**ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)**

Αν μια συνάρτηση f είναι :

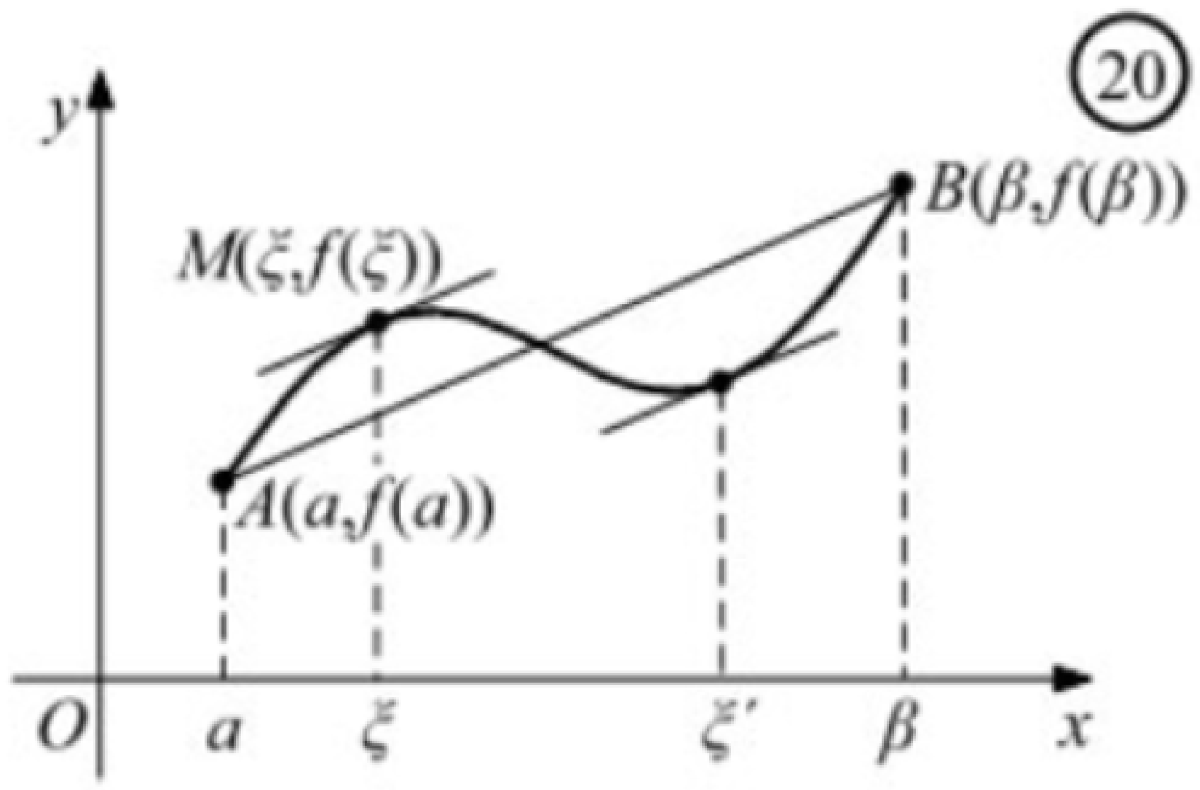
- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ϵ (α, β) τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ϵ (α,β) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.



