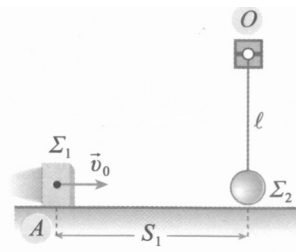


1

Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 1 \text{ kg}$  εκτοξεύεται από το σημείο  $A$  ενός οριζώντιου δαπέδου με οριζόντια ταχύτητα  $\vec{v}_0$ , μέτρου  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ . Το σώμα  $\Sigma_1$  αφού διανύσει διάστημα  $S_1 = 4,5 \text{ m}$  συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 3 \text{ kg}$ , η οποία κρέμεται με αβαρές νήμα μήκους  $\ell = 0,5 \text{ m}$  από ακλόνητο σημείο  $O$ . Το σώμα  $\Sigma_1$  παρουσιάζει με το οριζόντιο δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu = 0,4$ .



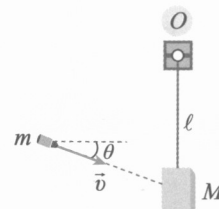
**A.** Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
  - την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.
  - το διάστημα που θα διανύσει το σώμα  $\Sigma_1$  μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει.
  - το % ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_1$  που μετατράπηκε συνολικά σε θερμότητα λόγω τριβής κατά την κίνησή του στο οριζόντιο δάπεδο.
- B. α.** Η σφαίρα  $\Sigma_2$  θα εκτελέσει ανακύκλωση γύρω από το σημείο  $O$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- β.** Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας  $\Sigma_2$  τη στιγμή που το νήμα γίνεται οριζόντιο για πρώτη φορά.

Δίνεται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

2

Ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $M = 0,98 \text{ kg}$  ισορροπεί δεμένο στην κάτω άκρη κατακόρυφου νήματος  $\ell = 2 \text{ m}$ , η άλλη άκρη του οποίου είναι δεμένη ακλόνητα στην οροφή. Ένα βλήμα μάζας  $m = 0,02 \text{ kg}$ , που κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$ , η οποία σχηματίζει γωνία  $\theta$  κάτω από τον οριζόντιο με  $\sin\theta = 0,8$ , σφηνώνεται στο σώμα  $\Sigma$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



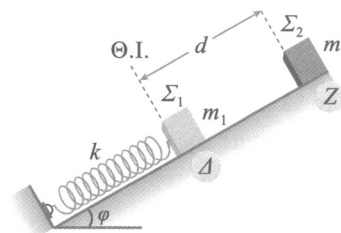
Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά σε θέση, όπου το νήμα σχηματίζει γωνία  $\varphi$  με την κατακόρυφο, με  $\sin\varphi = 0,6$ . Να βρείτε:

- το μέτρο της ταχύτητας  $\vec{v}$ , που είχε το βλήμα πριν την κρούση.
- την απώλεια κινητικής ενέργειας κατά την κρούση.
- την τάση του νήματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση, αλλά και τη στιγμή που το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία.
- το μέτρο της ταχύτητας  $\vec{v}'$  που θα έπρεπε να είχε το βλήμα πριν την κρούση, ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελέσει ακριβώς ανακύκλωση, να διαγράψει δηλαδή με ασφάλεια κατακόρυφο κύκλο.

Δίνεται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

3

Το ελατήριο του σχήματος είναι ιδανικό, έχει σταθερά  $k = 100 \text{ N/m}$  και το ένα άκρο του είναι στερεωμένο ακλόνητα, ενώ στο άλλο έχουμε δέσει σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 2 \text{ kg}$ . Το σώμα  $\Sigma_1$  ισορροπεί ακίνητο σε σημείο  $\Delta$  ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου κλίσης  $\varphi = 30^\circ$ . Σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 2 \text{ kg}$  ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου και φτάνοντας στο σημείο όπου βρίσκεται ακίνητο το σώμα  $\Sigma_1$  συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά μαζί του. Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται για δεύτερη φορά μετά την κρούση, όταν μηδενιστεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.



