

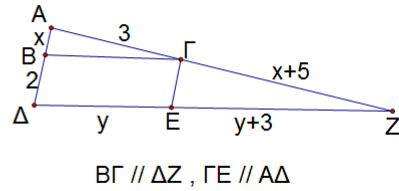
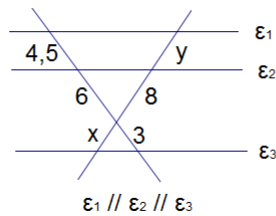
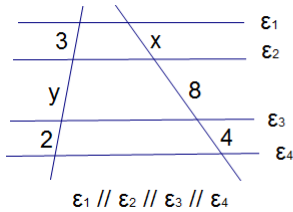
Περιεχόμενα

1 Αναλογίες	2
1.1 Το θεώρημα του Θαλή	2
1.2 Τα θεωρήματα των διχοτόμων	3
2 Ομοιότητα	4
2.1 Όμοια τρίγωνα	4
2.2 Όμοια πολύγωνα	6
3 Μετρικές σχέσεις	7
3.1 Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο	7
3.2 Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο	8
4 Εμβαδά	9
4.1 Εμβαδά βασικών ευθυγράμμων σχημάτων	9
4.2 Άλλοι τύποι και συμπεράσματα	11
5 Κανονικά πολύγωνα και μέτρηση κύκλου	12
5.1 Κανονικά πολύγωνα	12
5.2 Μέτρηση κύκλου	13

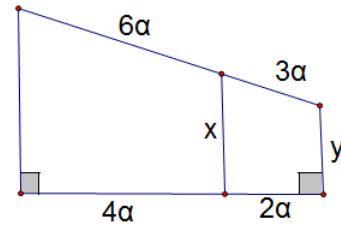
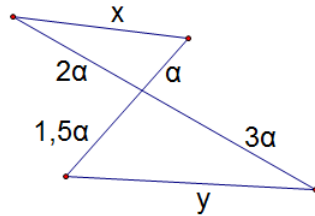
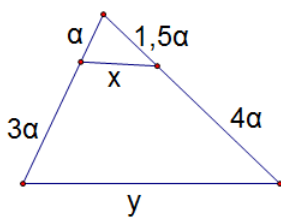
1 Αναλογίες

1.1 Το θεώρημα του Θαλή

1.1. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων x, y .



1.2. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να εξετάσετε αν τα τμήματα x, y είναι παράλληλα.



1.3. Από τυχαίο σημείο N της διαμέσου AM ενός τριγώνου ABΓ, φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB, AΓ που τέμνουν την BΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$\text{α) } \frac{M\Delta}{\Delta B} = \frac{ME}{E\Gamma} \quad \text{β) } \Delta M = ME.$$

1.4. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Από την κορυφή Γ φέρνουμε ευθεία εκτός αυτού, η οποία τέμνει τις ευθείες AB, AΔ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$\frac{AB}{AE} + \frac{A\Delta}{AZ} = 1.$$

1.5. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Από την κορυφή Α φέρνουμε ευθεία η οποία τέμνει τις ΒΔ, ΒΓ, ΓΔ στα σημεία Ε, Ζ, Θ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{AE} = \frac{1}{AZ} + \frac{1}{A\Theta}.$$

1.6. Θεωρούμε τραπέζιο ABΓΔ με βάσεις AB, ΓΔ. Οι ευθείες ΔΑ, ΓΒ τέμνονται στο Κ. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να δείξετε ότι

$$KA^2 = K\Delta \cdot KE.$$

1.7. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ και ένα σημείο Κ της διαγωνίου ΑΓ τέτοιο ώστε $K\Gamma = 5KA$. Αν η ΒΚ τέμνει την ΑΔ στο Ε, να δείξετε ότι $BE = 6KE$.

1.8. Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν E, Z είναι τα βαρύκεντρα των τριγώνων $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $EZ \parallel B\Delta$.

1.9. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο P της πλευράς AB . Φέρνουμε $P\Sigma \parallel A\Delta$ με $\Sigma \in B\Delta$, $\Sigma T \parallel B\Gamma$ με $T \in \Gamma\Delta$ και $TN \parallel A\Delta$ με $N \in A\Gamma$. Να δείξετε ότι $PN \parallel B\Gamma$.

