x)=-x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

vii) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά

$-x_1^3=-x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3=x_2^3 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1 συνεπώς αντιστρέφεται. Για α ορίσουμε την g^{-1} λύνουμε την $y=g(x)$ ως προς x.

$$y=g(x)\Leftrightarrow y=-x^3 \Leftrightarrow (-x)^3=y \Leftrightarrow -x=\begin{cases}-\sqrt[3]{-y}, & y<0\\ \sqrt[3]{y}, & y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{-y}, & y<0\\ -\sqrt[3]{y}, & y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow g^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{-y}, & y<0\\ -\sqrt[3]{y}, & y\ge 0\end{cases}$$

Δηλαδή $g^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{-x}, & x<0\\ -\sqrt[3]{x}, & x\ge 0\end{cases}$

viii) Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases}y=g(x)\\ y=g^{-1}(x)\end{cases} \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases}y=g(x)\\ g(y)=g(g^{-1}(x))\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=g(x)\\ x=g(y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x^3\\ x=-y^3\end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}y=-x^3\\ x+y=-x^3-y^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x^3\\ x+y+x^3+y^3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-x^3\\ x+y+(x+y)(x^2-xy+y^2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x^3\\ (x+y)(1+x^2-xy+y^2)=0\end{cases} \overset{1+x^2-xy+y^2\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}y=-x^3\\ x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x^3\\ x=-y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-x^3\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+x^3=0\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y-y^3=0\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y(1-y^2)=0\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=0 \text{ ή } y=-1 \text{ ή } y=1\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0 \text{ ή } y=-1 \text{ ή } y=1\\ x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1\end{cases}$$

Άρα τα κοινά σημεία των Cg,Cg^{-1} είναι : O(0,0),A(-1,1),Γ(1,-1).

59.Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=\ln 4$ και

$$(x+1)f'(x)-f(x)=x+1-\frac{(x+1)^2}{x},x>0$$

i. Να δείξετε ότι $f(x)=(x+1)\ln\frac{x+1}{x}$

ii. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της .

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x+1=xe^{\frac{2020}{x+1}}$ έχει μια ακριβώς θετική ρίζα .

iv. Να δείξετε ότι $\frac{f(x)+\ln 4}{2}\geq f(\frac{x+1}{2})$

v. Να δείξετε ότι $\int_1^{2020}xf(x)dx>\int_1^{2020}f(x)dx$

Λύση

i)Είναι

$$(x+1)f'(x)-f(x)=x+1-\frac{(x+1)^2}{x}\Leftrightarrow(x+1)f'(x)-(x+1)'f(x)=x+1-\frac{(x+1)^2}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)f'(x)-(x+1)'f(x)}{(x+1)^2}=\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{(x+1)^2}{x(x+1)^2}\Leftrightarrow\frac{(x+1)f'(x)-(x+1)'f(x)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

Έτσι $\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x+c$,για $x=1$

$$\frac{f(1)}{1+1}=\ln(1+1)-\ln 1+c\Leftrightarrow\frac{\ln 4}{2}=\ln 2+c\Leftrightarrow\frac{2\ln 2}{2}=\ln 2+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα $\frac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x+1}=\ln\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=(x+1)\ln\frac{x+1}{x}$, $x>0$

ii)Έχουμε $f(x)=(x+1)\ln\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=(x+1)(\ln(x+1)-\ln x)$

Παραγωγίζουμε

$$f'(x)=\ln(x+1)-\ln x+(x+1)(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x})=\ln(x+1)-\ln x+1-\frac{x+1}{x}=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x},x>0 \ * \quad (1)$$

*Χρησιμοποιούμε την γνωστή ανισότητα $\ln x\leq x-1$ με το = να ισχύει για $x=1$, θέτοντας όπου x το $\frac{x+1}{x}$ είναι $0<\frac{x+1}{x}\neq 1$ γίνεται $\ln\frac{x+1}{x}<\frac{x+1}{x}-1\Leftrightarrow\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}<0$

Εναλλακτικά

$\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}=\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}-\frac{1}{x}$ που θυμίζει Θ.Μ.Τ

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στην συνάρτηση $h(t)=\ln t$ στο $\left[x,x+1\right]$ με $x>0$ άρα υπάρχει

$\xi\in\left(x,x+1\right)$ με $h'(\xi)=\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}\Rightarrow\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}$ (2)

Όμως $x<\xi<x+1\Rightarrow\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{x+1}$ και από (2)

$\dfrac{1}{x}>\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}\Leftrightarrow\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}-\dfrac{1}{x}<0\Leftrightarrow f'(x)<0$ αρ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

Ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}=+\infty$ $\quad$ ($\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln(1+\dfrac{1}{x})\right)=+\infty$)

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf στο x=0.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H.L}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\frac{x+1}{x})'}{(\frac{1}{x+1})'}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

Η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

Σύνολο τιμών

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,+\infty\right)$ άρα :

$f\left[\left(0,+\infty\right)\right]=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^=}f(x)\right)=\left(1,+\infty\right)$

iii)Για την εξίσωση έχουμε:

$$x+1=xe^{\frac{2020}{x+1}}\Leftrightarrow\ln(x+1)=\ln(xe^{\frac{2020}{x+1}})\Leftrightarrow\ln(x+1)=\ln x+\ln(e^{\frac{2020}{x+1}})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ln(x+1)=\ln x+\frac{2020}{x+1}\Leftrightarrow\ln(x+1)-\ln x=\frac{2020}{x+1}\Leftrightarrow\ln\frac{x+1}{x}=\frac{2020}{x+1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x+1)\ln\frac{x+1}{x}=2020\Leftrightarrow f(x)=2020$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$ και το $2020\in f\left[\left(0,+\infty\right)\right]=\left(1,+\infty\right)$, οπότε υπάρχει