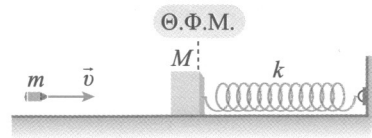
Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται για δεύτερη φορά μετά την κρούση, όταν μηδενιστεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

- Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.
- Να βρείτε την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Να υπολογίσετε την απόσταση  $d$  του σημείου  $\Delta$  από την κορυφή  $Z$  του κεκλιμένου επιπέδου.
- Να βρείτε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν η κρούση είναι μετωπική και ελαστική. Η απόσταση  $d$  έχει την τιμή που υπολογίσατε στο ερώτημα γ.

Δίνεται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Για τις πράξεις:  $\sqrt{6} \approx 2,45$ .

4

Ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $M = 0,9 \text{ kg}$  που είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς  $k = 100 \text{ N/m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα, ισορροπεί ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένα βλήμα μάζας  $m = 0,1 \text{ kg}$  που κινείται



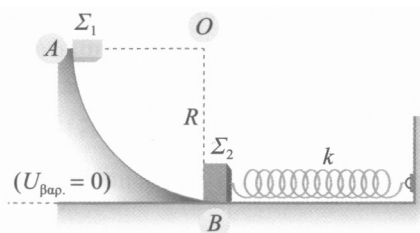
οριζόντια με ταχύτητα μέτρου  $v = 20\sqrt{5} \text{ m/s}$ , σφηνώνεται στο σώμα  $\Sigma$ . Το συσσωμάτωμα κατά την κίνησή του παρουσιάζει τριβή με το επίπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu = 0,5$ . Να βρείτε:

- το συνολικό διάστημα  $S$  που διανύει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, αν τελικά σταματάει στην αρχική του θέση.
- το % ποσοστό της αρχικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα,
  - εξαιτίας της κρούσης.
  - εξαιτίας της τριβής.
- το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που σταματά στιγμιαία για δεύτερη φορά.

Δίνεται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

5

Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 2 \text{ kg}$  αφήνεται από το σημείο  $A$  του τεταρτοκυκλίου  $AB$  του σχήματος, ακτίνας  $R = 5 \text{ m}$ . Όταν το σώμα  $\Sigma_1$  φτάνει στη βάση  $B$  του τεταρτοκυκλίου, έχει «χάσει» εξαιτίας των τριβών το 75% της αρχικής δυναμικής ενέργειας του. Αμέσως μετά το σημείο  $B$  το σώμα  $\Sigma_1$  συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα  $\Sigma_2$ , μάζας  $m_2$ , το οποίο είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k = 400 \text{ N/m}$ . Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και έχει το άλλο άκρο του στερεωμένο ακλόνητα σε κατακόρυφο τοίχο. Κατά την πλαστική κρούση «χάνεται» το 60% της κινητικής ενέργειας που είχε το σώμα  $\Sigma_1$  ακριβώς πριν την κρούση. Το συσσωμάτωμα κατά την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο παρουσιάζει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu = 0,2$ . Να υπολογίσετε:



Να υπολογίσετε:

- το μέτρο ταχύτητας του σώματος  $\Sigma_1$  τη στιγμή που φτάνει στη βάση  $B$  του τεταρτοκυκλίου.
- το μέτρο ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
- τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.
- το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση που «χάνεται» εξαιτίας της τριβής κατά την κίνησή του στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να επιστρέψει για πρώτη φορά στο σημείο  $B$ .

Δίνεται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

6

Δύο σφαίρες  $A$  και  $B$  ίσων μαζών  $m_A = m_B = 1 \text{ kg}$  βρίσκονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα  $A$  κινείται με ταχύτητα  $v_1 = 8 \text{ m/s}$ , χωρίς να περιστρέφεται, και συγκρούεται όχι κεντρικά, αλλά ελαστικά, με την αρχικά ακίνητη σφαίρα  $B$ .

- Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.
- Αν η σφαίρα  $A$  μετά την κρούση κινείται σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία  $\varphi = 30^\circ$  με τη διεύθυνση της κίνησής της πριν από την κρούση, να βρείτε:
  - τα μέτρα ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.
  - το μέτρο μεταβολής ορμής της σφαίρας  $A$  λόγω κρούσης.
  - το ποσοστό % μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας  $A$  λόγω κρούσης.