1.2 Τα θεωρήματα των διχοτόμων

1.10. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 4$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 6$. Φέρνουμε την εξωτερική διχοτόμο AZ και παίρνουμε σημείο E στην $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\widehat{ZAE} = 90^\circ$.

α) Να δείξετε ότι η AE είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ZB , BE και $E\Gamma$.

1.11. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημεία Δ, E στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ προς τα μέρη των B, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν $BZ, \Gamma H$ είναι διχοτόμοι των τριγώνων $AB\Delta, A\Gamma E$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $ZH \parallel B\Gamma$.

1.12. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ τέμνουν τις διαγωνίους του στα E και Z . Αποδείξτε ότι $EZ \parallel AB$.

1.13. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου AB και χορδή $\Gamma\Delta$ κάθετη στην AB . Αν M είναι σημείο της χορδής $\Gamma\Delta$ και οι ευθείες MA, MB τέμνουν τον κύκλο στα E, Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$\frac{E\Gamma}{E\Delta} = \frac{Z\Gamma}{Z\Delta}.$$

1.14. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου AB και χορδή $\Gamma\Delta$ κάθετη στην AB . Από ένα σημείο Σ του κύκλου φέρνουμε τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma\Delta$ που τέμνουν την AB στα σημεία M, N αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

$$\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}.$$

1.15. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος $A\Delta$ και η διάμεσος AM τριχοτομούν τη γωνία $\widehat{A}$. Να δείξετε ότι

$$\widehat{A} = 90^\circ, \quad \widehat{B} = 60^\circ, \quad \widehat{\Gamma} = 30^\circ.$$

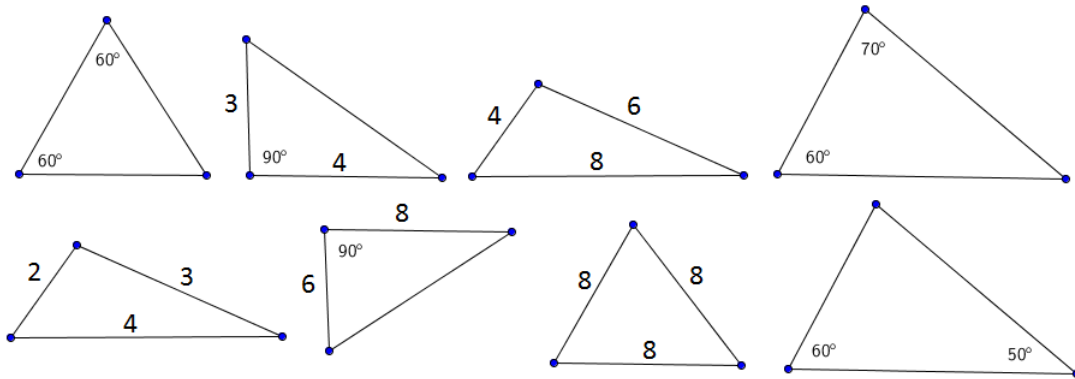
1.16. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, τη διχοτόμο του $A\Delta$ και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$. Η παράλληλη από το M προς την $A\Delta$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

