Διανύσματα Β/Λ ΘΕΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Β. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Γ. Σωστό ή Λάθος;

α) Ισχύει $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$

β) Για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

γ) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $(\vec{\alpha}\,\vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha}(\vec{\beta}\,\vec{\gamma})$

δ) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ε) Αν $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha}\,\vec{\gamma} = \vec{\beta}\,\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παρ/μο ΑΒΓΔ και έστω Ε το μέσο της ΒΓ και Ζ το μέσο της ΔΕ. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Delta} = \vec{\beta}$ τότε

α) να γραφούν τα διανύσματα $\vec{AE}$ και $\vec{AZ}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) δείξτε ότι $\vec{AE} + \vec{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + 5\vec{A\Gamma})$

γ) αν το παρ/μο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AE} \cdot \vec{A\Gamma}$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία $A(5,3)$, $B(3,1)$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ τέτοιο, ώστε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{AB}, \vec{\alpha}}) = \frac{3\pi}{3}$. Να βρείτε

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{\alpha}$ β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta} = \vec{AB} - \vec{\alpha}$

γ) τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{AB}$ με τον άξονα $x'x$

δ) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{AB}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(-2, x)$, $B(0, 2x)$ και $\Gamma(x, 6)$ όπου $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

β) Για τη μεγαλύτερη απ' τις τιμές του x που βρήκατε στο ερώτημα α), δείξτε ότι το Β είναι μέσο του τμήματος ΑΓ.

γ) Αν το Β είναι το μέσο του ΑΓ, τότε

i-) να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ όπου $O(0,0)$

ii-) να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, απ' τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{OA}$.

Η ευθεία στο επίπεδο Β' Λ ΘΕΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1

A_1) Δείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ όπου $A\neq0$ ή $B\neq0$ είναι:
α) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ β) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$

A_2) Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας (ε);

A_3) Σωστό ή Λάθος

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε ευθείας που σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ είναι πάντα αρνητικός

β) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απ' το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ είναι $y=y_0$

γ) Για κάθε $A,B,\Gamma\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία

δ) Η απόσταση του σημείου $M(x_0,y_0)$ με $x_0\neq0$ ή $y_0\neq0$ απ' την ευθεία (ε): $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq0$ ή $B\neq0$ είναι

$$d(M,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

ε) Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\vec{BA},\vec{B\Gamma})|$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(4\lambda+1,5\lambda-2)$, $B(1,3)$ και $\Gamma(2,4)$ με $\lambda\in\mathbb{R}-\{5\}$

α) Δείξτε ότι το σημείο A ανήκει σε σταθερή ευθεία

β) Δείξτε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{5\}$

γ) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες $(AB\Gamma)=2$ τ.μ

δ) Για $\lambda=0$, να βρείτε

i-) την εξίσωση του ύψους AA του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$

ii-) την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) της πλευράς AB.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x-\lambda y-2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Δείξτε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία που ορίζεται απ' την εξίσωση (1) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v}=(4-\lambda^2,\lambda)$

δ) Για $\lambda=0$ να βρείτε την οξεία γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) της εξίσωσης (1) με την ευθεία (η): $x-2y+7=0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία (ε_1): $y=2x+1$. Να βρείτε

α) την ευθεία (ε_2) η οποία είναι παράλληλη στην (ε_1) και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $P(p,0)$ και $Q(0,q)$ αντίστοιχα, ώστε $6p+q=18$

β) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης (ε) των (ε_1), (ε_2)

γ) το συμμετρικό του σημείου $P(p,0)$ ως προς την ευθεία (ε)

δ) το εμβαδό ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

1ο) Συστήματα. Β/λ Γενικής

1) Δίνονται τα συστήματα $\begin{cases} 2(x-1)-y=1-(x-2) \\ \dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{2y-x}{4}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (Σ_1) και $\begin{cases} 2ax+\beta y=3 \\ a^2x-a\beta y=3 \end{cases}$ (Σ_2)

α) Να λυθεί το σύστημα (Σ_1)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β, για τις οποίες τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) έχουν κοινή λύση

γ) Για τις ακέραιες τιμές των α, β που βρήκατε στο β) ερώτημα, να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2ax-y-w=2 \\ x+2y-3w=2a+\beta \\ 3x+\beta y-2w=3 \end{cases}$

2) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=2-\lambda \\ x+\lambda y=\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις ορίζουσες D, D_x, D_y

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση και μετά να βρεθεί η λύση αυτή

γ) Αν επιπλέον οι εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι (ε_1), (ε_2) είναι παράλληλες

δ) Αν οι ευθείες (ε_1), (ε_2) του ερωτήματος β, τέμνονται πάνω στην ευθεία (δ): $x-2y=0$, να βρείτε το λ

ε) Για $\lambda=1$ να βρείτε τις λύσεις (x,y) του συστήματος που ικανοποιούν τη σχέση $x^2+y^2=13$

3) Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x-3y=2 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ είναι αδύνατο, δείξτε ότι το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x-2y=1 \\ 2x-2\lambda y=\lambda \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις

4) Έστω ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=1 \\ x+y=\lambda \end{cases}$, έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)

α) Να βρείτε τις τιμές του λ β) Αν $|x_0|+|y_0|=2$, να βρείτε το λ.

5) Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $ax+3y=9$ και (ε_2): $3x+ay=a^2$
Για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$, να βρεθούν οι σχετικές θέσεις των ευθειών (ε_1), (ε_2).