$x_0\in\left(0,+\infty\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2020$.Το x_0 είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας της f.

iv) Η προς απόδειξη ανισότητα παίρνει την μορφή:

$$\frac{f(x)+\ln4}{2}\geq f(\frac{x+1}{2})\Leftrightarrow f(x)+\ln4\geq2f(\frac{x+1}{2})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-f(\frac{x+1}{2})\geq f(\frac{x+1}{2})-2\ln2\Leftrightarrow f(x)-f(\frac{x+1}{2})\geq f(\frac{x+1}{2})-f(1)$$

Η ισότητα ισχύει για x=1

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα

$\left[x,\frac{x+1}{2}\right],\left[\frac{x+1}{2},1\right]$, η f ικανοποίει τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα ανωτέρω διαστήματα

άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(x,\frac{x+1}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{x+1}{2},1\right)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(\frac{x+1}{2})}{x-\frac{x+1}{2}}=\frac{f(x)-f(\frac{x+1}{2})}{\frac{x-1}{2}}=2\frac{f(x)-f(\frac{x+1}{2})}{x-1}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\frac{x+1}{2})-f(1)}{\frac{x+1}{2}-1}=\frac{f(\frac{x+1}{2})-f(1)}{\frac{x-1}{2}}=2\frac{f(\frac{x+1}{2})-f(1)}{x-1}$$

Όμως

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow 2\frac{f(\frac{x+1}{2})-f(1)}{x-1}<2\frac{f(x)-f(\frac{x+1}{2})}{x-1}\Rightarrow f(\frac{x+1}{2})-f(1)<f(x)-f(\frac{x+1}{2})$$

Τελικά : $\frac{f(x)+\ln 4}{2}\geq f(\frac{x+1}{2})$ για κάθε $x>0$ **.**

v) Είναι $xf(x)-f(x)=(x-1)f(x)$

θεωρούμε την διαφορά $\Delta(x)=(x-1)f(x)=(x-1)(x+1)\ln\frac{x+1}{x}$

Όμως $x\in[1,2020]$ οπότε:

$x\geq 1\Leftrightarrow x-1\geq 0$ και $(x+1)\ln\frac{x+1}{x}\geq 1>0$ (από ερώτημα συνόλου τιμών)

Έτσι προκύπτει $\Delta(x)\geq 0$ και αφού έχει μια τουλάχιστον μη μηδενιζόμενη τιμή (π.χ $\Delta(2)\neq 0$ **)** θα είναι:

$$\int_0^{2020}\Delta(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^{2020}((x-1)f(x))dx>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{2020}(xf(x)-f(x))dx>0\Leftrightarrow\int_0^{2020}xf(x)dx-\int_0^{2020}f(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^{2020}xf(x)dx>\int_0^{2020}f(x)dx$$

60.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2e^{x-1}-\ln x$, $x>0$ **και** $g(x)=2x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}$

i)Να μελετήσετε τις f,g ως προς την κυρτότητα στο $(0,+\infty)$ **.**

ii)Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=1$**, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.**

iii)Για κάθε $x>0$ **να δείξετε ότι** $2e^{x-1}-2x\ge\ln\frac{4x}{(1+e^{x-1})^2}$

iv)Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ **την εξίσωση** $e^{x-1}=x+\ln\frac{2\sqrt{x}}{1+e^{x-1}}$

v) Να δείξετε ότι $\int_1^e(x^{2e^{x-1}-f(x)}+e^{\sqrt{2e^{x-1}-f(x)}})dx=e^2-1$

Λύση

i) $f'(x)=\left(2e^{x-1}-\ln x\right)'=2e^{x-1}-\frac{1}{x}, f''(x)=\left(2e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)'=2e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

$$g'(x)=\left(2x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\right)'=...=\frac{2}{1+e^{x-1}}$$

$g''(x)=\left(\frac{2}{1+e^{x-1}}\right)'=...=-\frac{2e^{x-1}}{(1+e^{x-1})^2}<0$ άρα η g είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$

ii) $f(1)=2e^{1-1}-\ln 1=2$, $f'(1)=2e^{1-1}-\frac{1}{1}=1$

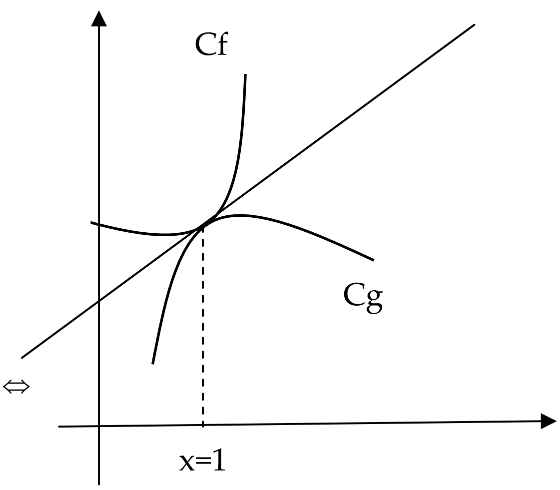
$g(1)=2+2\ln\frac{2}{1+e^{1-1}}=2+2\ln 1=2$, $g'(1)=\frac{2}{1+e^{1-1}}=1$

