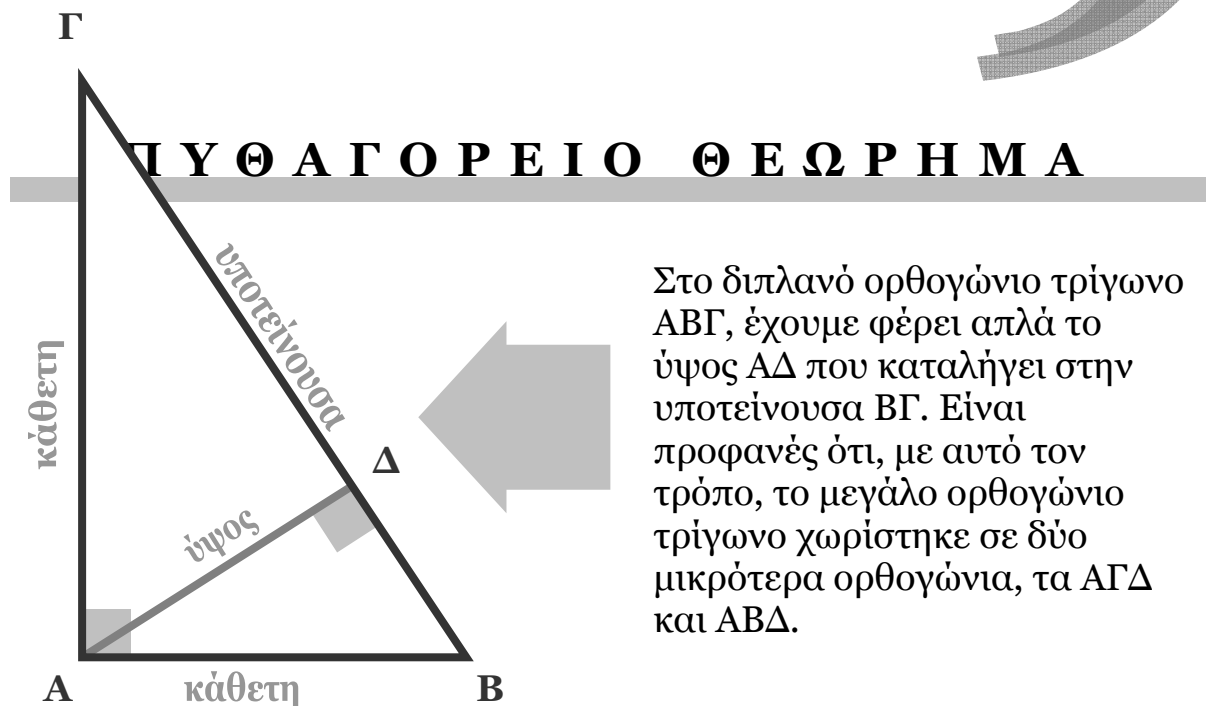
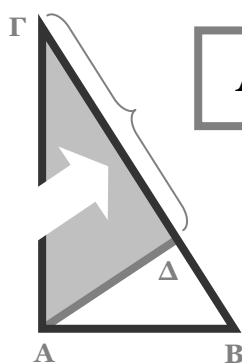




ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς πάνω στην υποτείνουσα.

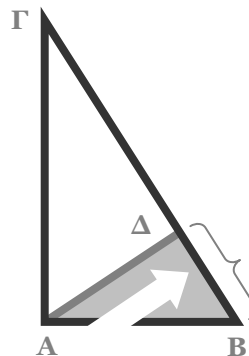


$$ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$$

Υπόδειξη απόδειξης

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ:

$$\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ}$$



Υπόδειξη απόδειξης

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΒ:

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΔΒ}{ΑΒ}$$

$$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΔΒ$$

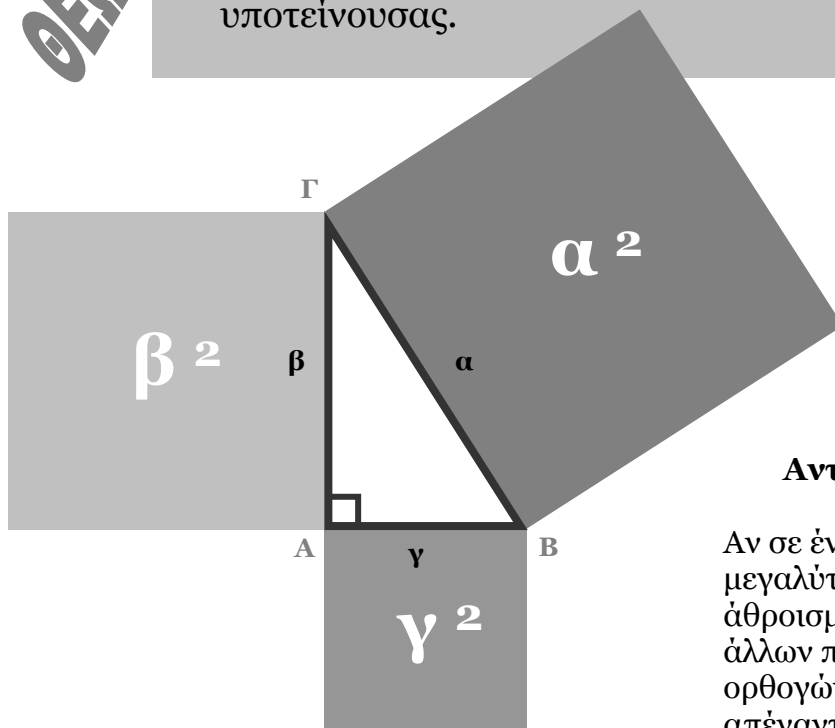
Πόρισμα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

$$\frac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ}$$

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.