$$BE = \Gamma Z = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

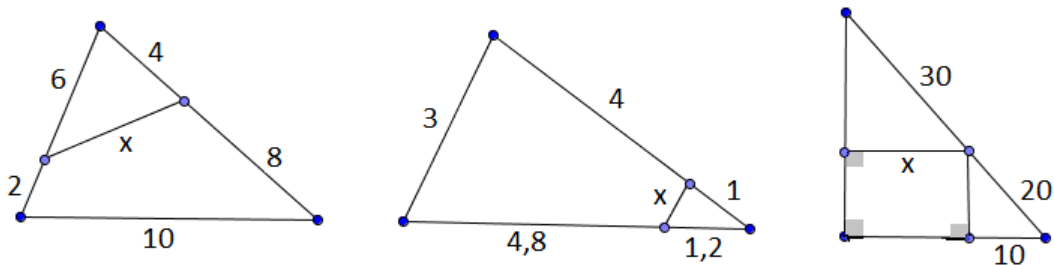
2 Ομοιότητα

2.1 Όμοια τρίγωνα

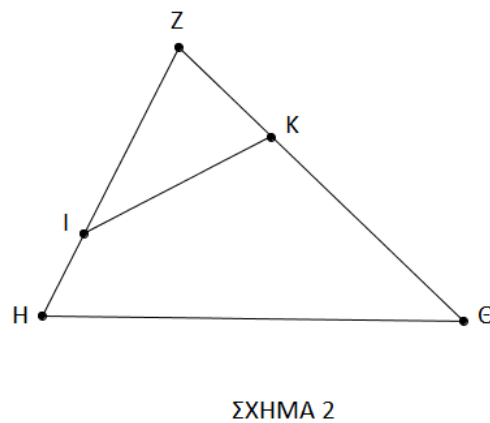
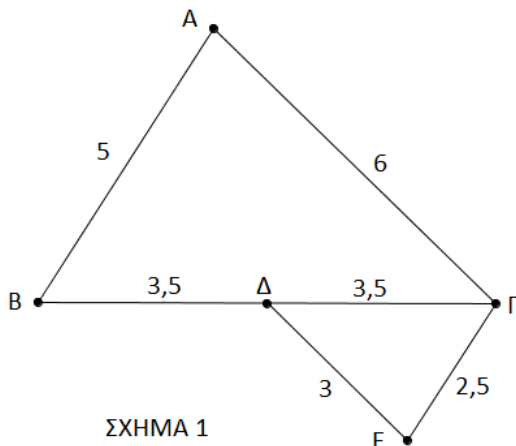
2.1. Να αντιστοιχίσετε κάθε τρίγωνο της πρώτης γραμμής με το όμοιό του στη δεύτερη γραμμή.



2.2. Να βρείτε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.



2.3. Για το σχήμα 1, να δείξετε ότι $ΓΕ \parallel AB$. Στο σχήμα 2 τα τρίγωνα $ZH\Theta$ και ZKI είναι όμοια και ακόμη $IK \parallel H\Theta$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $IK\Theta H$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



2.4. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ και $A\Gamma \perp B\Delta$. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια και στη συνέχεια να δείξετε ότι $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$.

2.5. Από την κορυφή A παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρνουμε ευθεία που τέμνει τις $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$ στα σημεία E , Z αντίστοιχα.

α) Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ABE και $A\Delta Z$ είναι όμοια.

β) Να δείξετε ότι $BE \cdot \Delta Z = AB \cdot A\Delta$.

2.6. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και τα ύψη του $A\Delta$ και BE .

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι όμοια.

β) Αποδείξτε ότι $B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot E\Gamma$.

2.7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ φέρνουμε το ύψος $A\Delta$. Θεωρούμε σημείο E της AB τέτοιο ώστε $\Delta E \perp AB$. Να δείξετε ότι $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$.

2.8. Θεωρούμε κύκλο με διάμετρο AB και τις εφαπτόμενες αυτού ε_1 , ε_2 στα A , B αντίστοιχα. Παίρνουμε τυχαίο σημείο του κύκλου E και ονομάζουμε M , N τα σημεία τομής των BE , AE με τις ε_1 , ε_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $AB^2 = AM \cdot BN$.

2.9. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$. Από τις κορυφές B , Γ φέρνουμε παράλληλες προς την AZ οι οποίες τέμνουν τις AB , $A\Gamma$ στα σημεία H , E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{AZ} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{H\Gamma}.$$

2.10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ φέρνουμε το ύψος $A\Delta$. Ονομάζουμε E , Z τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.

2.11. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Αν Δ σημείο της πλευράς AB και E σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοια ώστε $\Delta B \cdot E\Gamma = MB^2$, να δείξετε ότι

$$\alpha) M\overset{\Delta}{\Delta}B \approx M\overset{\Delta}{\Gamma}E \quad \beta) \Delta\widehat{M}E = \widehat{B}.$$

2.12. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τη διάμεσό του $A\Delta$. Από τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διάμεσο AM , η οποία τέμνει τις AB , $A\Gamma$ στα K , Λ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα $MK + M\Lambda$ είναι σταθερό.

2.13. Θεωρούμε δύο κύκλους με ακτίνες R_1 , R_2 οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο A . Αν $B\Gamma$ είναι ένα κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα να δείξετε ότι η απόσταση d του A από τη $B\Gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$d = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

2.14. Θεωρούμε κύκλο με ακτίνα R και την εφαπτομένη σε σημείο A αυτού. Αν M είναι σημείο του κύκλου και d η απόσταση του M από την εφαπτομένη, να δείξετε ότι $MA^2 = 2dR$.