Δηλαδή $f(1)=g(1), f'(1)=g'(1)$ συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=1$,με εξίσωση $y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow...\Leftrightarrow y=x+1$

iii)Από το την κυρτότητα των f και g και την κοινή εφαπτομένη προκύπτει

$f(x)\ge y\ge g(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ δηλαδή

$f(x)\ge g(x)$ με την ισότητα όταν $x=1$



Άρα $f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow 2e^{x-1}-\ln x\ge 2x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\Leftrightarrow$

$2e^{x-1}-2x\ge +2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}+\ln x\Leftrightarrow 2e^{x-1}-2x\ge +\ln\frac{4}{(1+e^{x-1})^2}+\ln x\Leftrightarrow$

$2e^{x-1}-2x\ge\ln\frac{4x}{(1+e^{x-1})^2}$

iv) $e^{x-1}=x+\ln\frac{2\sqrt{x}}{1+e^{x-1}}\Leftrightarrow e^{x-1}=x+\ln\sqrt{x}+\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\Leftrightarrow 2e^{x-1}=2x+2\ln\sqrt{x}+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^{x-1}=2x+\ln x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\Leftrightarrow 2e^{x-1}+\ln x=2x+2\ln\frac{2}{1+e^{x-1}}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Από το σχήμα προκύπτει ότι x=1.

v) $I=\int_1^e (x^{2e^{x-1}-f(x)}+e^{\sqrt{2e^{x-1}-f(x)}})dx=\int_1^e (x^{2e^{x-1}-2e^{x-1}+\ln x}+e^{\sqrt{2e^{x-1}-2e^{x-1}+\ln x}})dx=\int_1^e (x^{\ln x}+e^{\sqrt{\ln x}})dx=$

$=\int_1^e x^{\ln x}dx+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx\Leftrightarrow I=\int_1^e x^{\ln x}dx+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx\quad (1)$

Θέτουμε $u=x^{\ln x}$, οπότε $u=x^{\ln x}\Leftrightarrow \ln u=\ln x^{\ln x}\Leftrightarrow \ln u=\ln^2 x\Leftrightarrow x=e^{\sqrt{\ln u}}$,

$dx=(e^{\sqrt{\ln u}})'du$,

• x=1 τότε $u=1$

• x=e τότε $u=e$

Άρα

$\int_1^e x^{\ln x}dx=\int_1^e u(e^{\sqrt{\ln u}})'du=\left[ue^{\sqrt{\ln u}}\right]_1^e-\int_1^e e^{\sqrt{\ln u}}du$

Άρα η (1) παίρνει την μορφή:

$I=\int_1^e x^{\ln x}dx+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx=\left[ue^{\sqrt{\ln u}}\right]_1^e-\int_1^e e^{\sqrt{\ln u}}du+\int_1^e e^{\sqrt{\ln x}}dx=\left[ue^{\sqrt{\ln u}}\right]_1^e=e\cdot e^{\sqrt{\ln e}}-1e^{\sqrt{\ln 1}}=e^2-1$

61.Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\lambda-1)x+6}{x+\mu},x>1$ **,** $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ **η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες** $y=2$ **και** $x=-1$**.**

i.Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}$**,** $x>1$

ii.Να βρείτε συνάρτηση $G(x)$ **με** $G'(x)=f(x)$ **για κάθε** $x>-1$**, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(0,2).**

Λύση

i.Η Cf έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=2$ και $x=1$ οπότε:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=2 \text{ και } \lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty \text{ ή } \lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$$

Είναι όμως:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\lambda-1)x+6}{x+\mu}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\lambda-1)+\frac{6}{x}}{1+\frac{\mu}{x}}=\lambda-1$$

Άρα $\lambda-1=2\Leftrightarrow\lambda=3$

$$f(x)=\frac{(3-1)x+6}{x+\mu}=\frac{2x+6}{x+\mu},x>-1$$

Αν $\mu\neq1$ θα είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+6}{x+\mu}=\dfrac{4}{-1+\mu}\in\mathbb{R}$ άτοπο

Αν $\mu=1$ θα είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+6}{x+1}\overset{x>-1}{=}$ οπότε $\mu=1$

ii.Έχουμε

$$G'(x)=f(x)=\frac{2x+6}{x+1}=\frac{2x+2+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+4}{x+1}=2+\frac{4}{x+1},x>-1$$

Δηλαδή

$G(x)=\left(2x+4\ln(x+1)\right)'$ άρα $G(x)=2x+4\ln(x+1)+c,x>-1$

Όμως $G(0)=2\Leftrightarrow2\cdot0+4\ln(0+1)+c=2\Leftrightarrow c=2$

Άρα $G(x)=2x+4\ln(x+1)+2,x>-1$

62.(all time classic)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x},x>0$ και το μεταβλητό σημείο M(α,f(α)) της Cf .Η εφαπτομένη (ε) της Cf στο σημείο Μ τέμνει τους άξονες Ox,Oy στα σημεία Α,Β αντίστοιχα.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) καθώς και τις συντεταγμένες των σημείων Α,Β ως συνάρτηση του α.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων ,είναι σταθερό.

iii) Έστω Γ,Δ οι προβολές του σημείου Μ στους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα .Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΓΜΔ να είναι ελάχιστη.

iv.Δίνεται η συνάντηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2\ln x,x>0$,να υπολογίσετε το εμβαδό που περικλείεται από την Cg, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=1,x=2.

v.Αν είναι γνωστό ότι η τετμημένη του Μ(το α) μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΟΒΑ την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία α=1 cm.