7

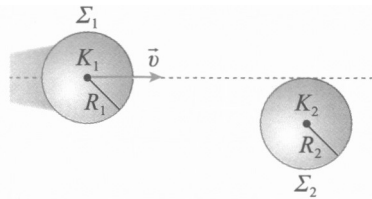
Ένα μικρό σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m$  και αρχικής ταχύτητας μέτρου  $v_0 = 30 \text{ m/s}$  συγκρούεται με άλλο σώμα  $\Sigma_2$ , μάζας  $M = 2m$ , που αρχικά ηρεμεί. Αμέσως μετά την κρούση που δεν είναι κεντρική, το σώμα  $\Sigma_1$  κινείται με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 10\sqrt{5} \text{ m/s}$ , σχηματίζοντας γωνία  $\theta_1$  με την αρχική κατεύθυνση κίνησής του, για την οποία ισχύει:  $\text{syn}\theta_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$  και  $\eta\mu\theta_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

- Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας  $\bar{v}_2$  και να προσδιορίσετε τη διεύθυνση κίνησης του σώματος  $\Sigma_2$  αμέσως μετά την κρούση.
- Να αιτιολογήσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή όχι.
- Να βρείτε την τιμή του λόγου μαζών  $M/m$ , ώστε να μεταβιβάζεται στο σώμα  $\Sigma_2$  το 36% της κινητικής ενέργειας που είχε αρχικά το σώμα  $\Sigma_1$ , αν το σώμα  $\Sigma_1$  προσπίπτει με την ίδια ταχύτητα  $\bar{v}_0$  και εκτελεί το ίδιο είδος κρούσης με το σώμα  $\Sigma_2$ . Το σώμα  $\Sigma_1$  μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα  $\bar{v}'_1$  που σχηματίζει γωνία  $\theta_1 = 60^\circ$  με την αρχική κατεύθυνση κίνησής του.

Όλες οι κινήσεις γίνονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

8

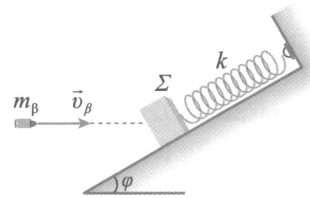
Μικρή σφαίρα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1$  και ακτίνας  $R$  κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 12 \text{ m/s}$ . Η ταχύτητα  $\bar{v}_1$  έχει τέτοια διεύθυνση, ώστε να εφάπτεται ακίνητης αρχικά σφαίρας  $\Sigma_2$ , ίσης μάζας  $m_2$  με τη σφαίρα  $\Sigma_1$  ( $m_2 = m_1$ ) και ίσης ακτίνας  $R$ . Η κρούση των δύο σφαιρών είναι μη κεντρική και ελαστική.



- Να αποδείξετε ότι οι δύο σφαίρες θα κινηθούν σε διευθύνσεις που είναι κάθετες μεταξύ τους και να προσδιορίσετε τις γωνίες που σχηματίζουν οι διευθύνσεις τους με την αρχική διεύθυνση κίνησης της σφαίρας  $\Sigma_1$ .
- Να υπολογίσετε τα μέτρα ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.
- Να βρείτε το % ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας  $\Sigma_1$  που μεταβιβάζεται στη σφαίρα  $\Sigma_2$ .

9

Σώμα  $\Sigma$  μάζας  $m = 2 \text{ kg}$  ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης  $\varphi = 30^\circ$  συνδεδεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς  $k = 50 \text{ N/m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ένα βλήμα μάζας  $m_\beta = 1 \text{ kg}$  που κινείται οριζόντια με ταχύτητα  $v_\beta = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$  σφηνώνεται στο σώμα  $\Sigma$ . Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται κινείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο και σταματά, αφού διανύσει διάστημα  $x_1 = 0,3 \text{ m}$ . Να υπολογίσετε:

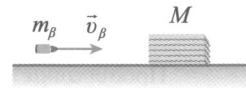


- το μέτρο ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
- το % ποσοστό αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα κατά την κρούση.
- τον συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu$  που παρουσιάζει το συσσωμάτωμα με το κεκλιμένο επίπεδο, αν είναι γνωστό ότι τριβή ολίσθησης εμφανίζεται μόνο στο τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου που βρίσκεται πάνω από τη θέση που ορίζει το φυσικό μήκος του ελατηρίου (Θ.Φ.Μ.).
- το % ποσοστό αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα εξαιτίας της τριβής κατά την κίνηση του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Δίνεται:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

