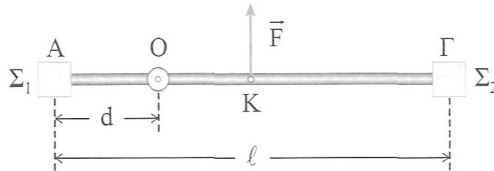


1

Η οριζόντια αβαρής ράβδος ΑΓ του ακόλουθου σχήματος έχει μήκος $\ell = 6 \text{ m}$ και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα $z'z$ που διέρχεται από σημείο της O . Η απόσταση του σημείου O από το άκρο Α της ράβδου είναι $d = 2 \text{ m}$. Στα άκρα Α και Γ της ράβδου είναι στερεωμένα δύο σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 1 \text{ kg}$ και $m_2 = 0,25 \text{ kg}$ αντίστοιχα. Αρχικά, το σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ασκείται στο μέσον Κ της ράβδου σταθερή οριζόντια δύναμη \vec{F} σταθερού μέτρου $F = 20 \text{ N}$ που είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο, οπότε το σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z$, αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\bar{\alpha}$.

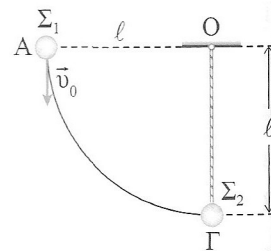


Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα ως προς τον άξονα $z'z$.
- Το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$.
- Τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη χρονική στιγμή t_1 .
- Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα.

2

Σημειακό σώμα Σ_2 μάζας m_2 ισορροπεί δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $\ell = 0,45 \text{ m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο O της οροφής. Δεύτερο σημειακό σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ βρίσκεται στην κορυφή Α λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ΑΓ που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $R = \ell$.



Κάποια χρονική στιγμή το σώμα Σ_1 εκτοξεύεται από το σημείο Α κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 4 \text{ m/s}$. Το σώμα Σ_1 ολισθαίνει στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου και τη χρονική στιγμή στην οποία διέρχεται από το κατώτερο σημείο του Γ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_2 . Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 κινείται ξανά στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου και φτάνει στην κορυφή του Α με μηδενική ταχύτητα.

Να υπολογίσετε:

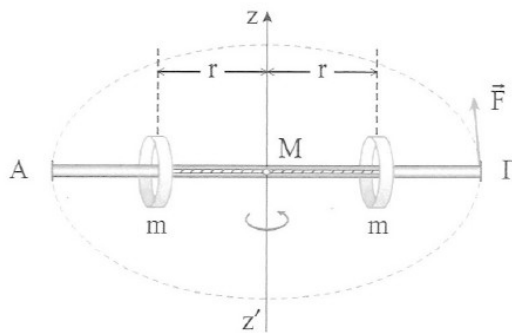
- Το μέτρο της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής των δύο σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση.
- Το μέτρο της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα $x'x$ αμέσως μετά την κρούση.

- γ. Το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ αμέσως μετά την κρούση.
- δ. Τα μέτρα των μεταβολών των στροφορμών των δύο σημειακών σωμάτων ως προς τον άξονα $x'x$, εξαιτίας της κρούσης.
- ε. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σημειακού σώματος Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή στην οποία το νήμα σχηματίζει για πρώτη φορά μετά την κρούση γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο O .

3

Η λεπτή αβαρής ράβδος $ΑΓ$ του ακόλουθου σχήματος έχει μήκος $\ell = 8 \text{ m}$ και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα $z'z$ που διέρχεται από το μέσον της M . Η ράβδος διέρχεται μέσα από δύο μεταλλικούς δακτυλίους αμελητέων διαστάσεων που έχουν την ίδια μάζα $m = 0,2 \text{ kg}$ και απέχουν την ίδια απόσταση $r = 2 \text{ m}$ από τον άξονα $z'z$. Οι δύο δακτύλιοι συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_\theta = 160 \text{ N}$.

Αρχικά, το σύστημα ράβδος – δακτύλιοι είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ασκείται στο άκρο Γ της ράβδου οριζόντια δύναμη \vec{F} σταθερού μέτρου που είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο, οπότε το σύστημα ράβδος – δακτύλιοι αρχίζει να περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το νήμα κόβεται και οι δακτύλιοι, λόγω αδράνειας, ωθούνται στα άκρα της ράβδου, όπου ακινητοποιούνται σε σχέση με τη ράβδο.