ΛΥΣΗ

i)Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

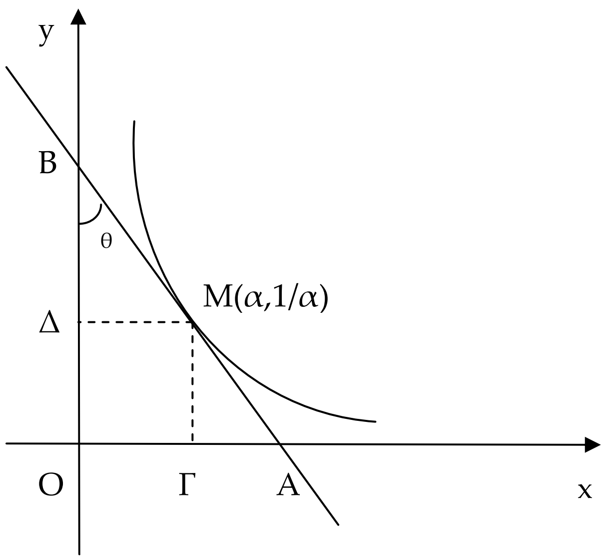
$$\varepsilon: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\alpha^2}x+\frac{2}{\alpha}$$

Η (ε) τέμνει τον άξονα x'x σε σημείο με τεταγμένη 0.

$$y=-\frac{1}{\alpha^2}\cdot x+\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow 0=-\frac{1}{\alpha^2}\cdot x+\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2}\cdot x=\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow x=2\alpha \text{ άρα } A(2\alpha,0)$$

Η (ε) τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τετμημένη 0.

Δηλαδή, $y=-\frac{1}{\alpha^2}\cdot 0+\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow y=\frac{2}{\alpha}$ άρα $B(0,\frac{2}{\alpha})$



ii)

$$\left(OAB\right)=\frac{1}{2}\left|(OA)\right|\left|(OB)\right|=\frac{1}{2}\left|2\alpha\right|\left|\frac{2}{\alpha}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\frac{2}{\alpha}=2 \text{ τ.μ}$$

iii) Οι συνταγμένες των σημείων Γ,Δ

είναι $\Gamma(\alpha,0),\Delta(0,\frac{1}{\alpha})$

Άρα, η περίμετρος είναι :

$$\Pi(\alpha)=2(\alpha+\frac{1}{\alpha})\ ,\alpha>0$$

$$\Pi'(\alpha)=\left(2(\alpha+\frac{1}{\alpha})\right)'=2-\frac{2}{\alpha^2}=\frac{2\alpha^2-2}{\alpha^2}$$

$$\Pi'(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{2\alpha^2-2}{\alpha^2}=0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=1$$

α	0		1		+∞
$\Pi'(\alpha)$	‖	-	0	+	
$\Pi(\alpha)$	‖	↘		↗	

Άρα, για α=1 η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη και οι συντεταγμένες του Μ είναι Μ(1,1).

iv. $g(x)=\left(f(x)\right)^2\ln x=\frac{\ln x}{x^2}, x>0$

Ισχύει: $g(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int_2^1\frac{1}{x^2}\ln x\,dx=-\int_2^1\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=-\left(\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_2^1-\int_2^1\frac{1}{x^2}dx\right)=$$

$$=-\left(\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_2^1-\left[-\frac{1}{x}\right]_2^1\right)=-\left(\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_2^1+\left[\frac{1}{x}\right]_2^1\right)=-\left(\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_2^1+\left[\frac{1}{x}\right]_2^1\right)=..=\frac{1-\ln 2}{2}\text{ τετρ. μονάδες}$$

v.θεωρούμε τις συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\theta(t)$ οι οποίες εκφράζουν την τετμημένη α του σημείου Μ και την γωνία ΟΒΑ κάθε χρονική στιγμή t αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\theta(t)$ συνδέονται με την σχέση

$$\varepsilon\varphi(\theta(t))=\frac{(OA)}{(OB)}=\frac{2\alpha(t)}{\frac{2}{\alpha(t)}}=\alpha^2(t)\quad(1)$$

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\alpha'(t)=4, \alpha(t_0)=1$ και αναζητούμε την $\theta'(t_0)$

Παραγωγίζουμε την σχέση (1)

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=2\alpha(t)\alpha'(t)\overset{\alpha'(t)=4}{=}8\alpha(t)$$

Επομένως

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\theta'(t_0)=8\alpha(t_0)\Leftrightarrow\theta'(t_0)=8\alpha(t_0)\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)$$

Όμως την χρονική στιγμή t_0, τα σημεία Α και Β είναι: Α(2,0),Β(0,2)

Οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\frac{(OB)}{(AB)}=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι

$$\theta'(t_0)=8\alpha(t_0)\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4\text{ rad / sec}$$

63. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+x+\kappa(\kappa-2)-2\lambda+3, & x\le 0\\ 2-\lambda^2-\ln(e^{2x}(x+1)), & x>0\end{cases}$$ **κ, λ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί**

Α. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ.