$$B\Gamma^2 = A\beta^2 + A\gamma^2$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Αντίστροφο Πυθαγορείου

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με την ορθή γωνία απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

ΘΕΩΡΗΜΑ

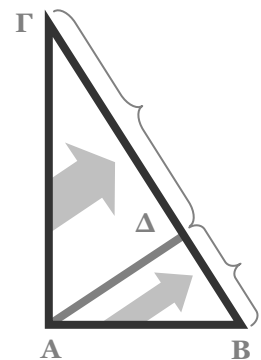
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Υπόδειξη απόδειξης

Από την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle A\Gamma\Delta$, $\triangle A\Delta B$:

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}$$

$$A\Delta^2 = \Gamma\Delta \cdot \Delta B$$



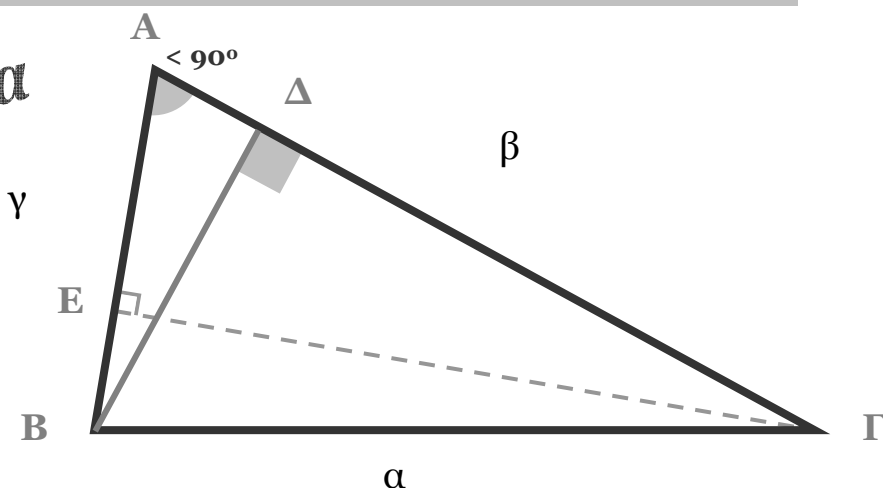
Υπόδειξη

Η απόδειξη των τριών από τα προηγούμενα θεωρήματα στηρίζονται στο γεγονός ότι, φέρνοντας το ύψος $A\Delta$, τα τρία ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται ($\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta\Gamma$, $\triangle A\Delta B$) είναι ανά δύο όμοια.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ

Για οξεία γωνία

Υπόδειξη απόδειξης
Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΒΔΓ. (1)
Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΔΒΑ. (2)
Παρατηρούμε ότι:
 $\Delta\Gamma = \beta - \Delta\Delta$ (3)
Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στη σχέση (1).



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$$

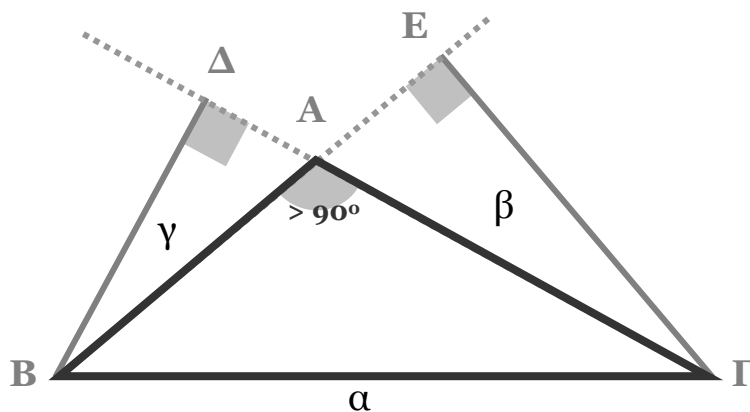
ή

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot \Delta\epsilon$$

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Για αμβλεία γωνία

Υπόδειξη απόδειξης
Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΒΔΓ. (1)
Εφαρμόζουμε ΠΘ στο τρίγωνο ΔΒΑ. (2)
Παρατηρούμε ότι: $\Delta\Gamma = \beta + \Delta\Delta$ (3)
Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στη σχέση (1).



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \Delta\Delta$$

ή

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot \Delta\epsilon$$

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Τόσο για οξείες, όσο και για αμβλείες γωνίες, ισχύει σταθερά ο παρακάτω τύπος, ο οποίος είναι γνωστός ως.

Ν ό μ ο ς Σ υ ν η μ ι τ ό ν ω ν

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A$$

Με λόγια: Το τετράγωνο μιας οποιασδήποτε πλευράς ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.

Παρατηρούμε ότι δεν έχει σημασία το είδος της γωνίας, συνεπώς το πρόσημο του διπλασίου γινομένου είναι σταθερά «-».

Πόρισμα

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ως α τη **μεγαλύτερη πλευρά** ενός τριγώνου, τότε οι παραπάνω προτάσεις χρησιμεύουν και ως **κριτήρια** για να εξετάσουμε το είδος του τριγώνου. Δηλαδή:

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \text{ΑΒΓ αμβλυγώνιο}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \text{ΑΒΓ ορθογώνιο}$$

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \text{ΑΒΓ οξυγώνιο}$$