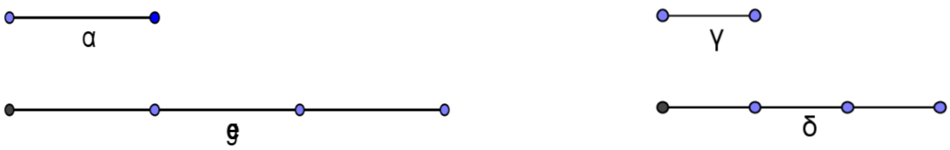
<u>ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ & ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ **ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ**

7.4. ΑΝΑΛΟΓΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΑ – ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Δίνονται τα ευθ. τμήματα **α, β, γ, δ**



Από τα σχήματα φαίνεται ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}$ και $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{1}{3}$ άρα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Η ισότητα λέγεται **αναλογία,** ενώ τα τμήματα **α, β** λέγονται **ομόλογα ή αντίστοιχα**. Το ίδιο και τα **γ, δ**.

- Τα **α, δ** λέγονται **άκροι όροι,** ενώ τα **β, γ** λέγονται **μέσοι όροι.**
- Το **δ** λέγεται **τέταρτη ανάλογος** των **α, β, γ**
- Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ (όπου οι μέσοι όροι είναι ίσοι) το **β** λέγεται **μέση ανάλογος ή γεωμετρικός μέσος** των **α, γ.**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow \beta^2=\alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\cdots=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\cdots+\kappa}{\beta+\delta+\cdots+\lambda}$

<u>Εφαρμογή 3 *(Άσκηση Εμπέδωσης)*</u>

1. *Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.*

ΛΥΣΗ

………………………………………………………………

Εφαρμογή 4 *(Άσκηση Εμπέδωσης)*

2. *Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι* $\frac{1}{3}$ *. Να βρεθεί η γωνία ω.*

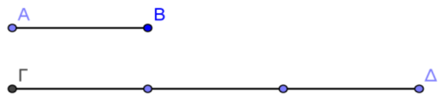
ΛΥΣΗ

……………………………………………………………

7.5 ΜΗΚΟΣ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Μήκος ή μέτρο ευθ. τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθ. τμήμα, που παίρνουμε σαν μονάδα. Το μέτρο ευθ. τμήματος είναι μη αρνητικός αριθμός και συμβολίζεται όπως και το τμήμα.

Π.χ.



Το μήκος του ΓΔ είναι 3. Αν θεωρήσω σαν μονάδα το ΑΒ.

7.6. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΟΣΜΕΝΟ ΛΟΓΟ

Το σημείο Μ στο σχήμα

διαιρεί <u>εσωτερικά</u> το ευθ. τμήμα ΑΒ σε λόγο λ=2

αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$ **ή** $\frac{MA}{MB}=2$

- **Το Μ είναι μοναδικό.**

Το σημείο Μ στο σχήμα

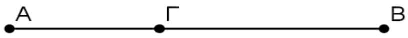
διαιρεί <u>εξωτερικά</u> το ευθ. τμήμα ΑΒ σε λόγο λ=4

αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB}=\lambda$ **ή** $\frac{MA}{MB}=4$

- **Το Μ είναι μοναδικό.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο διπλανό σχήμα είναι :



α) ΑΒ=12cm και ΑΓ=3 cm. Να βρεθούν οι λόγοι:

$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{...}{...}$ $\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{...}{...}$ $\frac{B\Gamma}{AB}=\frac{...}{...}$ $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{...}{...}$

β) Να βρεθούν οι παραπάνω λόγοι αν ΑΒ = 15γ και ΑΓ = 5γ

$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{...}{...}$ $\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{...}{...}$ $\frac{B\Gamma}{AB}=\frac{...}{...}$ $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{...}{...}$

2. Οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ανάλογες των αριθμών 3 και 5, με περίμετρο 32cm.

Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών.

……

……

……

……

……

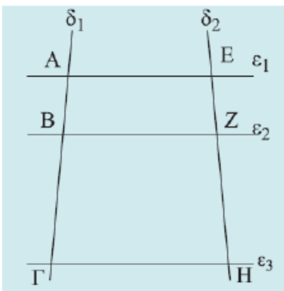
……

7.7. ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Αν 3 τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

$$\frac{AB}{EZ}=\frac{B\Gamma}{ZH}=\frac{A\Gamma}{EH}$$



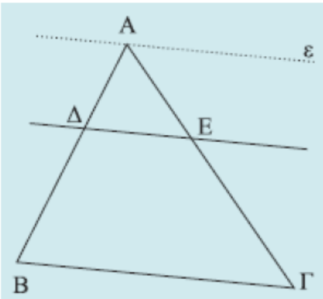
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΘΑΛΗ

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και δ_1 , δ_2 τέμνουν τις παράλληλες στα Α, Β και Ε , Ζ αντίστοιχα και Γ, Η είναι σημεία των δ_1 , δ_2 ώστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$ **, τότε** ΓΗ // ε_1 και ΓΗ //ε_2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΘΑΛΗ στα ΤΡΙΓΩΝΑ

ΠΟΡΙΣΜΑ

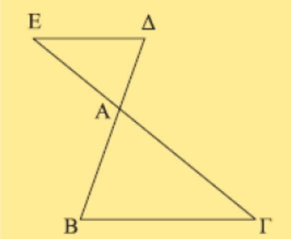
Κάθε ευθεία παράλληλη με μια απ τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δυο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα.



$$\frac{A\Delta}{AE} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η ΔΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



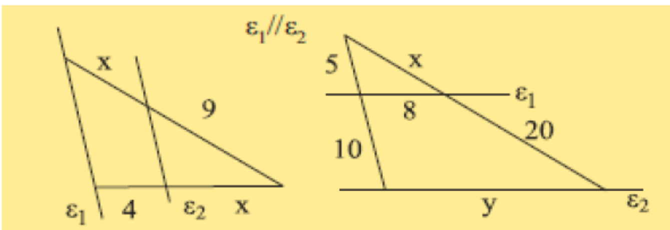
ΘΕΩΡΗΜΑ [Σχέση πλευρών τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ]

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δυο πλευρών τριγώνου και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του (ΑΔΕ) , έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου(ΑΒΓ).

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta B}{B\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

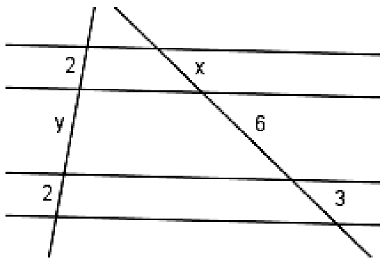
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

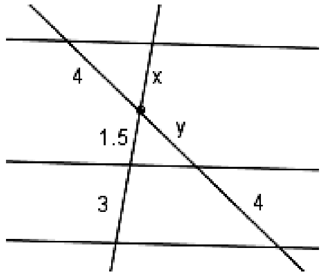
Να βρεθούν οι τιμές των x , y στα παρακάτω σχήματα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να υπολογίσετε τα x και y.





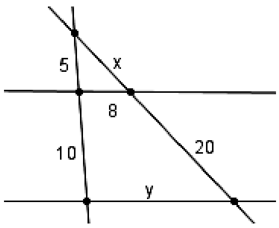
$$\frac{.....}{.....}=\frac{.....}{.....}=\frac{.....}{.....}$$

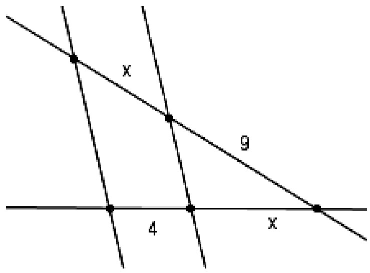
....
....
....
....

$$\frac{.....}{.....}=\frac{.....}{.....}=\frac{.....}{.....}$$

....
....
....
....

2. Ομοίως





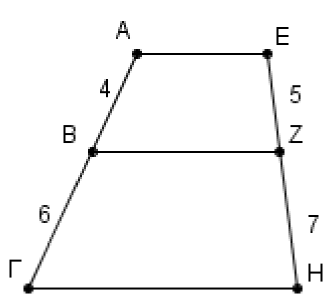
$$\frac{.....}{.....}=\frac{.....}{.....}=\frac{.....}{.....}$$

....
....
....
....

$$\frac{.....}{.....}=\frac{.....}{.....}$$

....
....
....
....

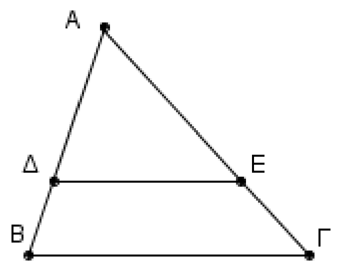
3. Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΓΗΕ η ΒΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του.
Είχε δίκιο ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .



<u>Απάντηση :</u>

....
....
....
....

4. Αν ΔΕ // ΒΓ , να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες :



α) $\frac{ΔΒ}{ΕΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ **β)** $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΕΓ}{ΑΕ}$ **γ)** $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΕΓ}$ **δ)** $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$

Απάντηση :

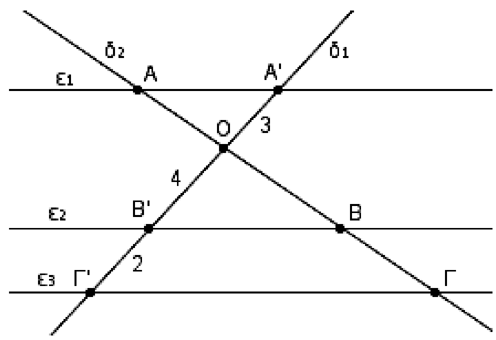
α) ....