Β. Για κ=1 και λ=1

i) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες x_1,x_2 με $x_1<x_2$.

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-1}{x-1}+\dfrac{f(\beta)-1}{x-2}=2016$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x+f(x)=\eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1,x_2), όπου x_1,x_2 οι ρίζες του ερωτήματος iii).

vi) Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την εξίσωση

$$\ln\left(\frac{2^x+x-1}{2}\right)=6-2^{x+1}-2x$$

ΛΥΣΗ

Α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0).$$

Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^x+x+\kappa(\kappa-2)-2\lambda+3\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(2-\lambda^2-\ln(e^{2x}(x+1))\right)\Leftrightarrow e^0+0+\kappa(\kappa-2)-2\lambda+3=2-\lambda^2-\ln(e^{2\cdot 0}(0+1))\Leftrightarrow$$

$$1+\kappa(\kappa-2)-2\lambda+3=2-\lambda^2-\ln 1\Leftrightarrow 1+\kappa^2-2\kappa-2\lambda+3=2-\lambda^2\Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-2\lambda+2+\lambda^2=0$$

$$\kappa^2-2\kappa+1+1-2\lambda+\lambda^2=0\Leftrightarrow(\kappa-1)^2+(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=1 \text{ και } \kappa=1$$

Η συνάρτηση παίρνει την μορφή:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+x+1(1-2)-2\cdot 1+3, & x\le 0\\ 2-1^2-\ln(e^{2x}(x+1)), & x>0\end{cases} \text{ ή } f(x)=\begin{cases} e^x+x, & x\le 0\\ 1-(\ln(e^{2x})+\ln(x+1)), & x>0\end{cases} \text{ ή}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^x+x, & x\le 0\\ 1-2x-\ln(x+1)), & x>0\end{cases}$$

Β. i) Για την μονοτονία εργαζόμαστε συνθετικά :

• Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

$x_1<x_2$ (2)

(1)+(2): $x_1+e^{x_1}<x_2+e^{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$

• Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow -2x_1>-2x_2\Rightarrow 1-2x_1>1-2x_2$ (1)

$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow\ln(x_1+1)<\ln(x_2+1)\Rightarrow-\ln(x_1+1)>-\ln(x_2+1)$ (2)

(1)+(2): $1-2x_1-\ln(x_1+1)>1-2x_2-\ln(x_2+1)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι

$$x \le 0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(0) \Leftrightarrow f(x) \le 1$$

$$x > 0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 1$$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ το 1.

ii) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\Delta_1 = (-\infty, 0] \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 1]$$

$$\Delta_2 = (0, +\infty) \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (-\infty, 1)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = (-\infty, 1]$.

iii) $f(-1) = -1 + \dfrac{1}{e} < 0, f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 - \ln 2 < 0$

Η f είναι συνεχής στα $[-1, 0], [0, 1]$

$f(-1)f(0) < 0$, $f(0)f(1) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano σε καθένα από τα δυο διαστήματα Υπάρχουν $x_1 \in (-1, 0), x_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$

iv) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = (x-2)[f(\alpha) - 1] + (x-1)[f(\beta) - 1] - 2016(x-1)(x-2)$

$h(1) = -[f(\alpha) - 1] > 0$ $(f(\alpha) < 1,$ αφου 1 ολικο μεγιστο της f στο $x_0 = 0$ και $\alpha \ne 0)$

$h(2) = [f(\beta) - 1] < 0$ $(f(\beta) < 1,$ αφου 1 ολικο μεγιστο της f στο $x_0 = 0$ και $\beta \ne 0)$

Η h συνεχής στο $[1, 2]$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{f(\alpha) - 1}{x - 1} + \frac{f(\beta) - 1}{x - 2} = 2016.$$

v) Έστω η συνάρτηση $k(x) = f(x) + x - \eta\mu x$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Η k συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών.

Από (iii) $f(x_1) = f(x_2) = 0$ γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \le x, \forall x \in \mathbb{R}$ και το '=' ισχύει μόνο για $x = 0$. Συνεπώς έχουμε:

$k(x_1) = f(x_1) + x_1 - \eta\mu x_1 = x_1 - \eta\mu x_1 < 0$, αφού

$x_1 \in (-1, 0)$, άρα $|\eta\mu x_1| < |x_1| \Leftrightarrow -\eta\mu x_1 < -x_1 \Leftrightarrow x_1 - \eta\mu x_1 < 0$ και

$k(x_2) = f(x_2) + x_2 - \eta\mu x_2 = x_2 - \eta\mu x_2 > 0$, αφού

$x_2 \in (0, 1)$, άρα $|\eta\mu x_2| < |x_2| \Leftrightarrow \eta\mu x_2 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - \eta\mu x_2 > 0$.

Συνεπώς $k(x_1)k(x_2) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $k(x) = 0 \Leftrightarrow x + f(x) = \eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2).

vi)

$$\ln\left(\frac{2^x + x - 1}{2}\right) = 6 - 2^{x+1} - 2x \Leftrightarrow \ln\left(2^x + x - 1\right) - \ln 2 = 6 - 2^{x+1} - 2x \Leftrightarrow -6 - \ln 2 = -2^{x+1} - 2x - \ln\left(2^x + x - 1\right) \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(1) = f(2^x + x - 2) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} 1 = 2^x + x - 2 \Leftrightarrow 2^x + x - 3 = 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\phi(x) = 2^x + x - 3$,έχει προφανή ρίζα το 1 καθώς $\phi(1) = 0$, τώρα επειδή $\phi'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0$ δηλαδή ϕ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, η ρίζα είναι μοναδική.

64. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} xe^x+1, x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x}, x>0 \end{cases}$$

i.Να εξετάσετε την f ως προς στην συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.
ii.Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
iii.Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
iv.Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.
v.Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της ασύμπτωτης της Cf , της Cf και της ευθείας x=α , όπου α η θέση του τοπικού ελαχίστου της f και του άξονα y'y.

Λύση i.Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$

Εξετάζουμε την συνέχεια της f ,είναι συνεχής για $x\neq 0$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0=0$

$$f(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(xe^x+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\underset{D.H.L}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=1$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και κατ επέκταση συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη

$$f(x)=\left(xe^x+1\right)'=e^x+xe^x \text{ για κάθε } x<0$$

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2} \text{ για κάθε } x>0$$

Για $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+xe^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}e^x=1 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H.L}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H.L}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Από (1) ,(2) προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$

Τελικά $f'(x)=\begin{cases} xe^x+e^x, x<0 \\ \dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}, x>0 \end{cases}$

ii.Θα βρούμε τις ρίζες της f'.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} xe^x+e^x=0, x<0 \\ \dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=0, x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)e^x=0, x<0 & (3) \\ \dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=0, x>0 & (4) \end{cases}$$

(3): $(x+1)e^x=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$(4):\ \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = 0, \alpha\nu\ \ x > 0$

θέτουμε $h(x) = xe^x - e^x + 1, \alpha\nu\ \ x > 0$ ή $\dfrac{h(x)}{x^2} = 0, \alpha\nu\ \ x > 0$ ή $h(x) = 0$ αν $x > 0$

Όμως $h'(x) = \left(xe^x - e^x + 1\right)' = xe^x > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\infty\right)$

Έτσι $x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε η επίμαχη εξίσωση $h(x) = 0$ είναι αδύνατη όταν $x > 0$.

Έτσι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για την f′

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
f'	$-$	$+$ ∦	$+$
f	↘	↗	↗
		TE	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -1\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-1, +\infty\right)$

Επίσης παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση x=-1 το $f(-1) = -e^{-1} + 1 = \dfrac{e-1}{e}$

iii. $$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+2), x < 0 \\ \dfrac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3}, x > 0 \end{cases}$$

οπότε αν θέσουμε $g(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$,έχουμε:

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+2), x < 0 \\ \dfrac{g(x)}{x^3}, x > 0 \end{cases}$$

Είναι $g(0) = 0$ και $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x = x^2e^x > 0$ για $x > 0$ οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, +\infty\right)$ άρα

Για $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$ για κάθε $\left(0, +\infty\right)$, επομένως η εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για την f′′

x	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … $+\infty$
f''	$-$	$+$ ∦	$+$
f	⌒	⌣	⌣

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, -2\right]$ και κυρτή στα $\left[-2, 0\right], \left[0, +\infty\right)$

Το σημείο $M(-2, 1 - 2e^{-2})$ είναι σημείο καμπής.

Θα ήταν λάθος να απαντήσουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-2, +\infty\right)$ διότι δεν ορίζεται παράγωγος στο $x_0 = 0$

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, είναι κυρτή στο Δ τότε και μόνο τότε όταν η παράγωγος της είναι γνησία αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Το τελευταίο εξασφαλίζεται όταν η δεύτερη παράγωγος είναι θετική στο εσωτερικό του Δ.

iv. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x+1\right)=1$$

$$(\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\frac{1}{e^x}}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{D.H.L}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{e^x}{e^{2x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1}{e^x}}=-\lim_{x\to-\infty}e^x=0)$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{D.H.L}{=}}..=+\infty$$

Συνεπώς για πολύ μεγάλες τιμές του x η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{x^2}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{D.H.L}{=}}..=+\infty$$

Συνεπώς για πολύ μεγάλες τιμές του x η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Τελικά η Cf έχει μοναδική ασύμπτωτη την ευθεία y=1(οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$)

v.Για αν βρούμε το ζητούμενο εμβαδό πρέπει πρώτα να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης

-Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην θέση x=-1 άρα α=-1

-Η ευθεία x=0 δηλαδή ο άξονας y'y τέμνει την cf στο σημείο M(0,f(0)) και επειδή $f(0)=1$ ισχύει $0\cdot e^0+1=1$, έχουμε M(0,1)

-Η ευθεία y=1(οριζόντια ασύμπτωτη) τέμνει την γραφική παράσταση της f,αλλά και τον άξονα y'y , στο ίδιο σημείο M(0,1)

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_{-1}^{0}\left|1-f(x)\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|1-(1+xe^x)\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|-xe^x\right|dx\overset{x\le 0}{=}\int_{-1}^{0}(-xe^x)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}xe^xdx=\left[-xe^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^xdx=\left[-xe^x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x\right]_{-1}^{0}=..=\frac{e-2}{e}\ \tau.\mu$$

66.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει:

