ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ο αριθμός $\nu^2-\nu$ είναι άρτιος.
2. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραιος, ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 6 και διαιρούμενος με 3, δίνει υπόλοιπο 1.
3. Ποιό είναι το σύνολο ορισμού της παράστασης $A=\frac{x+2}{2x+3}:\frac{3x+9}{4x^2-9}$
4. Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$ δείξτε ότι $\frac{\beta+\delta}{\alpha}=\frac{\gamma^2\delta+\delta^3}{\gamma^3}$
5. Αν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}$ τότε $\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{2\nu}=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{x^2+y^2+\omega^2}\right)^{\nu}=\left(\frac{\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu}{x^\nu+y^\nu+\omega^\nu}\right)^2$
6. Αν $\frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}$ και $A=\frac{x^2-y^2}{2xy+x^2}$, $y\neq 0$ να βρεθεί ο λόγος $\lambda=\frac{x}{y}$ και το A
7. Αν $\alpha+\beta=1$ δείξτε ότι $\alpha^3(\beta+1)-\beta^3(\alpha+1)=\alpha-\beta$
8. Αν $(x-2)^{x^2-4}=1$ να βρείτε τον ακέραιο x.
9. Να δείξετε ότι $1+2+3+\dots+\nu-1+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, ν φυσικός αριθμός.
10. Να δειχθεί ότι i) $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0$

    ii) $\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1$.
11. Να δείξετε ότι το σύνθετο κλάσμα $\dfrac{\frac{x-\alpha}{1+\alpha x}-\frac{x-\beta}{1+\beta x}}{1+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}}$ είναι ανεξάρτητο του x.
12. Αν $\alpha=\frac{1}{1+x}$, $\beta=\frac{1}{1-x}$ να βρεθεί η παράσταση $T=\frac{\alpha+\beta x}{\beta-\alpha x}$
13. Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha^4-\alpha^2+1)=\alpha^8+\alpha^4+1$.
14. Αν $\alpha^2+\beta^2=1$ δείξτε ότι $2(\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2)^2=\alpha^8+\beta^8+1$.
15. Αν $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ τότε $x^3+\frac{1}{x^3}=0$
16. Δείξτε ότι: $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$
17. Αν $x+y=A$, $x\cdot y=B$ να υπολογισθούν συναρτήσει των A και B οι παραστάσεις: i) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$, (ii) x^2+y^2 (iii) $x^4+y^4+x^2y^2$ (iv) $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}$
18. Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=9$ τότε $\alpha=\beta=\gamma$.
19. Αν $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)=8$ τότε $\alpha=\beta=\gamma$
20. Αν $x\cdot y\neq 0$ και $x^3+9y^3=6xy^2$ δείξτε ότι οι x,y είναι ετερόσημοι.

21. Δείξτε ότι: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=(\alpha y-\beta x)^2+(\alpha z-\gamma x)^2+(\beta z-\gamma y)^2$.

22. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$ δείξτε ότι $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2$

23. Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ τότε $\alpha=\beta=\gamma$.

24. Αν $\alpha^2+\beta^2=1$ τότε $(3\alpha-4\alpha^2)^2+(3\beta-4\beta^2)^2=1$.

25. Αν $\alpha\beta\gamma\neq 0$ και $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}$ τότε δυο τουλάχιστον από τους α,β,γ είναι ίσοι.

26. Αν $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x^2+y^2+z^2=\beta^2 \\ x^3+y^3+z^3=\gamma^3 \end{cases}$ να υπολογιστεί το γινόμενο xyz συναρτήσει των α,β,γ.

27. Αν $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ xy+yz+z\alpha=\beta \\ xyz=\gamma \end{cases}$ να υπολογιστεί η παράσταση $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ συναρτήσει των α,β,γ.

28. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$ δείξτε ότι: $\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\gamma\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=0$

29. Αν $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=2$ τότε $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}$

30. Αν $x+y=2$ και $xy=1$ υπολογίστε την παράσταση x^3+y^3.

31. Αν $\alpha-\frac{1}{\alpha}=5$ να υπολογισθούν οι παραστάσεις $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$ και $\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}$

32. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ δείξτε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(\beta^2-\alpha\gamma)$

33. Αν $\alpha+\beta=1$, $\alpha,\beta\neq 1$ τότε $\frac{\alpha}{\beta^3-1}-\frac{\beta}{\alpha^3-1}=\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha^2\beta^2+3}$

34. Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ τότε $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

35. Αν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ δυο τουλάχιστον από τους x,y,z είναι αντίθετοι

36. Δείξτε ότι: $(x+y)^3+(y+\omega)^3+(\omega+x)^3-3(x+y)(x+\omega)(y+\omega)=2(x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega)$

37. Αν $x+y+z=\alpha+\beta+\gamma$, $x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ τότε $(\alpha-z)(\alpha-x)=(y-\beta)(y-\gamma)$

38. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$ τότε: $\frac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}=0$.

39. Αν $\alpha\beta\gamma=1$, $\beta\gamma+\beta+1\neq 0$ δείξτε: $\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=0$

40. Αν $\delta_1=\frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\cdot\tau\cdot(\tau-\alpha)}$ $\quad\delta_2=\frac{2}{\gamma+\alpha}\sqrt{\gamma\cdot\alpha\cdot\tau\,(\tau-\beta)}$
όπου $2\tau=\alpha+\beta+\gamma$ και υποθέσουμε ότι $\delta_1=\delta_2$ τότε να αποδειχθεί ότι $\alpha=\beta$.

41. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$ 2) $2\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$

3) $(x^2+xy+y^2)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$ 3) $\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$

5) $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\alpha+\gamma)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$ 6) $(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3$

7) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$ 8) $\alpha\beta(\alpha-\beta)+\beta\gamma(\beta-\gamma)+\gamma\alpha(\gamma-\alpha)$.

42. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να παραγοντοποιηθεί η παράσταση: $(\alpha\kappa+\beta\lambda)^3+(\beta\kappa+\gamma\lambda)^3+(\gamma\kappa+\alpha\lambda)^3$

43. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha^3+x=\beta^3+y=\gamma^3+\omega=4\alpha\beta\gamma$ δείξτε ότι ο αριθμός $x+y+\omega$ είναι πολ/σιο του 9.

44. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $\dfrac{(\alpha+x)^2-(1+\alpha x)^2}{\alpha^2+x^2-\alpha^2x^2-1}$ 2) $\left(1-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right):\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-3\alpha\beta\right)$ 3) $\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\right):\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

45. Δείξτε ότι $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2(\beta+\gamma)+3\beta^2(\alpha+\gamma)+3\gamma^2(\alpha+\beta)+6\alpha\beta\gamma$ και $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

46. Αν $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=13$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=19$ δείξτε ότι ένας τουλάχιστον από τους α,β,γ είναι μηδέν.

47. Δείξτε ότι ο αριθμός 9 διαιρεί τον αριθμό $2^{4\nu+1}-(2^{2\nu}+1)$

48. Δείξτε ότι ο 10 διαιρεί τον $\dfrac{9^{2\nu}-1}{9^{\nu}-1}$

49. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{12^{2\nu}-4^{2\nu}}{2^{4\nu-1}-2^{4\nu-2}}$ είναι ακέραιος διαιρετός με 16.

50. Αν $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3$ δείξτε i) $\dfrac{1}{x+y+z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

ii) $(x+y+z)^{2\nu+1}=x^{2\nu+1}+y^{2\nu+1}+z^{2\nu+1}$, ν φυσικός αριθμός.