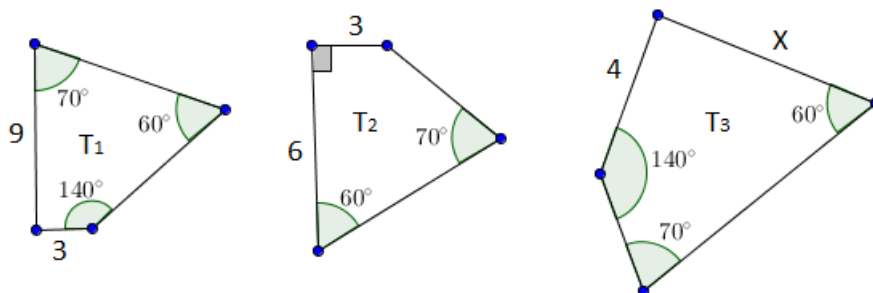
2.15. Τετράγωνο $K\Lambda MN$ πλευράς x έχει τις κορυφές K , Λ στην πλευρά $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ και τις M , N στις πλευρές $A\Gamma$, AB αντίστοιχα.

α) Αποδείξτε ότι $x(a + v_a) = a + v_a$.

β) Αν $x/v_a = 2/3$, να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ANM και $AB\Gamma$.

2.2 Όμοια πολύγωνα

2.16. Δύο από τα παρακάτω τετράπλευρα T_1 , T_2 , T_3 είναι όμοια. Βρείτε τα όμοια τετράπλευρα και το x .



2.17. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O . Αν K , M , N είναι τα μέσα των OA , OB , OG , OD αντίστοιχα, να δείξετε ότι το $K\Lambda MN$ είναι ένα παραλληλόγραμμο όμοιο με το $AB\Gamma\Delta$.

2.18. Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\widehat{A} = \widehat{E} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{EZ} = \frac{A\Delta}{E\Theta}.$$

Αποδείξτε ότι τα παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι όμοια.

2.19. Για τους ρόμβους $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ ισχύει $\widehat{A} = \widehat{E}$. Αποδείξτε ότι οι ρόμβοι $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι όμοιοι.

2.20. Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι 3, 4, 5, 6 και είναι όμοιο με ένα τετράπλευρο που η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη πλευρά του είναι 2. Να βρείτε τις πλευρές του δεύτερου τετραπλεύρου.

2.21. Θεωρούμε τα κυρτά τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$. Τα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA , $A\Gamma$ είναι ανάλογα προς τα τμήματα EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE , $E\Gamma$. Να δείξετε ότι τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ είναι όμοια.

2.22. Δύο ορθογώνια έχουν ίσες τις γωνίες των διαγωνίων τους. Αποδείξτε ότι είναι όμοια.

3 Μετρικές σχέσεις

3.1 Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο

3.1. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ και ύψος $A\Delta$. Αν $AB = 6$ και $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Gamma$, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, $A\Delta$.

3.2. Ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρά a και ύψος $v = 4\sqrt{3}$. Να βρείτε το μήκος της πλευράς a .

3.3. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ και ύψος $A\Delta$. Αν $A\Delta = 2/\sqrt{5}$ και $B\Gamma = \sqrt{5}$, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $B\Delta$, $\Delta\Gamma$.

3.4. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο K και μια ακτίνα του $K\Gamma = R$. Φέρνουμε χορδή AB κάθετη στην ακτίνα $K\Gamma$, που την τέμνει στο Δ . Αν $K\Delta = a$ να δείξετε ότι:

$$\alpha) AB^2 = 4(R - a)(R + a) \quad \text{και} \quad \beta) A\Gamma^2 = 2R(R - a).$$

3.5. Δύο κύκλοι (K, a) και $(\Lambda, 2a)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Δ . Αν AB είναι ένα κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους, να δείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές A, B, K, Λ είναι τραπέζιο και να υπολογίσετε το μήκος του AB ως συνάρτηση του a .

3.6. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο K και μια ακτίνα του $KA = R$. Φέρνουμε χορδή $B\Gamma$ του κύκλου παράλληλη προς την KA . Να δείξετε ότι $AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$.