- $f'(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$, $F(0)=0$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(2h)-2F(h)}{h^2}=1$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $G(x)=|F(x)-x|,\ x\in\mathbb{R}$**, η οποία είναι παραγωγίσιμη.**

i.Να δείξετε η συνάρτηση F είναι κυρτή.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)>\dfrac{F(x)}{x}$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$**.**

iii.Να δείξετε $f(0)=1$ **και** $G(x)=F(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$**.**

iv.Να δείξετε ότι υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ **τέτοιο, ώστε** $\lambda^{2017}\int_0^1 F(e^x)dx+2\lambda=e\lambda+1$

v.Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left((e^{F^2(x)}-1)\ln|f(x)-1|\right)$

Λύση

i.η f′ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(2h)-2F(h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{\left(F(2h)-2F(h)\right)'}{\left(h^2\right)'}=\lim_{h\to 0}\frac{2f(2h)-2f(h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(2h)-f(h)\right)'}{h'}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(2f'(2h)-f'(h)\right)\overset{f'\ \text{συνεχης στο}\ x_0=0}{=}2f'(0)-f'(0)=f'(0)$$

Οπότε $f'(0)=1>0$ άρα $f'(x)>0\Leftrightarrow F''(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$ οπότε η F κυρτή.

ii.Η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0,x],\ x>0$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{F(x)}{x}$

$$\xi<x\overset{F\ \text{κυρτη αρα}\ F'\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\xi)<f(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{F(x)}{x}<f(x)$$

iii.Είναι $G(x)=|F(x)-x|\geq G(0)$ και από το Θ.Fermat έχουμε $G'(0)=0$.

Έτσι $0=G'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|F(x)-x|-|F(0)-0|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|F(x)-x|}{x}$

Ισχύει

$$0=\lim_{x\to 0^+}\frac{|F(x)-x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{F(x)-x}{x}\right|=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{F(x)-F(0)}{x-0}-1\right|=|f(0)-1|$$

Όμως $|f(0)-1|=0\Leftrightarrow f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=1$ άρα $F'(0)=1$

Η εφαπτομένη της CF στο (0,F(0)) είναι

$$(\varepsilon):\ \ y-F(0)=F'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)x\Leftrightarrow y=x$$

Η F είναι κυρτή άρα η CF είναι «πάνω» από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής δηλαδή ισχύει $F(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεπώς:

$$G(x)=|F(x)-x|=F(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$$

iv.Θεωρούμε την συνάρτηση $h(\alpha)=\alpha^{2017}\int_0^1 F(e^x)dx+2\alpha-e\alpha-1$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[0,1]$.Πραγματικά

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$,

$$h(0)=\int_0^1 0^{2017}F(e^x)dx+2\cdot 0-e\cdot 0-1=-1<0$$

$$h(1)=\int_0^1 1^{2017}F(e^x)dx+2\cdot 1-e\cdot 1-1=\int_0^1 F(e^x)dx+2-e-1=\int_0^1 F(e^x)dx+1-e$$

Στο ερώτημα δείξαμε ότι ισχύει $F(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Βάζουμε όπου x το e^x

$F(e^x)\geq e^x$ η ισότητα ισχύει μόνο στο $x_0=0$ άρα $F(e^x)>e^x \Leftrightarrow F(e^x)-e^x>0$, $x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς

$$\int_0^1 (F(e^x)-e^x)dx>0 \Leftrightarrow \int_0^1 F(e^x)dx-\int_0^1 e^x dx>0 \Leftrightarrow \int_0^1 F(e^x)dx-\left(e^1-e^0\right)>0 \Leftrightarrow \int_0^1 F(e^x)dx-e+1>0 \text{ άρα } h(1)>0$$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\left((e^{F^2(x)}-1)\ln\left|f(x)-1\right|\right)=\left((\dfrac{e^{F^2(x)}-1}{f(x)-1})\left(f(x)-1\right)\ln\left|f(x)-1\right|\right)=0\cdot 0=0$

διότι

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{F^2(x)}-1}{f(x)-1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2F(x)f(x)e^{F^2(x)}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}2F(x)e^{F^2(x)}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(f(x)-1\right)\ln\left|f(x)-1\right|\right)\overset{u=f(x)-1}{=}\lim\limits_{u\to 0}u\ln|u|=0$.

Διότι, αν λάβουμε πλευρικά όρια

$$\lim_{u\to 0^+}u\ln|u|=\lim_{u\to 0^+}u\ln u=\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim_{u\to 0^+}\left(-u\right)=0$$

$$\lim_{u\to 0^-}u\ln|u|=\lim_{u\to 0^-}u\ln(-u)=....=0$$

67.Η συνάρτηση $f:\left[1,e\right]\to\left[-1,4\right]$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=2$ και $f(e)=e+1$.Να δείξετε ότι:

A.i) Υπάρχουν $x_1,x_2\in\left(1,e\right)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

ii)Υπάρχει $\xi\in\left(1,e\right)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

iii)Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(1,e\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)\left[f'(x_0)-3f^2(x_0)\right]=x_0$$

B.i)Η ευθεία $\varepsilon:x+y=e+2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0\in\left(1,e\right)$.

ii)Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(1,e\right)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

ΛΥΣΗ

A.i) Η $f:\left[1,e\right]\to\left[-1,4\right]$ συνεχής σε κλειστό διάστημα άρα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $f(x_1)=-1$ και μέγιστη τιμή $f(x_2)=4$ με $x_1,x_2\in\left(1,e\right)$

(θυμηθείτε ότι $f(1)=2$ και $f(e)=e+1$) .Από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

ii) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$ άρα υπάρχει $\xi\in\left(1,e\right)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

iii) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)\left[f'(x)-3f^2(x)\right]-x$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[x_1,x_2\right]$.