β) ....

γ) ....

δ) ....

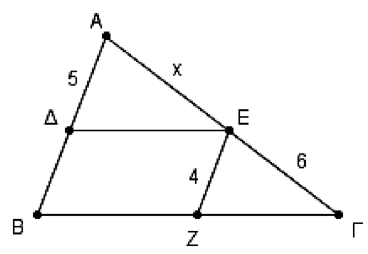
5. Στο διπλανό σχήμα είναι ε1 //ε2 // ε3 .
Να υπολογίσετε τους λόγους :



α) $\frac{ΟΒ}{ΒΓ}=\frac{....}{....}$ **β)** $\frac{ΒΓ}{ΟΓ}=\frac{....}{....}$

γ) $\frac{ΟΑ}{ΟΒ}=\frac{....}{....}$ **δ)** $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{....}{....}$

6. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ , ΕΖ // ΑΒ.
Να υπολογίσετε το x .



Απάντηση :

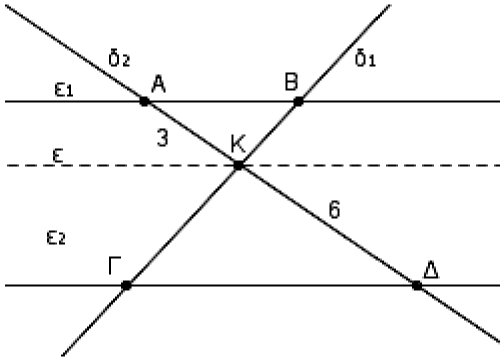
....

....

....

....

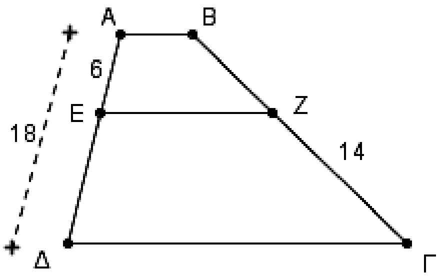
7. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ // ε // ΓΔ .
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε λόγο της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.



Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{BK}{K\Gamma}$	1. $\frac{2}{3}$
β. $\frac{K\Gamma}{B\Gamma}$	2. $\frac{1}{3}$
γ. $\frac{B\Gamma}{BK}$	3. $\frac{1}{2}$
	4. 3

α	β	γ

8. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ.



<u>Απάντηση :</u>

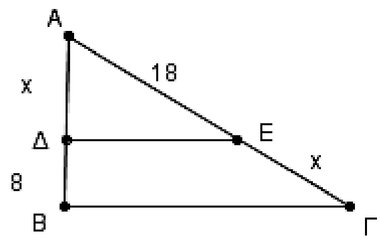
....

....

....

....

9. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ.
Να υπολογίσετε το x .



<u>Απάντηση :</u>

....

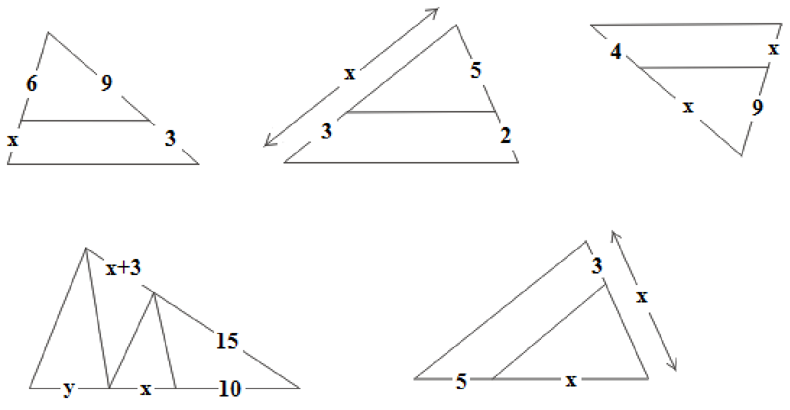
....

....

....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα x, y:



2. Τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ>ΓΔ οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο. Από το Ο φέρνουμε παράλληλες προς τις ΑΔ, ΓΒ που τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Ε, Ζ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι ΑΕ=ΒΖ.

3. Δύο ευθείες x'x και y'y τέμνονται στο Ο. Πάνω στην x'x και εκατέρωθεν του Ο παίρνουμε ΟΑ=2cm και ΟΓ=4cm και στην y'y παίρνουμε ΟΒ=3cm και ΟΔ=6cm. Να δείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ ή ΑΔ//ΒΓ.