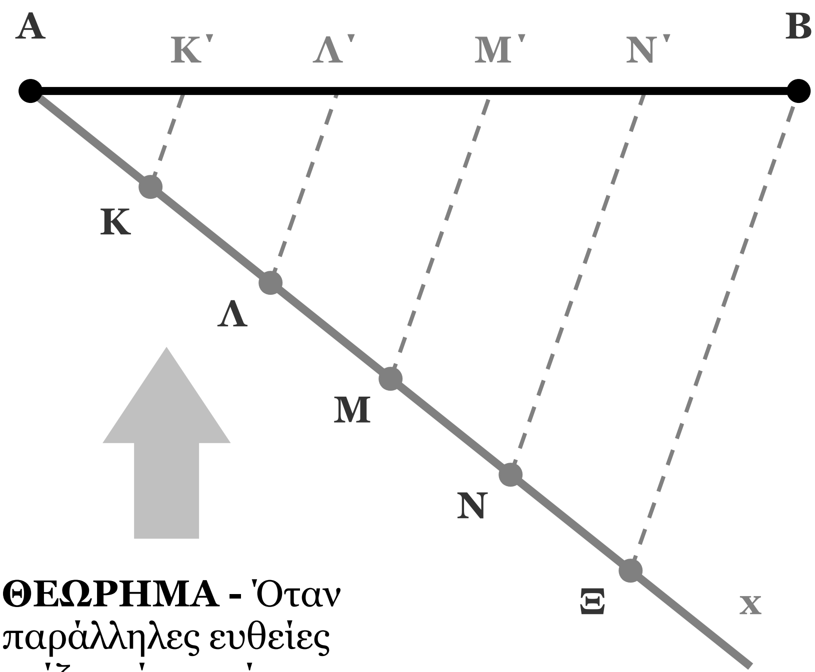
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ
Αναλογίες

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ



Εδώ χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ πχ. σε 5 ίσα μέρη.

Βήμα 1 - Φέρνουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx - ωστόσο είναι βολικό να σχηματίζει οξεία γωνία με το ΑΒ.

Βήμα 2 - Με το διαβήτη και ξεκινώντας απ' το άκρο Α, ορίζουμε πάνω στην Αx 5 διαδοχικά και ίσα τμήματα.

Βήμα 3 - Ενώνουμε το τελευταίο, από τα σημεία (εδώ το Ξ), με το άκρο Β.

Βήμα 4 - Από κάθε σημείο της Αx, φέρνουμε παράλληλες προς το ΒΞ, οι οποίες ορίζουν στο ΑΒ διαδοχικά τμήματα, τα οποία θα είναι ίσα μεταξύ τους.

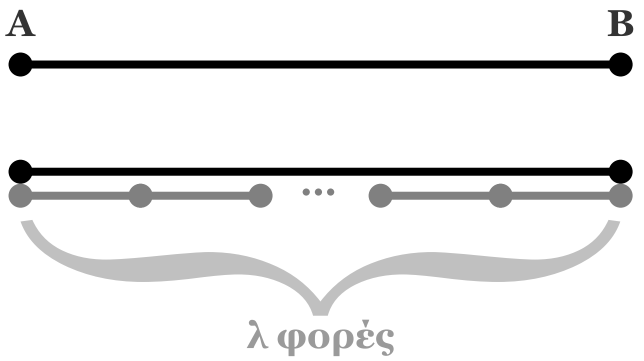
Αυτό και τα καταφέραμε!

ΘΕΩΡΗΜΑ - Όταν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία τέμνουσα ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη τέμνουσα.

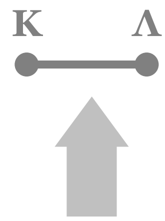
ΜΗΚΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μέτρο ή **μήκος** ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο παίρνουμε (αυθαίρετα) ως μονάδα μέτρησης.



$$\boxed{\frac{AB}{K\Lambda} = \lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$



Αυθαίρετα επιλεγμένο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, ως μονάδα μέτρησης. Γιατί έτσι μας αρέσει! Πρέπει να κατανοήσουμε ότι οι μονάδες μέτρησης είναι ανθρώπινες συμβάσεις και γι' αυτό είναι σχετικές. ΑΝΤΙΘΕΤΑ, ο λόγος δύο τμημάτων είναι σταθερός και ανεξάρτητος από μονάδες.

