

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu \frac{\pi x}{2} + \sqrt{-x^2(1-x^2)^2}$.
 - α) Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
 - β) Δείξτε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x \in D_f$.
2. Βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-\lambda}{x^2-2x+\lambda}$ να έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+k) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - α) Δείξτε ότι για το σύνολο τιμών της ισχύει $f(A) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$
 - β) Δείξτε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $2k$.
4. Έστω η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in [0,1]$. Δείξτε ότι ισχύει $f(x)=x$ ή $f(x)=1-x$ για κάθε $x \in [0,1]$.
5. Για τη συνάρτηση f ισχύει $xf(1-x) - f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - α) Βρείτε τη συνάρτηση f .
 - β) Βρείτε το σύνολο τιμών της f .