

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Παραγοντοποίηση λέγεται η διαδικασία σύμφωνα με την οποία μια αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο. Η παραγοντοποίηση είναι σημαντική γιατί με τη βοήθειά της:

- Προσθέτουμε αλγεβρικά κλάσματα.
- Απλοποιούμε αλγεβρικά κλάσματα.
- Λύνουμε εξισώσεις μεγαλύτερου του β' βαθμού.

Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι παραγοντοποίησης είναι:

1. Με εξαγωγή κοινού παράγοντα.

$5x - 5y =$	$-3x^2 + 6xy =$
$3x^2 - 6x =$	$(x - 3)y - 2(x - 3) =$

2. Με ομάδες.

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 =$	$\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 =$
-------------------------	--------------------------------------

3. Με τη βοήθεια ταυτοτήτων:

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 =$	$x^2 - 2x + 1 =$
-------------------------	------------------

4. Με διάσπαση όρου.

$x^2 - 5x + 6 =$	$\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 =$
------------------	--

5. Με πρόσθεση και αφαίρεση κατάλληλου όρου.

$x^4 + 4 =$

6. Με τη μέθοδο του τριωνύμου. Όταν η παράσταση είναι τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ τότε αυτή παραγοντοποιείται σύμφωνα με την ταυτότητα: $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$

$x^2 + 7x + 10 =$

$x^2 - 7x + 10 =$

$x^2 - 7x - 18 =$

7. Με μια ειδική παραγοντοποίηση: Γίνεται χρήση της ταυτότητας $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Σύμφωνα με την ταυτότητα αυτή, ορισμένες παραστάσεις, οι οποίες είναι άθροισμα τριών κυβικών δυνάμεων μπορούν να γίνουν γινόμενο, αρκεί το άθροισμα των βάσεων τους να είναι ίσο με μηδέν.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση: $A = (\alpha - \beta)^3 + (\beta - \gamma)^3 + (\gamma - \alpha)^3$
--

Λύση:

8. Με μικτή μέθοδο: Συχνά δεν είναι εφικτή η εφαρμογή καμιάς από τις παραπάνω μεθόδους. Στην περίπτωση αυτή η παραγοντοποίηση απαιτεί συνδυασμό των προηγούμενων περιπτώσεων.

$y^2 - x^2 + 2x - 1 =$

ΕΡΓΑΣΙΑ (ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ-ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ-ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ)

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i)	Κοινός παράγοντας	$6xy^3 + 3x^2y^2 + 9xy^2$	$4x^5y^3 - 6x^7y^2 + 8x^3y^4$	$\frac{x(y-1) - 3(y-1) - (y-1)^2}{3^x - 2 \times 6^x}$
ii)	Ομαδοποίηση	$\frac{\alpha x + \alpha y + 3x + 3y}{16x^2 + 4x - 3y - 12xy}$	$\alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1$	$(1 - \kappa - \lambda)^2 + \kappa - \lambda - 1$
iii)	Διαφορά τετραγώνων	$\frac{x^2 - 1}{(x + 2y)^2 - x^2}$	$\frac{25x^2 - 81}{49(\kappa + \lambda)^2 - 36(\kappa - \lambda)^2}$	$\frac{x^2 - 5}{x^{16} - y^{16}}$
iv)	Ανάπτυγμα ταυτότητας	$\frac{4x^2 - 12x + 9}{k^2 - k + 0,25}$	$(x + y)^2 - 2(x + y) + 1$	$4x^{2\nu} - 20x^\nu y^\mu + 25y^{2\mu}$
v)	Άθροισμα τριών κύβων	$(2x + 1)^3 + (x - 2)^3 + (1 - 3x)^3$	$27x^3 + (x - 4)^3 + 64(1 - x)^3$	
vi)	Συνδυασμός περιπτώσεων	$\begin{matrix} x^2 - 2x - 24 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 \\ 4x^4 - 5x^2 + 1 \\ x^4 + 11x^2 - 60 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -x^2 + 2xy - y^2 + 9 \\ x^9 - x^7 - x^5 + x^3 \\ x^4 + 5x^2 + 9 \\ \alpha^3 + \alpha - 1010 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{x - y + x^2 - 2xy + y^2}{(x - y)^2 - 5(x - y) + 6} \\ \alpha\beta(x^2 + y^2) + xy(\alpha^2 + \beta^2) \\ (2 + x + x^2)^2 - x^3 \end{matrix}$

2. i) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ και να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$.

ii) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 4x + 3} \quad \beta) \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} \quad \gamma) \frac{(x-1)^3 + (x-3)^3 + (4-2x)^3}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

3. Να γίνουν οι πράξεις και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$i) \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{1 - x} \quad ii) \left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} \right) : \frac{2y}{x^2 - y^2} \quad iii) \frac{x + 1}{(x + 2)(x + 3)} + \frac{6}{x(x + 3)} - \frac{2}{x}$$

4. Να γράψετε ως μια δύναμη τους αριθμούς, με βάση και εκθέτη φυσικούς αριθμούς.

i) $2007^3 - 3 \times 2007^2 + 3 \times 2007 - 1$

ii) $99999^2 - 9 \times 44444^2 + 64 \times 11111^2$

5. Αν ο φυσικός αριθμός α είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων, να δείξετε ότι και ο 2α είναι άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων.

6. Αν $\alpha + \gamma = \beta$ να δειχθεί ότι $\alpha^3 + \gamma^3 + 3\alpha\gamma = \beta^3$