ΟΡΙΣΜΟΣ

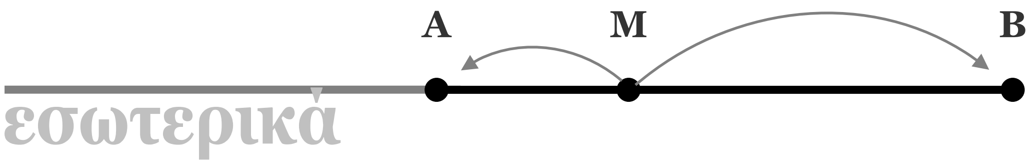
Έστω δύο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Αν υπάρχει ευθύγραμμο ΚΛ και φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι, ώστε ΑΒ = μ·ΚΛ και ΓΔ = ν·ΚΛ , τότε τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται **σύμμετρα** και το ΚΛ **κοινό μέτρο** τους.

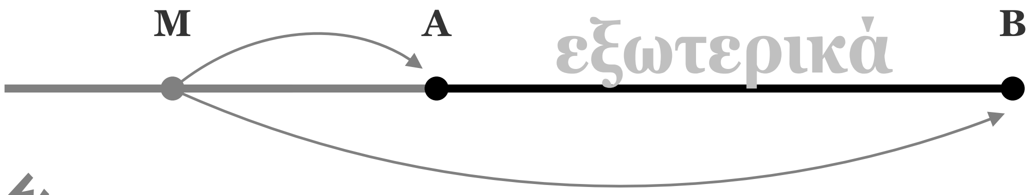
Το παραπάνω σημαίνει με άλλα λόγια, ότι ο λόγος των ΑΒ και ΓΔ είναι **ρητός** αριθμός (αφού ΑΒ/ΓΔ = μ/ν , με μ, ν $\in\mathbb{N}$). Η ανακάλυψη ότι δεν είναι όλα τα τμήματα σύμμετρα μεταξύ τους (δηλαδή, έχουν **άρρητο** λόγο και καλούνται **ασύμμετρα**), όπως πχ. η διαγώνιος τετραγώνου με την πλευρά του, αποτέλεσε έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους της εξέλιξης των μαθηματικών.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι ένα σημείο Μ, εσωτερικό (ή εξωτερικό) ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, **διαιρεί** εσωτερικά (ή εξωτερικά) το ΑΒ σε **λόγο λ** , αν και μόνον αν:

$$\boxed{\frac{MA}{MB} = \lambda}$$





ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο σημεία Μ και Ν, που διαιρούν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά στον ίδιο λόγο, καλούνται **συζυγή αρμονικά** των Α και Β.

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί, ότι και τα Α, Β είναι συζυγή αρμονικά των Μ και Ν. Όλα μαζί συνιστούν μια αρμονική τετράδα.

Α Ν Α Λ Ο Γ Ι Ε Σ - Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Ι

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ **άκροι όροι**

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ **μέσοι όροι**

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ **ηγούμενοι όροι**

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ **επόμενοι όροι**

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\delta}$ **συνεχής αναλογία / β = γεωμετρικός μέσος**

Α Ν Α Λ Ο Γ Ι Ε Σ - Ι Δ Ι Ο Τ Η Τ Ε Σ

1. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

Το γνωστό μας «χιαστί». ☺

2. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

Δηλαδή, η αναλογία διατηρείται αν εναλλάξουμε τις θέσεις των άκρων ή των μέσων όρων.

3. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} = \dfrac{\gamma+\delta}{\delta}$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta+\alpha} = \dfrac{\gamma}{\delta+\gamma}$

Δηλαδή, η αναλογία διατηρείται αν στους ηγούμενους όρους προσθέσουμε τους επόμενους ή το αντίστροφο.

