ΕΜΒΑΔΑ Ευθύγραμμων Σχημάτων

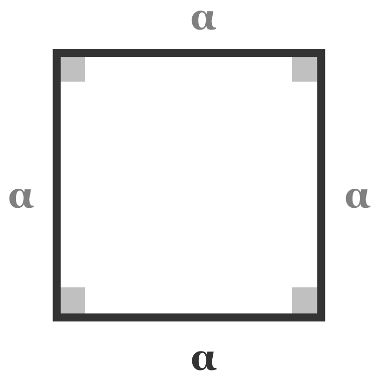
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Τ Ε Τ Ρ Α Γ Ω Ν Ο

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδό Ε ενός τετραγώνου με πλευρά α είναι α ², δηλαδή:

$$E = \alpha^2$$

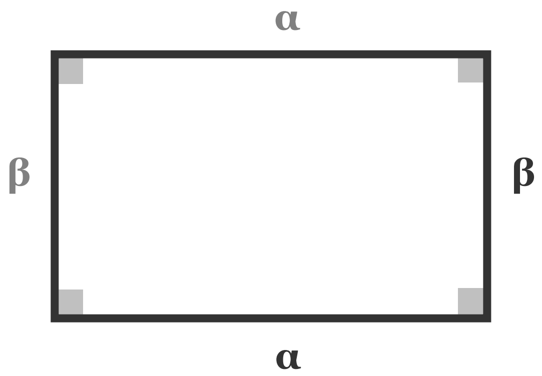


Ο Ρ Θ Ο Γ Ω Ν Ι Ο

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδό Ε ενός ορθογωνίου με πλευρές α, β ισούται με το γινόμενο των πλευρών του, δηλαδή:

$$E = \alpha \cdot \beta$$



Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε:

ύψος

Ε = βάση · ύψος

βάση

Φυσικά, ως βάση μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε πλευρά (προφανώς, την άλλη ως ύψος).

πλάτος

Ε = μήκος · πλάτος

μήκος

Συνήθως, θεωρούμε ως μήκος τη μεγαλύτερη από τις δύο διαστάσεις του ορθογωνίου (προφανώς, ως πλάτος τη μικρότερη).

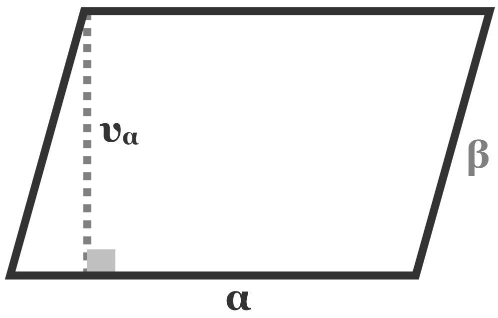
Π Α Ρ Α Λ Λ Η Λ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Ο

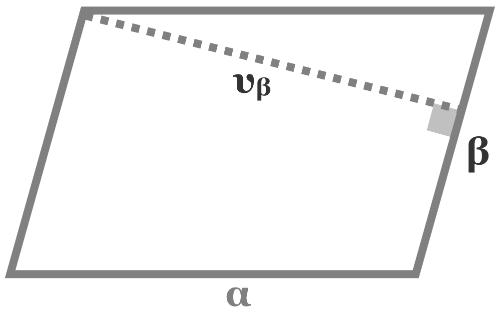
ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδό Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή, δηλαδή:

$$\mathbf{E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha}$$

$$\mathbf{E = \beta \cdot \upsilon_\beta}$$



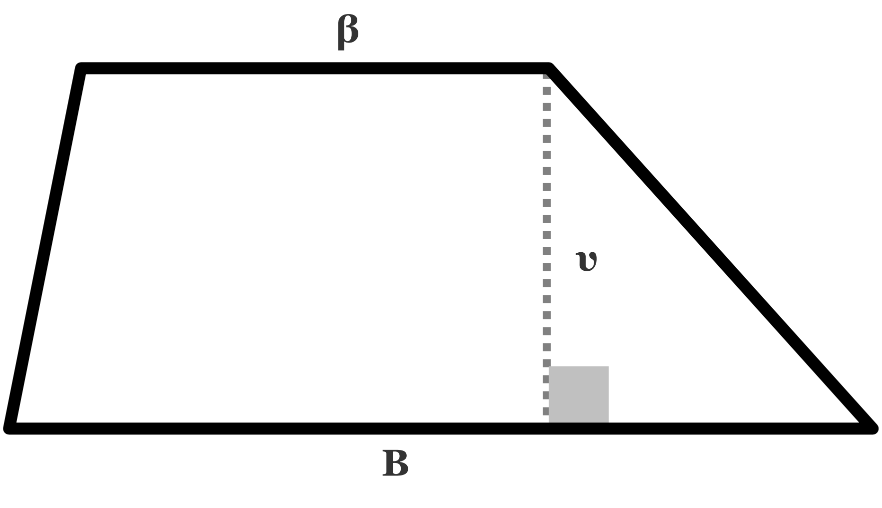


Τ Ρ Α Π Ε Ζ Ι Ο

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδό Ε ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του, δηλαδή:

$$\mathbf{E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon}$$

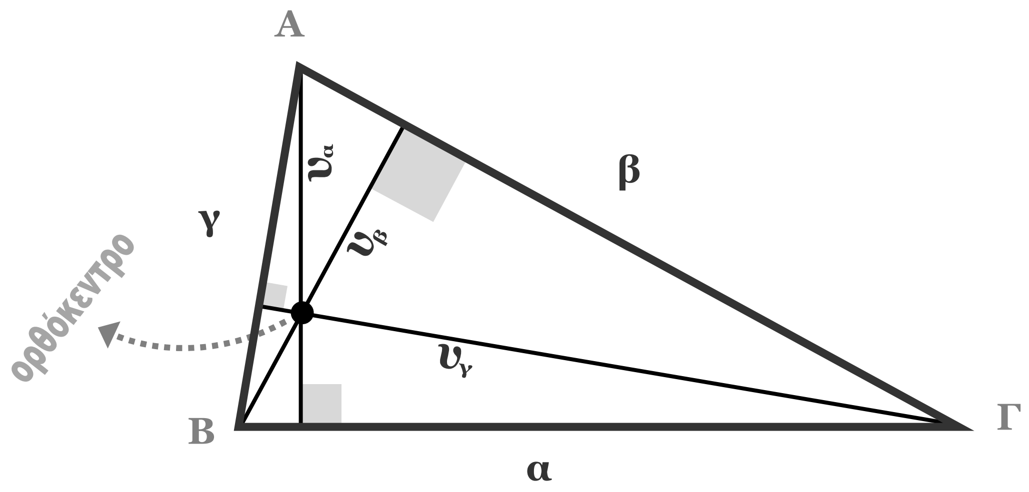


Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδό Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος, δηλαδή:

$$\mathbf{E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha}$$
$$\mathbf{E = \beta \cdot \upsilon_\beta}$$
$$\mathbf{E = \gamma \cdot \upsilon_\gamma}$$



Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Παρατήρηση: Έστω ένα τρίγωνο με πλευρές α, β, γ. Συμβολίζουμε με το γράμμα **τ** την **ημιπερίμετρο** του τριγώνου, με άλλα λόγια:

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Τύπος του Ήρωνα

1η Έκφραση

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

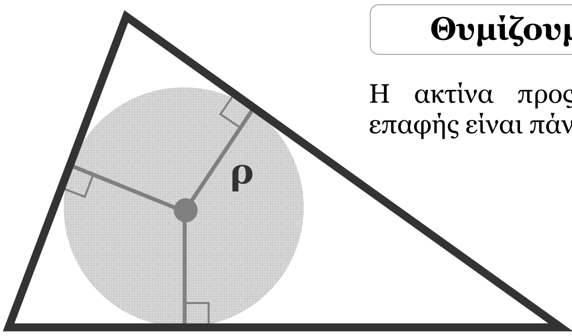
2η Έκφραση

$$E = \tau \cdot \rho$$

ρ = ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου

Θυμίζουμε ότι:

Ο κύκλος που είναι εγγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο έχει κέντρο το σημείο τομής των **διχοτόμων** του τριγώνου, το γνωστό **έγκεντρο**. Αυτό σημαίνει, με άλλα λόγια, ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου **ισαπέχει** από τις **πλευρές** του τριγώνου.



Θυμίζουμε ότι:

Η ακτίνα προς το σημείο επαφής είναι πάντα κάθετη.