10

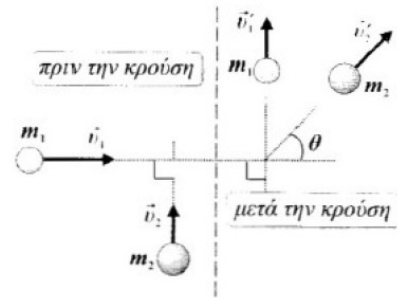
Ένα βλήμα μάζας  $m_\beta = 0,2 \text{ kg}$  που κινείται οριζόντια προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου  $v_\beta = 100 \text{ m/s}$  σε ξύλινο σώμα μάζας  $M = 4,8 \text{ kg}$ , το οποίο αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη διάρκεια της ενσφήνωσης το βλήμα αλληλεπιδρά με το ξύλινο σώμα με σταθερή δύναμη  $\vec{F}$ . Τη στιγμή που ολοκληρώνεται η διείσδυση του βλήματος μέσα στο σώμα, το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά  $\Delta x = 0,02 \text{ m}$  από την αρχική του θέση. Να υπολογίσετε:



- την ταχύτητα του συσσωματώματος, τη στιγμή που ολοκληρώνεται η διείσδυση μέσα στο σώμα.
- το % ποσοστό αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα κατά την κρούση.
- το μέτρο της δύναμης αλληλεπίδρασης  $\vec{F}$ .
- το διάστημα που εισχώρησε το βλήμα μέσα στο σώμα.

11

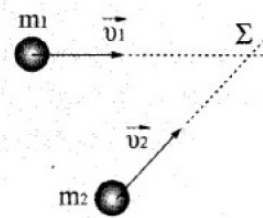
Δύο μικρές λείες σφαίρες (1) και (2) με μάζες  $m_1 = 2 \text{ kg}$  και  $m_2 = 4 \text{ kg}$  κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες μέτρου  $12 \text{ m/s}$  και  $10 \text{ m/s}$  αντίστοιχα, οι διευθύνσεις των οποίων σχηματίζουν γωνία  $90^\circ$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται πλάγια και ανελαστικά. Μετά την κρούση η ταχύτητα της σφαίρας (1) σχηματίζει γωνία  $90^\circ$  με την αρχική της διεύθυνση, ενώ η ταχύτητα της σφαίρας (2) σχηματίζει γωνία  $\theta = 45^\circ$  με την αρχική της διεύθυνση. Να υπολογίσετε:



- το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας (2) αμέσως μετά την κρούση,
- το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας (1) εξαιτίας της κρούσης.

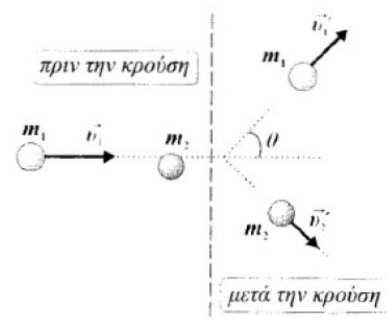
12

Οι δύο σφαίρες του σχήματος έχουν μάζες  $m_1 = 6 \text{ kg}$  και  $m_2 = 4 \text{ kg}$  και κινούνται με ταχύτητες μέτρου  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  και  $v_2 = 15 \text{ m/s}$ . Οι φορείς των δύο ταχυτήτων τέμνονται στο σημείο  $\Sigma$  σχηματίζοντας γωνία  $\hat{\phi} = 60^\circ$ . Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος των δύο σφαιρών μετά την πλαστική τους κρούση στο σημείο  $\Sigma$ .



13

Μικρή λεία σφαίρα μάζας  $m_1 = 4 \text{ kg}$  κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου  $15 \text{ m/s}$  και συγκρούεται πλάγια με ακίνητη λεία σφαίρα μάζας  $m_2 = m_1$ . Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία και η σφαίρα μάζας  $m_1$  έχει ταχύτητα  $\vec{v}'_1$  που σχηματίζει γωνία  $\theta = 37^\circ$  με τη διεύθυνση της κίνησής της πριν την κρούση.



- Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.
- Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.
- Να βρείτε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης. Δίνεται ότι  $\eta\mu 37^\circ = 0,6$  και  $\sigma\upsilon\nu 37^\circ = 0,8$ .