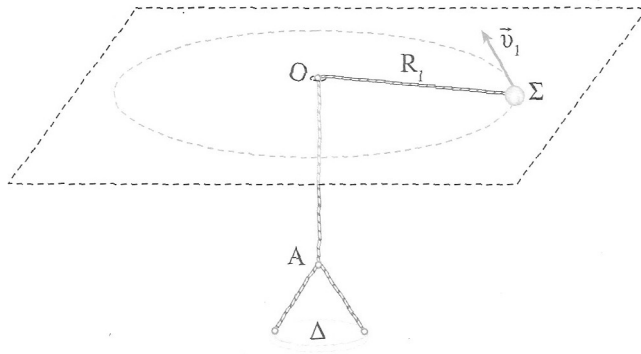


Να υπολογίσετε:

- α. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι τη χρονική στιγμή t_1 .
- β. Το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των δύο δακτυλίων ως προς τον άξονα $z'z$ τη χρονική στιγμή t_1 .
- γ. Το μέτρο της δύναμης \vec{F} .
- δ. Το μέτρο της τελικής γωνιακής ταχύτητας του συστήματος ράβδος – δακτύλιοι.

4

Το σφαιρίδιο Σ του ακόλουθου σχήματος έχει μάζα $m = 0,2 \text{ kg}$ και είναι δεμένο στο ένα άκρο τεντωμένου, αβαρούς και μη εκτατού νήματος. Το σφαιρίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R_1 = 1 \text{ m}$ επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το νήμα διέρχεται από μια μικρή οπή του επιπέδου που βρίσκεται στο κέντρο O της κυκλικής τροχιάς του, μέσω της οποίας μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές. Στο ελεύθερο άκρο A του νήματος έχουμε αναρτήσει δίσκο Δ μάζας $M = 2 \text{ kg}$.



- α. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο O της κυκλικής τροχιάς του και είναι κάθετος στο επίπεδο της. Μετακινούμε τον δίσκο κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $h = 0,5$ m και διαπιστώνουμε ότι για να ισορροπήσει ο δίσκος στη νέα του θέση, πρέπει να τοποθετήσουμε πάνω σε αυτόν σώμα Σ_1 μάζας m_1 .
- β. Να υπολογίσετε το μέτρο της νέας ταχύτητας περιστροφής του σφαιριδίου.
- γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου, εξαιτίας της μετακίνησης του δίσκου.
- δ. Να υπολογίσετε τη μάζα του σώματος Σ_1 .

5

Δύο αστροναύτες μάζας $m = 60$ kg ο καθένας συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό σχοινί μήκους $\ell = 8$ m. Το όριο θραύσης του σχοινιού είναι $T_{\theta\rho} = 24.000$ N. Οι αστροναύτες βρίσκονται εκτός πεδίου βαρύτητας και περιστρέφονται γύρω από το μέσον K του σχοινιού με ταχύτητες ίδιου μέτρου $v_1 = 5$ m/s.

- α. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των δύο αστροναυτών ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον K του σχοινιού και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής τους.
- β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε κάθε αστροναύτη από το σχοινί.

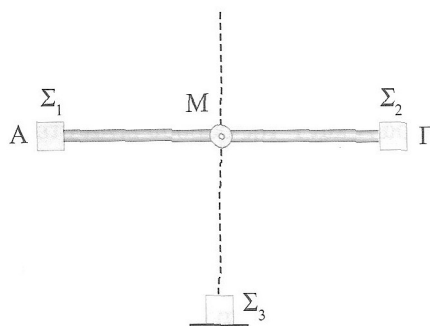
Κάποια χρονική στιγμή οι αστροναύτες αρχίζουν να τραβούν το σχοινί, ελαπτώνοντας τη μεταξύ τους απόσταση κατά 50% σε σχέση με την αρχική της τιμή.

- γ. Να υπολογίσετε το πλήθος των περιστροφών που εκτελούν οι αστροναύτες σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 10$ s, από τη χρονική στιγμή στην οποία μείωσαν τη μεταξύ τους απόσταση στο 50% της αρχικής της τιμής.
- δ. Να υπολογίσετε την ενέργεια που δαπάνησαν οι δύο αστροναύτες, για να μειώσουν τη μεταξύ τους απόσταση στο 50% της αρχικής της τιμής.
- ε. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση ℓ_{\min} στην οποία μπορούν να πλησιάσουν μεταξύ τους οι δύο αστροναύτες, ώστε να μην κοπεί το νήμα.

Να θεωρήσετε ότι κατά τη μετακίνηση των αστροναυτών το σχοινί παραμένει συνεχώς τεντωμένο και το σημείο K συνεχίζει να είναι το μέσον της μεταξύ τους απόστασης.

6

Η λεπτή αβαρής ράβδος ΑΓ του διπλανού σχήματος έχει μήκος $\ell = 2 \text{ m}$ και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα $x'x'$ που διέρχεται από το μέσον της Μ. Στα άκρα Α και Γ της ράβδου είναι στερεωμένα τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 1,5 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα.



Αρχικά, το σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα συγκρατείται ακίνητο με τη ράβδο σε οριζόντια θέση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.