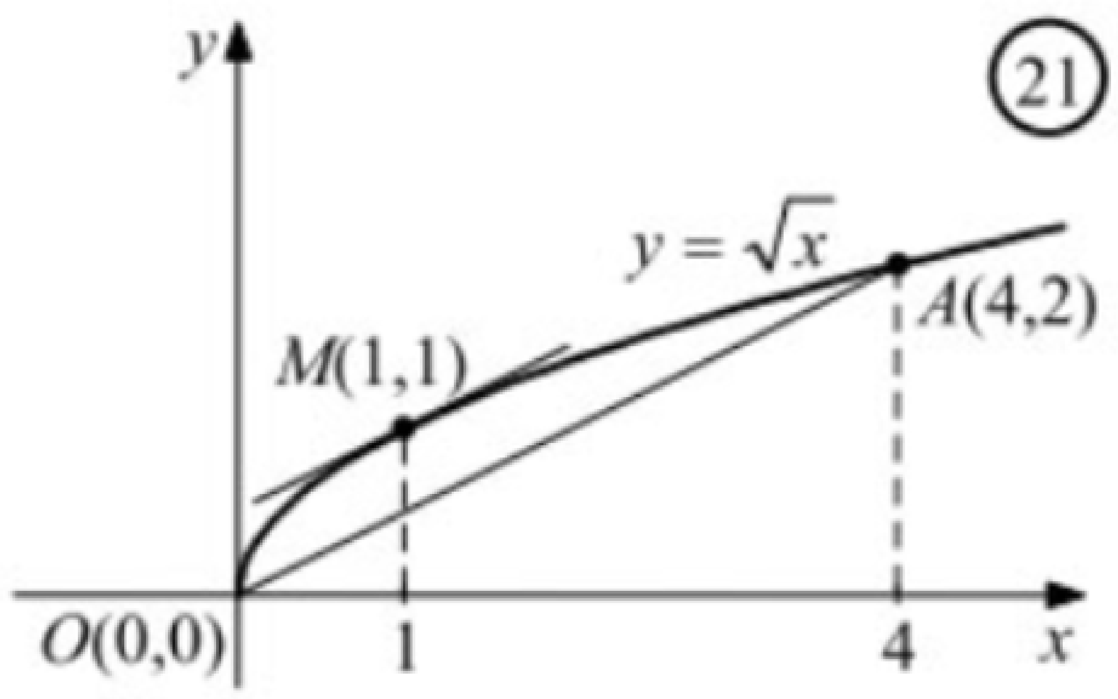

Παράδειγμα σχολικού βιβλίου

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,4].$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,4] και παραγωγίσιμη στο (0,4), με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ , σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει ένας αριθμός ξ ϵ (0,4) τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{1}{2}.$$




Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε :

$$f'(\xi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\xi}=1\Leftrightarrow\xi=1.$$

$\boxed{\Phi_1.}$

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (x^2 - 4x + 1)' = 2x - 4$$

- Η $f$ συνεχής στο $[1,2]$
- Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

Άρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 1 - (1^2 - 4 \cdot 1 + 1)}{1}$$

$$= 4 - 8 + 1 - 1 + 4 - 1$$

$$= -1$$

Δηλ.

$$2\xi - 4 = -1$$

$$2\xi = 4 - 1$$

$$2\xi = 3$$

$$\xi = \frac{3}{2}$$

$\boxed{\Phi_2.}$

$$f(x) = x\cdot(\ln x - 2)$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

Η $f$ συνεχής στο $D_f$ ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x\cdot(\ln x-2)]' \\ &= (x)'(\ln x - 2) + x\cdot(\ln x - 2)' \\ &= 1\cdot(\ln x - 2) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} \\ &= \ln x - 2 + 1 \\ &= \ln x - 1 \end{aligned}$$

- Η $f$ συνεχής στο $[1,2]$
- Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

Άρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλ. ένα $\xi \in (1,2)$ ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \\ &= \frac{2(\ln 2 - 2) - 1\cdot(\cancelto{0}{\ln 1} - 2)}{2-1} \\ &= 2\ln 2 - 4 + 2 \\ &= \ln 2^2 - 2 \\ &= \ln 4 - 2 \end{aligned}$$

$\boxed{\Phi_2^*.}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $(0,2)$ αρκεί να είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$

$\rightarrow$ Στο $[0,1)$, $f(x) = ax^2 + bx$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Στο $(1,2]$, $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής ως ρητή

Για $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax^2 + bx) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = a + b$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = a + b$$

Άρα αρκεί

$$\boxed{a + b = 1} \quad (1)$$

$\to$ • Στο $(0,1)$, $f(x) = ax^2 + bx$

είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (ax^2+bx)' = 2ax + b$$

• Στο $(1,2)$, $f(x) = \frac{1}{x}$

είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

• Για $x = 1$

$$f'_a(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{ax^2-a+bx-b}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{a(x-1)(x+1)+b(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}[a(x+1)+b]}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} [a(x+1)+b] = a\cdot(1+1)+b$$

$$= 2a + b$$

$$f'_\delta(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-(a+b)}{x-1}$$

$$\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Άρα $\boxed{2a+b=-1}$ (2)

Από (1), (2) έχω

$$\left.\begin{aligned}2a+b&=-1\\ a+b&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}a&=-2\\ &\text{και}\\ b&=3\end{aligned}$$

Δηλαδή για $a=-2$ και $b=3$ η $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $(0,2)$

β) Για $\alpha = -2$ κ' $\beta = 3$

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2+3x, & x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

κ'

$$f'(x) = \begin{cases} -4x+3, & x<1 \\ -1, & x=1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x>1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $2f'(x) = f(2) - f(0)$

$f'(x) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ (ουσιαστικά Θ.Μ.Τ)

$f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 0$

Αρα $f'(x) = \frac{1}{4}$

$\rightarrow$ Αν $0<x<1$

$-4x+3 = \frac{1}{4} \Rightarrow -16x+12 = 1$

$-16x = -11$

$x = \frac{11}{16}$ δεκτή

$\rightarrow$ Αν $1<x<2$

$-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = -4$

αδύνατη

$\boxed{\Phi_3.}$ Η f παραγωγίσιμη στο $[0,2]$
άρα και συνεχής
οπότε
- Η f συνεχής στο $[0,2]$
- Η f παραγωγ. στο $(0,2)$

Άρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλ. ένα $\xi \in (0,2)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$$

δηλ. η εφαπτομένη $\color{red}{\mathcal{J}}$ της $C_f$ στο $(\xi, f(\xi))$
έχει κλίση 3

όμως
$\varepsilon: y = 3x - 2022$ έχει
και αυτή κλίση 3

άρα $\mathcal{J} \,//\, \varepsilon$

$\boxed{\Phi_4.}$ • Η $f$ συνεχής στο $[1,3]$
• Η $f$ παραγωγ. στο $(1,3)$

Αρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,3)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{f(3)-1}{2}$$