3.7. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ και διχοτόμο $\Gamma\Delta$. Αν $AB = 3$ και $A\Gamma = 4$, να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου $\Gamma\Delta$.

3.8. Δίνεται κύκλος κέντρου K και μια διάμετρος του AB . Σχεδιάζουμε ακόμη ένα κύκλο με διάμετρο KA . Σε τυχαίο σημείο Γ της KA φέρνουμε κάθετη ευθεία, που τέμνει τον κύκλο διαμέτρου KA στο Δ και τον κύκλο διαμέτρου AB στο E . Αποδεικνύεται ότι $AE^2 = 2A\Delta^2$.

3.9. Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα. Αποδείξτε ότι

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2.$$

3.10. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και ονομάζουμε H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Αποδείξτε ότι $H\Gamma^2 - HB^2 = A\Gamma^2 - AB^2$.

3.11. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ και ύψος $A\Delta$. Αν $4AB = 3A\Gamma$, να δείξετε ότι $16\Delta B = 9\Delta\Gamma$.

3.12. Θεωρούμε κύκλο κέντρου K , διαμέτρου $AB = 2R$ και δύο κάθετες ακτίνες $K\Gamma, K\Delta$. Αν E, Z είναι οι προβολές των Γ, Δ αντίστοιχα πάνω στην AB , να δείξετε ότι

$$\alpha) K\overset{\Delta}{E}\Gamma = K\overset{\Delta}{Z}\Delta \quad \text{και} \quad \beta) KE^2 + KZ^2 = R^2.$$

3.13. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και E σημείο της διαγωνίου του $B\Delta$. Να δείξετε ότι $AB^2 - AE^2 = EB \cdot E\Delta$.

3.2 Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο

3.14. Οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $AB = 3$, $B\Gamma = 5$, $A\Gamma = 7$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο και να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B}$.

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς AB πάνω στην $B\Gamma$.

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς AB πάνω στην $A\Gamma$.

3.15. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 120^\circ$ και $\gamma = 1$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς AB πάνω στην $A\Gamma$.

β) Να δείξετε ότι $a^2 = \beta^2 + \beta + 1$.

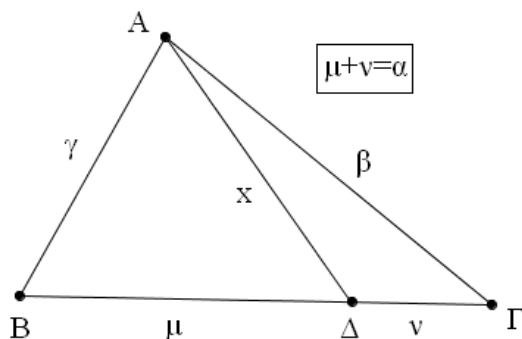
3.16. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB , $\Gamma\Delta$ τέτοιες ώστε $\Gamma\Delta = 2AB$. Να δείξετε ότι

$$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2.$$

3.17. Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους C_1 , C_2 με ακτίνες R , r αντίστοιχα και $R > r$. Αν AB είναι μια διάμετρος του C_2 και M ένα σημείο του C_1 , να δείξετε ότι

$$MA^2 + MB^2 = 2(R^2 + r^2).$$

3.18. (Θεώρημα Stewart) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί.



α) Εφαρμόστε το νόμο συνημιτόνων στα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $AB\Delta$ για να υπολογίσετε τα β^2 και γ^2 αντίστοιχα.

β) Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων του (α) να δείξετε ότι:

$$x^2 = \frac{\mu \cdot \beta^2 + \nu \cdot \gamma^2}{a} - \mu \cdot \nu.$$

4 Εμβαδά

4.1 Εμβαδά βασικών ευθυγράμμων σχημάτων

4.1. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x , $x + 2$ και ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη καθέτων πλευρών x , $6x$ είναι ισεμβαδικά. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου και μήκη των πλευρών του τριγώνου.

4.2. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $A\Delta$ και ΓE . Αν $AB = 5$, $B\Gamma = 8$ και $A\Delta = 4$ να βρείτε το μήκος του ύψους ΓE .

4.3. Ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 4cm έχουν την ίδια περίμετρο. Να βρείτε το εμβαδό του τετραγώνου.