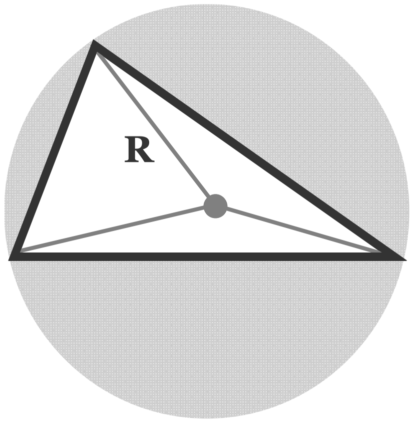
3η Έκφραση

$$\mathbf{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$$

R = ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου

Θυμίζουμε ότι:

Ο κύκλος που είναι περιγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο έχει κέντρο το σημείο τομής των **μεσοκαθέτων** του τριγώνου, το γνωστό **περίκεντρο**. Αυτό σημαίνει, με άλλα λόγια, ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου **ισαπέχει** από τις **κορυφές** του τριγώνου.



4η Έκφραση

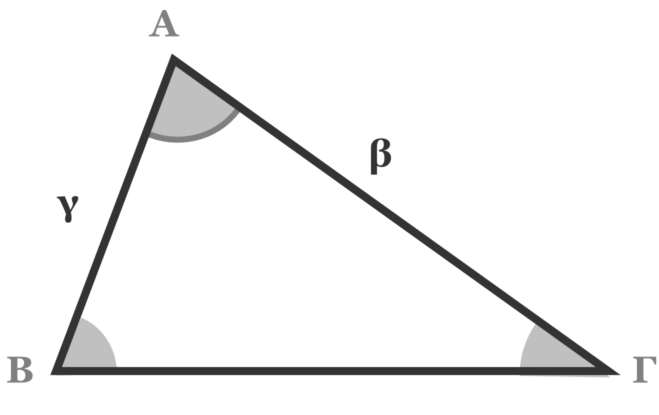
$$\mathbf{E = \frac{1}{2}\,\beta\gamma \cdot \eta\mu A}$$

Α = η περιεχόμενη γωνία

Αναλόγως φυσικά, έχουμε τις εκφράσεις:

$$\mathbf{E = \frac{1}{2}\,\alpha\gamma \cdot \eta\mu B}$$

$$\mathbf{E = \frac{1}{2}\,\alpha\beta \cdot \eta\mu \Gamma}$$

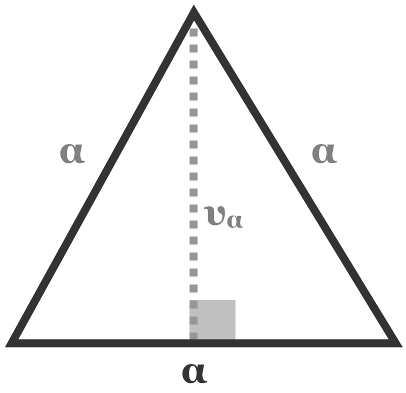


Χ Ρ Η Σ Ι Μ Ε Σ   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Το εμβαδό Ε ενός **ισόπλευρου** τριγώνου με πλευρά α είναι ίσο με:

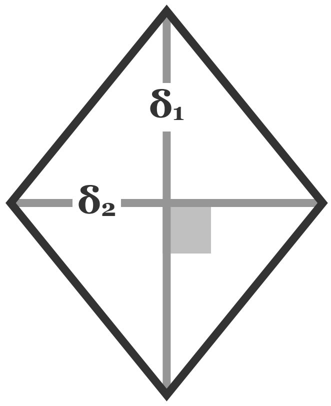
$$\mathbf{E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Το εμβαδό Ε ενός **ρόμβου** ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του:

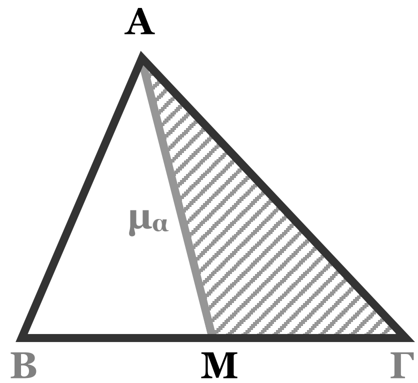
$$\mathbf{E = \delta_1 \cdot \delta_2}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Κάθε **διάμεσος** ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ, το χωρίζει σε δύο τρίγωνα ισοδύναμα:

$$\mathbf{(AB M) = (AM\Gamma) = \frac{(AB\Gamma)}{2}}$$



Επίσης, σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει σταθερά
η παρακάτω αναλογία, η οποία είναι γνωστή ως ...