όμως

για κάθε $x \in (1,3)$ ισχύει

$$1 < f'(x) < 3$$

$$1 < f'(\xi) < 3 \quad \text{γιατί } \xi \in (1,3)$$

$$1 < \frac{f(3)-1}{2} < 3$$

$$2 < f(3)-1 < 6$$

$$3 < f(3) < 7$$

$\boxed{\Phi_5.}$ Για την $f$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.R στο $[1,3]$

δηλ.
- Η $f$ συνεχής στο $[1,3]$
- Η $f$ παραγωγ. στο $(1,3)$
- $f(1) = f(3)$ $(*)$

οπότε
- Η $f$ συνεχής στο $[1,2]$ κ' $[2,3]$
- Η $f$ παραγ. στο $(1,2)$ κ' $(2,3)$

οπότε λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ κ' $\xi_2 \in (2,3)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2) - f(1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = f(3) - f(2)$$

Άρα

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \cancel{f(2)} - f(1) + f(3) - \cancel{f(2)}$$

$$= -f(1) + f(3) \overset{(*)}{=} 0$$

$\boxed{\Phi_6.}$ $\alpha < \beta$

Θεωρώ συνάρτηση $f(x) = e^x$

- Η $f$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως εκθετική
- Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$ με $f'(x) = (e^x)' = e^x$

Αρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλ. ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$e^{\xi} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha}$$

όμως $\alpha < \xi < \beta$

$$e^{\alpha} < e^{\xi} < e^{\beta} \quad , e^x \uparrow$$

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < e^{\beta}$$

$\boxed{\Phi_7.}$ Η $f$ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$

άρα είναι και συνεχής κ' $f'$ συνεχής

οπότε

• Η $f$ συνεχής στο $[0,1]$

Η $f$ παραγ. στο $(0,1)$

Άρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0)$$

ομοίως

• Η $f$ συνεχής στο $[1,2]$

Η $f$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

Άρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_2 \in (1,2)$ ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1)$$

• Η $f'$ συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$

Η $f'$ παραγωγ. στο $(\xi_1,\xi_2)$

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ $[f(2)-f(1) = f(1)-f(0)]$

Άρα λόγω Θ.R

υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ δηλ. $\xi \in (0,2)$

ώστε $f''(\xi) = 0$

[Αντί $f(2)-f(1) = f(1)-f(0)$ μπορούσε $2f(1) = f(2)-f(0)$]

$\boxed{\Phi 8.}$ $f(a)=a$ κ΄ $f(b)=b$

α) $f(x_0)=a+b-x_0$

$f(x_0)-a-b+x_0=0$

Θεωρώ

$g(x)=f(x)-a-b+x$

• Η $g$ συνεχής στο $[a,b]$

$g(a)=f(a)-a-b+a=\cancel{a}-\cancel{a}-b+a$

$=a-b$

$g(b)=f(b)-a-b+b=b-a-b+b$

$=-a+b=-(a-b)$

δηλ $g(a)\cdot g(b)=-(\underbrace{a-b}_{>0})^2<0$

Αφού λόγω Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε

$g(x_0)=0$

$f(x_0)-a-b+x_0=0$

$f(x_0)=a+b-x_0$

β) Η $f$ συνεχής στο $[a, x_0]$

Η $f$ παραγ. στο $(a, x_0)$

Άρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_1 \in (a, x_0)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \frac{\cancel{a}+b-x_0-\cancel{a}}{x_0-a} = \frac{b-x_0}{x_0-a}$$

ομοίως

Η $f$ συνεχής στο $[x_0, b]$

Η $f$ παραγ. στο $(x_0, b)$

Άρα λόγω Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, b)$ ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} = \frac{b-(a+b-x_0)}{b-x_0} = \frac{\cancel{b}-a-\cancel{b}+x_0}{b-x_0}$$

$$= \frac{x_0-a}{b-x_0}$$

δηλαδή

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{b-x_0}{x_0-a} \cdot \frac{x_0-a}{b-x_0} = 1$$

$\boxed{\Phi 9.}$

$$0<2 \xrightarrow{f \downarrow} f(0)>f(2) \quad (1)$$

$$2<3 \xrightarrow{f \uparrow} f(2)<f(3) \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Η } f \text{ συνεχής στο } [0,2] \\ \text{Η } f \text{ παραγ. στο } (0,2) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Θ.Μ.Τ}}$$

υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(2)-f(0)}{2}<0$$ λόγω της (1)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Η } f \text{ συνεχής στο } [2,3] \\ \text{Η } f \text{ παραγωγ. στο } (2,3) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Θ.Μ.Τ}}$$

υπάρχει $\xi_2 \in (2,3)$ ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)>0$$ λόγω της (2)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Η } f' \text{ συνεχής στο } [\xi_1,\xi_2] \\ f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Θ.B}}$$

υπάρχει τουλ. ένα $x_0 \in (\xi_1,\xi_2)$

άρα $x_0 \in (0,3)$ ώστε

$$f'(x_0)=0$$