4.4. Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου έχουν μήκη 16cm και 12cm . Να βρείτε το εμβαδό του ρόμβου και μήκος του ύψους από μια κορυφή του.

4.5. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = 6$, $\Gamma\Delta = 8$. Φέρνουμε τα ύψη AK και $\Gamma\Lambda$. Να δείξετε ότι

$$\frac{AK}{\Lambda\Gamma} = \frac{3}{4}.$$

4.6. Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 48 και το ένα του ύψος είναι διπλάσιο του άλλου. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του παραλληλογράμμου.

4.7. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = 3$, $AB = 6$ και σημεία E , Z στις πλευρές AB , $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\Delta E \parallel BZ$ και $BE = 2$. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ΔE , BZ .

4.8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και κύκλος (K, R) που έχει το κέντρο του στην πλευρά $B\Gamma$ και εφάπτεται των πλευρών AB , $A\Gamma$. Να δείξετε ότι

$$R(\beta + \gamma) = 2(AB\Gamma).$$

4.9. Θεωρούμε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ περιγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο K . Αποδείξτε ότι

$$(KAB) + (K\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$

4.10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$, ΓA αντίστοιχα.

α) Πόσα παραλληλόγραμμα μπορείτε να βρείτε στο σχήμα;

β) Αν $(AB\Gamma) = 20$, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΔEZ .

4.11. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E της διαγωνίου $A\Gamma$. Από το E φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του. Αποδείξτε ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εκατέρωθεν της διαγωνίου $A\Gamma$ είναι ισεμβαδικά.

4.12. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$, τη διάμεσό του $A\Delta$ και τα μέσα E , Z των τμημάτων AB , $A\Delta$ αντίστοιχα. Από το A φέρνουμε ευθεία ε παράλληλη στην $B\Gamma$. Αν H είναι τυχαίο σημείο της ε , να δείξετε ότι

$$(\Delta EZ) = \frac{1}{4}(H\Delta\Gamma).$$

4.13. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο M της πλευράς AB . Να δείξετε ότι

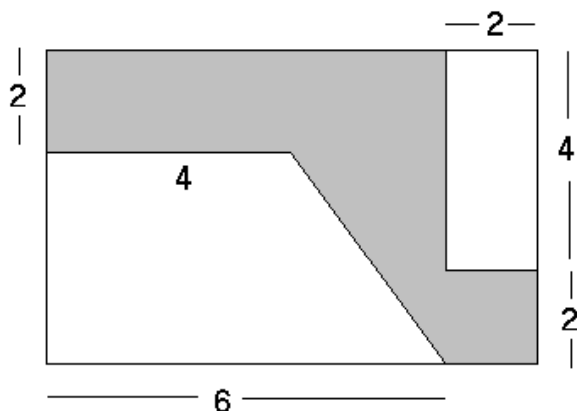
$$(MA\Delta) + (MB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$

4.14. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο M της διαγωνίου AG . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Gamma$ και $M\Delta\Gamma$ είναι ισεμβαδικά.

4.15. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και το μέσο M της διαγωνίου BD . Από το M φέρνουμε ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές AB , $\Gamma\Delta$ στα E , Z αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $(AEZ\Delta) = (EB\Gamma Z)$.

4.16. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB , $\Gamma\Delta$ και M το μέσο της διαμέσου του. Από το M φέρνουμε ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές AB , $\Gamma\Delta$ στα E , Z αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $(AEZ\Delta) = (EB\Gamma Z)$.

4.17. Να υπολογίσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους του παρακάτω σχήματος.



4.18. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB , $\Gamma\Delta$. Οι ευθείες AD και $B\Gamma$ τέμνονται στο E . Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα EBA και $E\Gamma\Delta$ είναι ισεμβαδικά.

4.19. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$, $AB = 4$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρνουμε τη μεσοκάθετη της $B\Gamma$ η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο M και την AG στο N . Υπολογίστε το εμβαδό του τετραπλεύρου $ABMN$.

4.20. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $\Gamma\Delta = a$, $AB = \beta$ με $a > \beta$. Αν v είναι το ύψος του τραπέζιου και K το σημείο τομής των διαγωνίων AG , BD να δείξετε ότι

$$(K\Delta\Gamma) - (KAB) = \frac{(a - \beta)v}{2}.$$

4.21. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ , E στην πλευρά του $B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E < B\Gamma/2$. Η παράλληλη της AB από το Δ τέμνει την AG στο Z και οι BZ , AE τέμνονται στο H . Να δείξετε ότι $(HAB) = (HE\Gamma Z)$.