Νόμος Ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma} = 2R$$

Με λόγια: Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι ανάλογη προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας. Ο σταθερός αυτό λόγος ισούται με το διπλάσιο της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

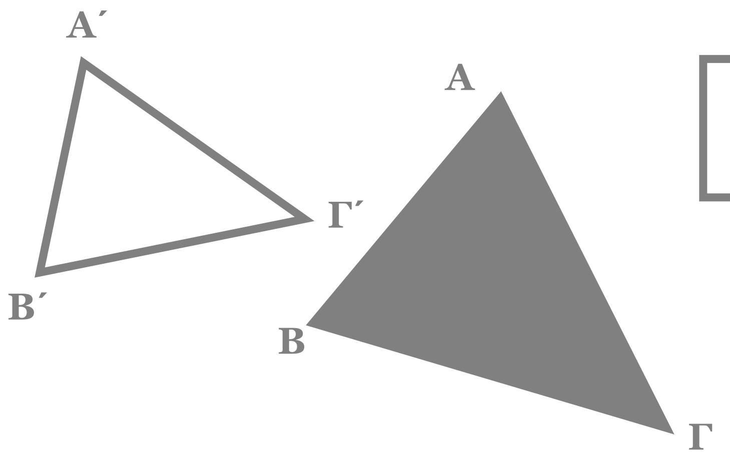
ΕΜΒΑΔΟ & ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΠΡΟΤΑΣΗ

- Αν δυο τρίγωνα έχουν **ίσες βάσεις**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.
- Αν δυο τρίγωνα έχουν **ίσα ύψη**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δυο τρίγωνα είναι **όμοια**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \lambda$$

$$\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \lambda^2$$

Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για δύο οποιαδήποτε όμοια πολύγωνα:

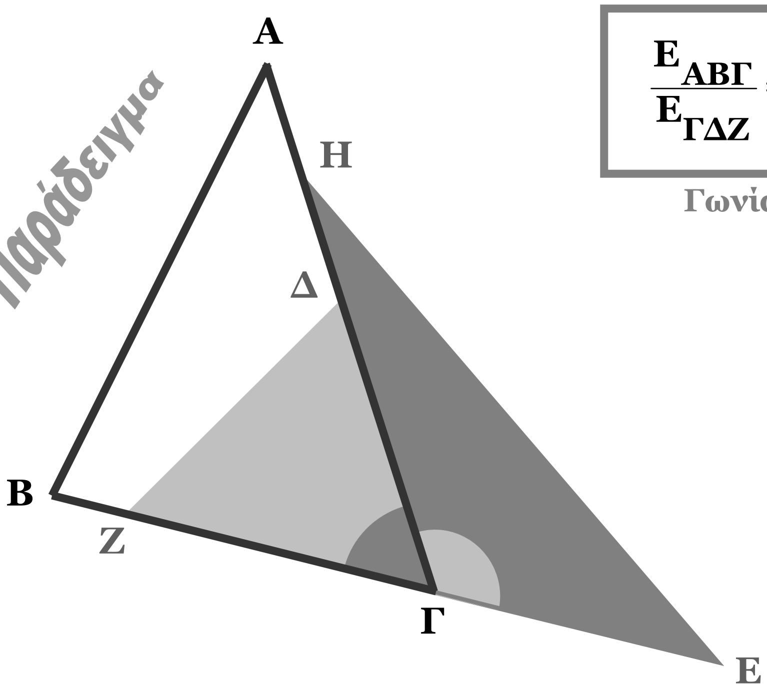
ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολύγωνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι **ίση ή παραπληρωματική** με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών, που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Παράδειγμα



$$\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{\Gamma\Delta Z}} = \frac{A\Gamma \cdot B\Gamma}{\Delta\Gamma \cdot \Gamma Z}$$

Γωνία Γ κοινή

$$\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{\Gamma HE}} = \frac{A\Gamma \cdot B\Gamma}{\Gamma H \cdot \Gamma E}$$

Γωνίες Γ και $\Gamma_{\varepsilon\xi}$ παραπληρωματικές