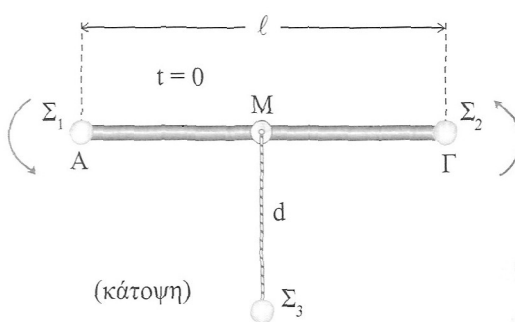
- Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x'$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_1 τη χρονική στιγμή t_1 , στην οποία η ράβδος γίνεται για πρώτη φορά κατακόρυφη.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $x'x'$ τη χρονική στιγμή t_1 .

Τη χρονική στιγμή t_1 το σημειακό σώμα Σ_1 συγκρούεται πλαστικά με άλλο σημειακό σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 1,5 \text{ kg}$, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο.

- Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.
- Να υπολογίσετε το ποσοστό επί τοις εκατό (%) της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση που μετατράπηκε σε θερμότητα, εξαιτίας της κρούσης.

7

Η λεπτή, οριζόντια και αβαρής ράβδος ΑΓ που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα έχει μήκος $\ell = 4 \text{ m}$, είναι αρχικά ακίνητη και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα $z'z'$ που διέρχεται από το μέσον της Μ. Στα άκρα Α και Γ της ράβδου είναι στερεωμένα δύο σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 1 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$ αντίστοιχα.



Σημειακό σώμα Σ_3 μάζας $m_3 = 3 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο πάνω στο οριζόντιο δάπεδο, δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $d = \ell/2$, του οποίου το άλλο άκρο είναι δεμένο στο μέσον Μ της ράβδου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ προσδίδουμε στο σύστημα της ράβδου ΑΓ και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}_0$ με φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη, οπότε το σύστημα αρχίζει να εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα $z'z'$.

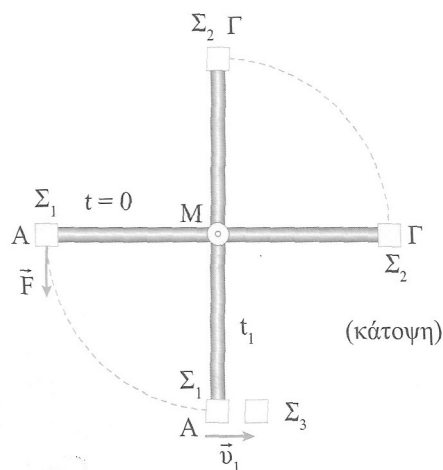
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,05\pi$ s στην οποία το σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα έχει διαγράψει γωνία $\Delta\theta = (\pi/2)$ rad από τη χρονική στιγμή στην οποία άρχισε να περιστρέφεται, το σημειακό σώμα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά με το σημειακό σώμα Σ_3 , χωρίς να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα. Αμέσως μετά την κρούση το σύστημα της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ακινητοποιείται, ενώ το σημειακό σώμα Σ_3 αρχίζει να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω στο οριζόντιο δάπεδο.

- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\bar{\omega}_0$.
- Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ακριβώς πριν από την κρούση.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_3 αμέσως μετά την κρούση.
- Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.
- Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία το σημειακό σώμα Σ_3 συγκρούεται με το σημειακό σώμα Σ_2 .

Η χρονική διάρκεια της κρούσης να θεωρηθεί αμελητέα.

8

Το σύστημα της ράβδου ΑΓ και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα βρίσκεται αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η ράβδος ΑΓ έχει μήκος $\ell = 1$ m και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, στο λείο οριζόντιο δάπεδο γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα $z'z'$ που διέρχεται από το μέσον της Μ. Τα σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 είναι στερεωμένα στα άκρα Α και Γ της ράβδου αντίστοιχα και έχουν την ίδια μάζα $m = 1$ kg.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ασκείται στο άκρο Α της ράβδου οριζόντια δύναμη \vec{F} σταθερού μέτρου που είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο, οπότε το σύστημα της ράβδου και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $z'z'$, αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\bar{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,1\pi$ s στην οποία το σύστημα ράβδος – σημειακά σώματα Σ_1 και Σ_2 έχει περιστραφεί κατά γωνία $\Delta\theta = (\pi/2)$ rad, το σημειακό σώμα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σημειακό σώμα Σ_3 μάζας $m' = 2$ kg, που βρίσκεται ακίνητο πάνω στο οριζόντιο δάπεδο.

Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος της ράβδου ΑΓ και των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .
- Το μέτρο της στροφορμής των σημειακών σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τον άξονα $z'z'$ ακριβώς πριν από την κρούση.

- γ. Το μέτρο της δύναμης \vec{F} .
- δ. Το μέτρο της ταχύτητας του σημειακού σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.
- ε. Την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των τριών σημειακών σωμάτων Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 , εξαιτίας της κρούσης.