4.22. Θεωρούμε τρίγωνο MAB και φέρνουμε από το M ευθεία ε η οποία δεν τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB . Παίρνουμε στην ε σημεία Γ , Δ τέτοια ώστε το M να είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι $(AB\Delta) + (AB\Gamma) = 2(MAB)$.

4.2 Άλλοι τύποι και συμπεράσματα

4.23. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $a = 3$, $\beta = 12$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και είναι ισεμβαδικό με ισόπλευρο τρίγωνο ΔEZ . Να βρείτε το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου.

4.24. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 12$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ και στη συνέχεια να βρείτε τα μήκη των ακτίνων R , ρ του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma$ αντίστοιχα.

4.25. α) Ένα κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει διαγωνίους με μήκη δ_1 , δ_2 των οποίων η γωνία είναι ω . Να δείξετε ότι

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2\eta\mu\omega.$$

β) Ένα κυρτό τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει ίσες διαγωνίους και είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο $IK\Lambda M$. Το μήκος της πλευράς του $IK\Lambda M$ είναι ίσο με το μισό του μήκους μιας διαγωνίου του $EZH\Theta$. Να βρείτε την οξεία γωνία των διαγωνίων του $EZH\Theta$.

4.26. α) Για οποιουδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α , β να δείξετε ότι

$$\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$$

και να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB = 3$, $A\Gamma = 4$.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB + A\Gamma = 7$.

4.27. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$ προς την υποτείνουσα $B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp A\Gamma$ να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια και ακόμη

$$\frac{(A\Delta E)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{\gamma^2}{a^2}.$$

4.28. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = 2\gamma$ και M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $B\Gamma = 3B\Delta$. Αποδείξτε ότι

$$\alpha) \frac{(BM\Delta)}{(\Delta M\Gamma)} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \beta) \frac{(M\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}.$$

4.29. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 3$, $B\Gamma = 5$, $A\Gamma = 4$. Κατασκευάζουμε εκτός του τριγώνου τα τετράγωνα $BE\Delta\Gamma$, $A\Gamma\Theta$ και $BA\Lambda K$.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων BKE , $\Gamma\Delta I$ και $A\Theta\Lambda$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του πολυγώνου $\Delta I\Theta\Lambda K E$.

4.30. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το μέρος του B κατά τμήμα $B\Delta = AB$, την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = B\Gamma$ και την πλευρά ΓA προς το μέρος του A κατά τμήμα $AZ = \Gamma A$. Να δείξετε ότι

$$(\Delta EZ) = 7(AB\Gamma).$$

5 Κανονικά πολύγωνα και μέτρηση κύκλου

5.1 Κανονικά πολύγωνα

5.1. Αποδείξτε ότι τα μέσα των πλευρών κανονικού εξαγώνου είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.

5.2. Αποδείξτε ότι τα σημεία τομής των διαγωνίων κανονικού πενταγώνου είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου.

5.3. Θεωρούμε κανονικό πολύγωνο με ακτίνα $R = 8$ και απόστημα $a_\nu = 4\sqrt{3}$. Να βρείτε την πλευρά του, το πλήθος των κορυφών του και την κεντρική του γωνία.

5.4. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία ίση με 80° .

5.5. Ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών δεκαγώνων είναι $3/4$. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων και το λόγο των εμβαδών τους.

5.6. Σε κύκλο ακτίνας $R = 3$ είναι εγγεγραμμένο το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και περιγεγραμμένο το ισόπλευρο τρίγωνο ΔEZ . Να βρείτε τα μήκη των πλευρών αυτών των τριγώνων.

5.7. Θεωρούμε κύκλο ακτίνας $R = 4$ και τις χορδές του $AB = \lambda_5$, $B\Gamma = \lambda_{20}$. Αποδείξτε ότι $A\Gamma = 4\sqrt{2}$ και $(AB\Gamma) = \frac{\sqrt{2}}{4}\lambda_5\lambda_{20}$.

