

# ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄

### ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

### ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

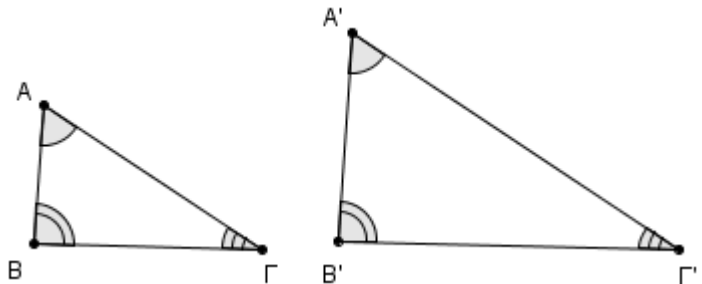
#### Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

#### Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα, για να είναι όμοια τα τρίγωνα πρέπει :

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \quad \text{και}$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma B}{\Gamma'B'}$$



#### Θεώρημα

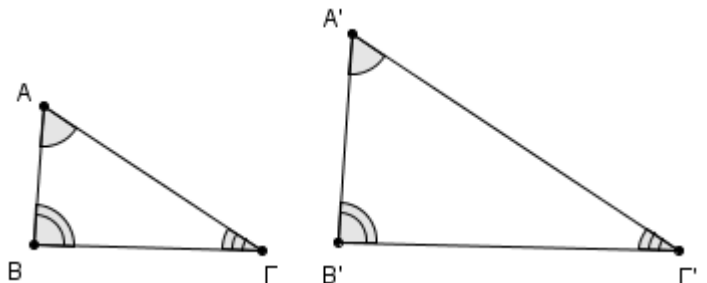
Ο λόγος των **περιμέτρων** δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

Δηλαδή : αν  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma B}{\Gamma'B'} = \lambda$  (λόγος ομοιότητας) τότε και  $\frac{AB+A\Gamma+\Gamma B}{A'B'+A'\Gamma'+\Gamma'B'} = \lambda$

#### Θεώρημα I (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Δηλαδή αρκεί  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

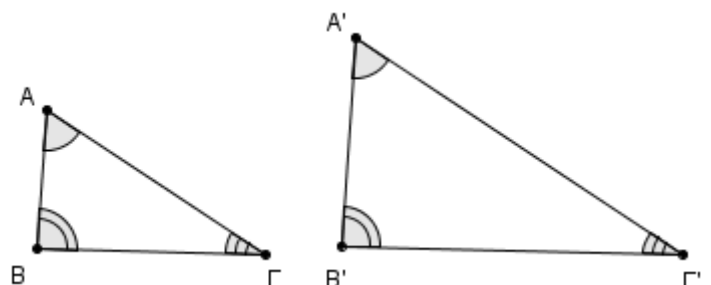


#### ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.
- (ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.
- (iii) Δυο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

#### Θεώρημα II (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

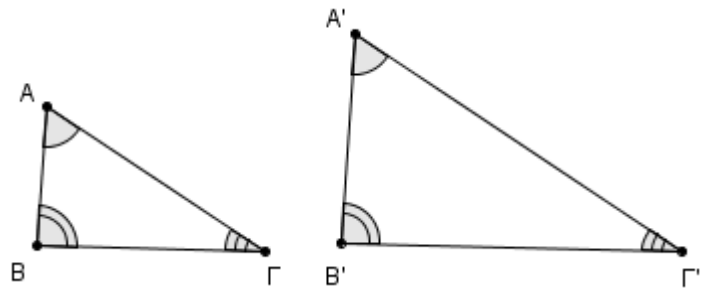


Δηλαδή αρκεί  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

### Θεώρημα ΙΙΙ (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Δηλαδή αρκεί  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$

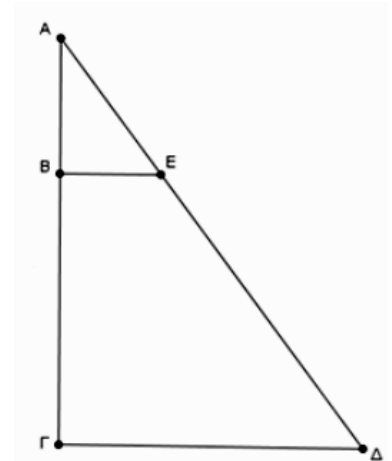


### ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- (i) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών τους.
- (ii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διχοτόμων τους.
- (iii) Ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων διαμέσων τους.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Στο διπλανό σχήμα, το τμήμα ΑΓ είναι το τριπλάσιο του ΑΒ και το τμήμα ΑΔ είναι το τριπλάσιο του ΑΕ. Επίσης ισχύει ότι  $\Gamma\Delta = 9$ .
- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ και ΓΔ είναι παράλληλες.
- β) i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι όμοια και ότι ο λόγος ομοιότητάς τους είναι  $\frac{1}{3}$ .
- ii) Να βρείτε το ΒΕ
- γ) Αν  $A\Gamma = 12$  και  $A\epsilon = 5$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο.



## ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ

### Όμοια Τρίγωνα

Η ομοιότητα των τριγώνων συχνά εμπλέκεται στην διαδικασία επίλυσης διαφόρων ασκήσεων. Τα κριτήρια ομοιότητας είναι παρόμοια με τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Ποιο αναλυτικά έχουμε:

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν:

- 1° → Δύο πλευρές τους είναι ανάλογες μία προς μια και η περιεχόμενη γωνία τους είναι ίση.
- 2° → Όλες οι πλευρές τους είναι μία προς μία ανάλογες.
- 3° → Δύο γωνίες τους είναι μία προς μία ίσες.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

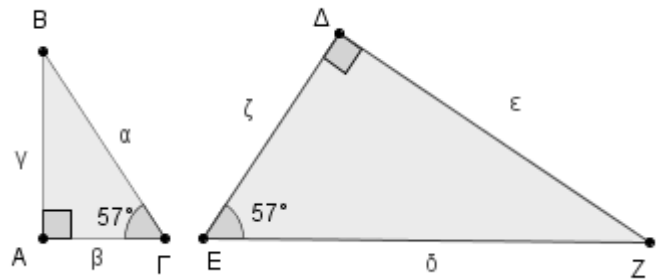
Στις ασκήσεις ομοιότητας τριγώνων, ιδιαίτερα συνηθισμένο είναι το 3<sup>ο</sup> κριτήριο. Οπότε αυτονόητο είναι ότι ο μαθητής πρέπει να έχει αναπτυγμένη την ευχέρεια να αποδεικνύει ότι δύο γωνίες είναι ίσες. Τέλος λόγω ότι η σχέση των μαθητών με τις αναλογίες δεν είναι ιδιαίτερα καλή σας παρέχεται παρακάτω μια μεθοδολογική προσέγγιση της ομοιότητας δύο τριγώνων.

Έστω τα διπλανά ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$ .

Να αποδείξετε ότι  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .

(Τρίγωνο  $AB\Gamma \approx$  Τρίγωνο  $\Delta EZ$ )

ΟΜΟΙΟ



Απάντηση:

1<sup>ο</sup> τρίγωνο      2<sup>ο</sup> τρίγωνο

Επειδή έχουν 2 γωνίες ίσες  
3<sup>ο</sup> κριτήριο ομοιότητας

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Gamma} = \hat{E} (= 57^\circ) \\ \hat{A} = \hat{\Delta} (= 90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B} \approx \hat{E}\hat{\Delta}\hat{Z} \text{ επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες δηλ.}$$

άρα και  $\hat{B} = \hat{Z}$

Χρησιμοποιούμε τα γράμματα με την ίδια σειρά

$$\frac{\Gamma A}{E \Delta} = \frac{AB}{\Delta Z} = \frac{\Gamma B}{E Z}$$

1<sup>ο</sup> & 2<sup>ο</sup> γράμματα των τριγώνων

2<sup>ο</sup> & 3<sup>ο</sup> γράμματα των τριγώνων

1<sup>ο</sup> & 3<sup>ο</sup> γράμματα των τριγώνων

Η αναλογία μπορεί να γραφεί και με μικρά γράμματα για τις πλευρές :

$$\frac{\beta}{\zeta} = \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{\delta}$$

★ Πολλές φορές τα δύο τρίγωνα είναι το ένα μέσα στο άλλο με αποτέλεσμα να δυσκολευόμαστε στο σχηματισμό της αναλογίας.

**Παράδειγμα :**

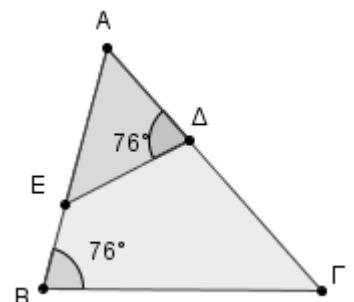
➤ Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια και να σχηματίσετε τις αναλογίες

Απάντηση:

1<sup>ο</sup> τρίγωνο      2<sup>ο</sup> τρίγωνο

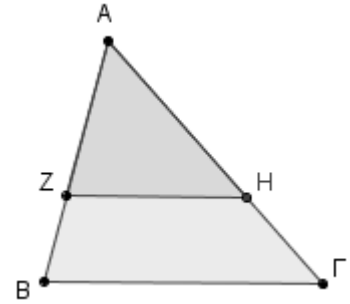
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \text{ (κοινή)} \\ \hat{B} = \hat{\Delta} (= 76^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \approx \hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} \text{ επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες δηλ.}$$

άρα και  $\hat{\Gamma} = \hat{E}$

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{AE}$$


**ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ :**

➤ Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και AZH είναι όμοια και να σχηματίσετε τις αναλογίες ( Όπου ZH // BΓ )



