Γ' Λυκείου 1ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α.

Α. Να δοθεί ο ορισμός του ρυθμού μεταβολής δύο μεταβλητών μεγεθών x και y

Β. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Γ. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=\frac{1}{x}$

Δ. α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$

i-) Είναι σωστή ή λάθος η παραπάνω πρόταση;

ii-) να δικαιολογηθεί η απάντηση

β) Κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$

i-) Είναι σωστή ή λάθος η παραπάνω πρόταση;

ii-) να δικαιολογηθεί η απάντηση

(Μονάδες 5+5+5+(5+5)=25)

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x+e^{-x}$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln f^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x^2-\frac{1}{e^{f^{-1}(x)}}$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0<1$, για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$.

δ) Να δείξετε ότι $e^{-x}-f(\varepsilon\varphi x)<\ln\frac{1}{x}-x$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(Μονάδες 7+6+6+6=25)

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Κ και διαμέτρου ΑΒ με (ΑΒ)=12cm.
Έστω Μ σημείο του ημικυκλίου και Ν η προβολή του στη διάμετρο ΑΒ.

α) Αν το Ν κινείται απ' το Α προς το κέντρο Κ με ταχύτητα 4 cm/sec, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του Μ απ' το Α, όταν η ΚΜ είναι κάθετη στην ΑΒ.

β) Να βρεθεί το μήκος της προβολής της ΑΜ πάνω στην ΑΒ, ώστε το τρίγωνο ΑΜΝ να έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

(Μονάδες 12+13=25)

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-xe^{1-2x}+\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=-x^{x-1}-2$, $x>0$

α) Δείξτε ότι $g(x)<f(x)$ για κάθε $x>0$

β) Δίνεται ακόμη η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}\frac{xe^x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

i-) Να εξεταστεί η h ως προς τη μονοτονία.

ii-) Αν $A=[g(\alpha), f(\beta)]$ όπου $\alpha>0$ και $\beta\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το ελάχιστο πλάτος του διαστήματος $h(A)$ καθώς και οι τιμές των α,β για τις οποίες το διάστημα $h(A)$ έχει το ελάχιστο πλάτος.

(Μονάδες 10+7+8=25)