5.8. Αν a_ν είναι το απόστημα ενός κανονικού ν -γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R και R' είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο κανονικού ν -γώνου, να δείξετε ότι

$$R' = \frac{R^2}{a_\nu}.$$

5.9. Το κανονικό ν -γωνο Π είναι εγγεγραμμένο, ενώ το κανονικό ν -γωνο Π' περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο ακτίνας R . Αν $(\Pi') = 2(\Pi)$, να δείξετε ότι $\nu = 4$.

5.10. Θεωρούμε κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Οι προεκτάσεις των AB , $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο H . Να βρείτε συναρτήσει του R το εμβαδό του τριγώνου $H\Lambda\Delta$.

5.11. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΔE του κύκλου. Να δείξετε ότι $\Delta E = 3\lambda_4$.

5.12. Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Στις προεκτάσεις των AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA παίρνουμε τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = \Delta M = AN = R\sqrt{3}$. Να δείξετε ότι το $K\Lambda M N$ είναι τετράγωνο και να βρείτε ως συνάρτηση του R την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

5.13. Θεωρούμε κανονικό πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ του οποίου οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και BE τέμνονται στο Σ .

α) Αποδείξτε ότι $AB \parallel \Gamma E$ και ότι τα τρίγωνα $AB\Sigma$ και $\Sigma\Gamma E$ είναι όμοια.

β) Αποδείξτε ότι

$$\frac{B\Sigma}{AB} = \frac{E\Sigma}{BE} \quad \text{και} \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{BE} = \frac{1}{B\Sigma}.$$

5.2 Μέτρηση κύκλου

5.14. Το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με την περίμετρο ενός τετραγώνου. Αποδείξτε ότι ο κύκλος έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

5.15. Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους C_1, C_2 με ακτίνες R_1, R_2 όπου $R_1 > R_2$. Φέρνουμε χορδή AB του C_1 η οποία εφάπτεται του C_2 στο M . Αποδείξτε ότι το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους C_1, C_2 είναι ίσο με το εμβαδό κύκλου που έχει ακτίνα το τμήμα AM .

5.16. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτεινούσα $B\Gamma$. Σχεδιάζουμε με διαμέτρους τις πλευρές του τριγώνου ημικύκλια εκτός αυτού.

α) Αποδείξτε ότι το εμβαδό του ημικυκλίου διαμέτρου $B\Gamma$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ημικυκλίων με διαμέτρους $AB, A\Gamma$.

β) Εξετάστε αν το μήκος του ημικυκλίου διαμέτρου $B\Gamma$ είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των ημικυκλίων με διαμέτρους $AB, A\Gamma$.

5.17. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια ακτίνα του OA . Φέρνουμε τη χορδή $B\Gamma$ κάθετη στην OA στο μέσο της M . Αποδείξτε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$ και να βρείτε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος $BA\Gamma$.

5.18. Δίνεται κύκλος (O, R) και τα σημεία του A, B τέτοια ώστε $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο A και από το B κάθετη στην εφαπτομένη που την τέμνει στο Γ . Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$ και το εμβαδό του.

5.19. Θεωρούμε κύκλο (O, R) και δύο κάθετες ακτίνες του OA, OB . Με διάμετρο την AB γράφουμε εκτός του κύκλου ημικύκλιο. Να βρείτε το εμβαδό και την περίμετρο του σχηματιζόμενου μηνίσκου.

5.20. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς a . Με διάμετρο την $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο που τέμνει τις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα Δ, E αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta E$.

β) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται εκτός του τριγώνου.

5.21. Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σχεδιάζουμε εντός αυτού δύο ημικύκλια με διαμέτρους $A\Delta, \Gamma\Delta$ τα οποία τέμνονται στο E . Να δείξετε ότι το εμβαδό του μεικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $1/4$ του εμβαδού του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

5.22. Θεωρούμε ημικύκλιο με κέντρο O και διαμέτρου $AB = 2R$. Στο εσωτερικό του ημικυκλίου γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων AO και OB και τον κύκλο κέντρου K που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια.

α) Αποδείξτε ότι η ακτίνα του κύκλου κέντρου K είναι $R/3$.

β) Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που βρίσκεται εντός του ημικυκλίου διαμέτρου AB και εκτός των άλλων δύο ημικυκλίων και του κύκλου.