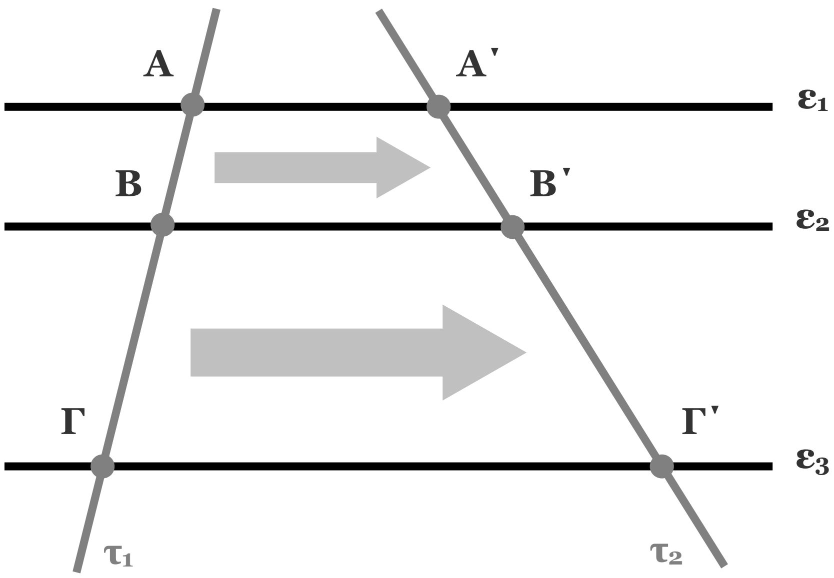
4. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Δηλαδή, αν προσθέσουμε ηγούμενους και επόμενους όρους, προκύπτει ισοδύναμος λόγος.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α τ ο υ Θ Α Λ Η

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν τρεις, τουλάχιστον, παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε ορίζουν σε αυτές τμήματα **ανάλογα**.



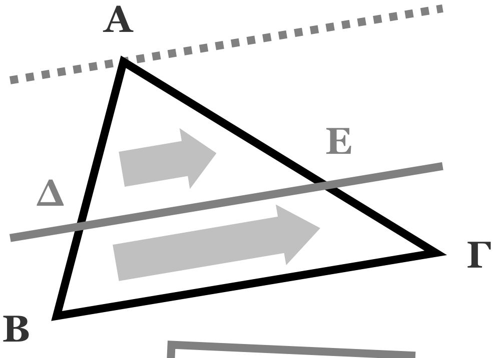
$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}}$$

Με ένα απλό «χιαστί» έχουμε και μια εναλλακτική έκφραση:

$$\boxed{\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{B\Gamma}} = \frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{B'\Gamma'}}}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

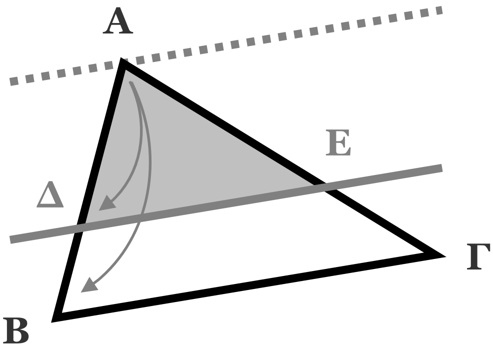
Κάθε ευθεία παράλληλη σε μία απ' τις πλευρές ενός τριγώνου, χωρίζει τις δύο άλλες σε μέρη ανάλογα (και ανιστρόφως).

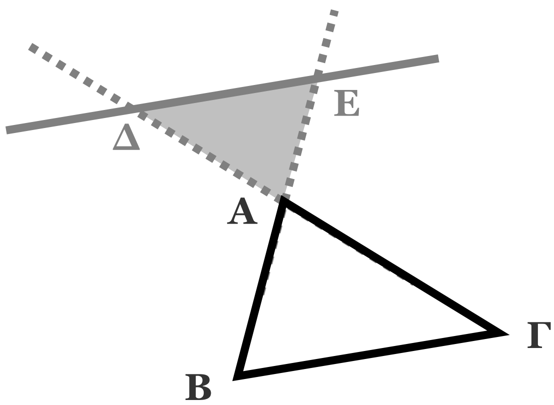


$$\boxed{\frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{AE}} = \frac{\mathbf{\Delta B}}{\mathbf{E\Gamma}}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών ενός τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.





$$\boxed{\frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{A\Gamma}} = \frac{\mathbf{\Delta E}}{\mathbf{B\Gamma}}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Πρέπει να έχουμε πάντα στο νου μας - όπως και σε κάθε αναλογία - να τηρούμε ένα κανόνα: σε αριθμητή ή παρονομαστή να υπάρχουν τμήματα, από το ίδιο σχήμα και όχι εναλλάξ κι όπως να 'ναι!!!

$$\boxed{\frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{A\Gamma}} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{\Delta E}}{\mathbf{B\Gamma}}}$$

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Δ Ι Χ Ο Τ Ο Μ Ω Ν