**Απάντηση:**

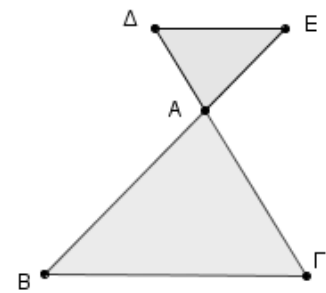


$$\left. \begin{array}{l} \dots = \dots \text{ ( ..... )} \\ \dots = \dots \text{ ( ..... )} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle \dots \approx \triangle \dots \text{ επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες}$$

άρα και  $\dots = \dots$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

➤ Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι τα τρίγωνα AΕΔ και ABΓ είναι όμοια και να σχηματίσετε τις αναλογίες( Όπου ΔΕ // BΓ )



**Απάντηση:**



$$\left. \begin{array}{l} \dots = \dots \text{ ( ..... )} \\ \dots = \dots \text{ ( ..... )} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle \dots \approx \triangle \dots \text{ επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες}$$

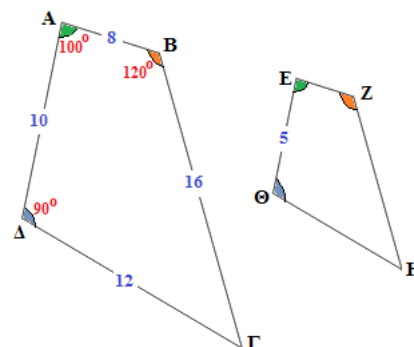
άρα και  $\dots = \dots$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

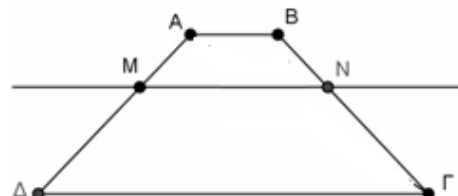
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**Όμοια ευθύγραμμα σχήματα.**

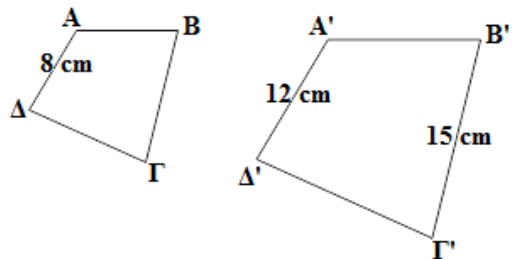
1. Τα τετράπλευρα ABΓΔ και EZHΘ είναι όμοια.  
 Να υπολογίσετε:  
 α. Την γωνία Γ.  
 β. Τις γωνίες E, Z, H, Θ.  
 γ. Τις πλευρές του τετραπλεύρου EZHΘ.



2. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ (AB//ΓΔ) και από σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπέζιου, η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι τα τραπέζια ABNM και ABΓΔ είναι όμοια.

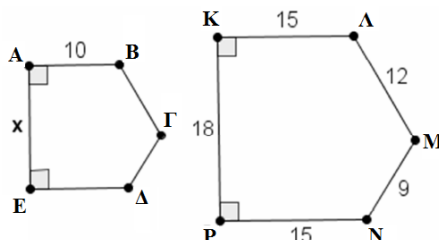


3. Τα διπλανά τετράπλευρα είναι όμοια.  
 α. Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας.  
 β. Να υπολογίσετε την ΒΓ.  
 γ. Αν η γωνία Β είναι  $100^\circ$  ποια γωνία του  $A'B'\Gamma'\Delta'$  είναι ίση με αυτήν;



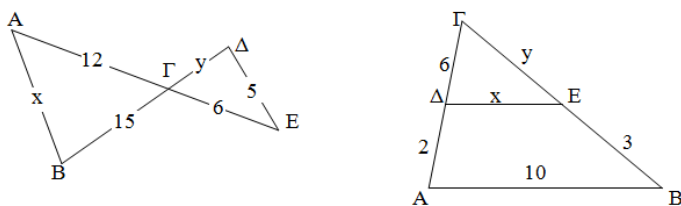
4. Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν  $\hat{\Delta} = \hat{N}$  και  $\hat{B} = \hat{\Lambda}$ .

- α. Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.  
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
 β. Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ.  
 γ. Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

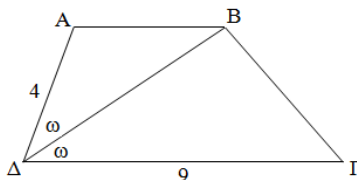


### Κριτήρια ομοιότητας.

1. Να βρείτε τα x, y, αν  $AB \parallel \Delta E$ .



2. Αν  $AB\Delta \approx B\Gamma\Delta$ , να υπολογίσετε την ΒΔ.



3. Αν ΑΒΓ ορθογώνιο και  $A\Gamma=8$ , να υπολογίσετε την ΕΓ.