- g συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]$,
- $g(x_1)=f(x_1)\left[f'(x_1)-3f^2(x_1)\right]-x_1=-3f^3(x_1)-x_1=-3(-1)^3-x_1=3-x_1$,

$g(x_2)=f(x_2)\left[f'(x_2)-3f^2(x_2)\right]-x_2=...=-192-x_2$

Παρατηρούμε $1<x_1<e \Leftrightarrow -1>-x_1>-e \Leftrightarrow 3-1>3-x_1>3-e \Leftrightarrow 2>g(x_1)>3-e$

$1<x_2<e \Leftrightarrow -1>-x_2>-e \Leftrightarrow -192-1>3-x_2>-192-e \Leftrightarrow -193>g(x_2)>-192-e$

Άρα $g(x_2)g(x_1)<0$.Άρα προκύπτει το ζητούμενο.

B.i)Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)+x-e-2=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $c_0\in(1,e)$.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-e-2$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,e]$,h συνεχής στο $[1,e]$

$h(1)=f(1)+1-e-2=2+1-e-2=1-e<0$

$h(e)=f(e)+e-e-2=e+1+e-e-2=e-1>0$ άρα $h(1)h(e)<0$ έτσι η $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $c_0\in(1,e)$.

ii)Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την h στα διαστήματα $[1,c_0],[c_0,e]$

Υπάρχουν $\xi_1\in(1,c_0),\xi_2\in(c_0,e)$

$$h'(\xi_1)=\frac{h(c_0)-h(1)}{c_0-1}=\frac{0-\left(f(1)+1-e-2\right)}{c_0-1}=\frac{0-\left(2+1-e-2\right)}{c_0-1}=\frac{e-1}{c_0-1} \qquad (2)$$

$$h'(\xi_2)=\frac{h(e)-h(c_0)}{e-c_0}=\frac{\left(f(e)+e-e-2\right)-0}{e-c_0}=\frac{\left(e+1+e-e-2\right)-0}{e-c_0}=\frac{e-1}{e-c_0} \qquad (3)$$

Όμως $h'(x)=\left(f(x)+x-e-2\right)'=f'(x)+1$ (4).Από (2),(3) ,(4) έχουμε:

$$h'(\xi_1)=\frac{e-1}{c_0-1}\Leftrightarrow f'(\xi_1)+1=\frac{e-1}{c_0-1}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{e-1}{c_0-1}-1\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{e-1-c_0+1}{c_0-1}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{e-c_0}{c_0-1}$$

$$h'(\xi_2)=\frac{e-1}{e-c_0}\Leftrightarrow f'(\xi_2)+1=\frac{e-1}{e-c_0}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_2)=\frac{e-1}{e-c_0}-1\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{e-1-e+c_0}{e-c_0}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{c_0-1}{e-c_0}$$

Άρα $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\dfrac{e-c_0}{c_0-1}\cdot\dfrac{c_0-1}{e-c_0}=1$

68.(T.Andreescu)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και F μια παράγουσα της f για την οποία ισχύει:

- $F(1)=\frac{1}{2}$
- $F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, **για κάθε** $x>0$

Να αποδείξετε ότι:

i) $F\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=\frac{1}{x}$, **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

ii)η συνάρτηση $g(x)=F(x)F\left(\frac{1}{x}\right), x>0$ **είναι σταθερή.**

iii) $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{4}{x}$ **για κάθε** $x>0$**.**

iv) $f(x)=2x^3$ **για κάθε** $x>0$**.**

Λύση

i)Για κάθε $x>0$ ισχύει $\frac{1}{x}>0$.Επομένως θέτουμε στην δοθείσα σχέση $F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ όπου x το $\frac{1}{x}$ και παίρνουμε $F\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

ii)Επειδή η F είναι παράγουσα της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ ισχύει:

$F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Έχουμε λοιπόν:

$$g'(x)=\left(F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=F'(x)F\left(\frac{1}{x}\right)+F(x)F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=f(x)F\left(\frac{1}{x}\right)+F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=f(x)F\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}x=0$$ για κάθε $x>0$.Άρα η g είναι σταθερή .

iii)Είναι $g(x)=c\Leftrightarrow F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=c$ για κάθε $x>0$.Για $x=1$ παίρνουμε

$F(1)\cdot F(1)=c\Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$.Επομένως $F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$ για κάθε $x>0$.Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $F(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$.Άρα, η F ως συνεχής διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0,+\infty)$.Όμως $F(1)=\frac{1}{2}>0$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$F(x)>0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Από τις σχέσεις $F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$, $F\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=\frac{1}{x}$ διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{4}{x} \text{ ,για κάθε } x>0$$

iv)Η σχέση που αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα γράφεται:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{4}{x}\Leftrightarrow\frac{F'(x)}{F(x)}=4\frac{1}{x}\Leftrightarrow(\ln F(x))'=(4\ln x)'$$

Έτσι $\ln F(x)=4\ln x+c$ για κάθε $x>0$.Για $x=1$

$$\ln F(1)=4\ln 1+c\Leftrightarrow\ln\frac{1}{2}=c\Leftrightarrow c=-\ln 2$$