Πολυώνυμα

> «Στου νου το δαιδαλώδες, αλγεβρικό οικοδόμημα
> αποφάσισα κάποτε να βάλω τάξη φθίνουσα,
> και βλοσυρά κραδαίνοντας μια θετική διακρίνουσα
> πήρα να τινάζω τις ρίζες από τα πολυώνυμα».

1. Σύντομη θεωρία

Μονώνυμο Κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha x^{\nu} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathbb{N}$$

Πολυώνυμο Κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_{\nu} x^{\nu} + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με $\alpha_{\nu}, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$

Όροι του πολυωνύμου ονομάζονται τα μονώνυμα

$$\alpha_{\nu} x^{\nu},\ \ \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1},\ \ \ldots\ \ ,\ \alpha_1 x,\ \ \alpha_0$$

Σταθερός όρος του πολυωνύμου ονομάζεται ο όρος: α_0.

Συντελεστές του πολυωνύμου ονομάζονται οι πραγματικοί αριθμοί

$$\alpha_{\nu},\ \ \alpha_{\nu-1},\ \ \ldots\ \ ,\ \ \alpha_1,\ \ \alpha_0$$

Βαθμός πολυωνύμου καλείται ο μέγιστος εκθέτης των μη μηδενικών όρων του.

Σταθερό πολυώνυμο ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός α. Επειδή $\alpha = \alpha \cdot x^0$ τότε, προφανώς, κάθε σταθερό πολυώνυμο θα είναι **μηδενικού βαθμού**.

Μηδενικό πολυώνυμο ονομάζεται το σταθερό πολυώνυμο **0**. Δεν ορίζεται βαθμός για το μηδενικό πολυώνυμο.

Συμβολισμός Τα πολυώνυμα συμβολίζονται συνήθως με

P(x), **Q(x)**, κλπ.

2. Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα P(x) και Q(x) με:

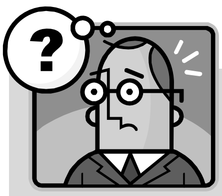
$$\mathbf{P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

$$\mathbf{Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} \qquad \text{με } \nu \geq \mu$$

θα λέγονται ίσα αν οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι, δηλαδή αν ισχύει:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \alpha_\mu & = & \beta_\mu \\ \alpha_{\mu-1} & = & \beta_{\mu-1} \\ & \ldots & \\ \beta_1 & = & \beta_1 \\ \alpha_0 & = & \beta_0 \end{array}}$$

και $\boxed{\alpha_{\mu+1} = \alpha_{\mu+2} = \ldots = \alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu = 0}$



Με πιο απλά λόγια ;!

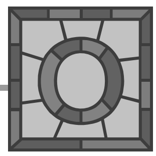
Τελικά, λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν:

(α) είναι του ίδιου βαθμού και

(β) έχουν ίσους τους αντίστοιχους συντελεστές.

Λέμε επίσης: αντί για τη φράση «αντίστοιχοι συντελεστές» τη φράση «συντελεστές ομοιοβάθμιων όρων».

3. Μηδενικό πολυώνυμο



Από τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε εύκολα ότι ένα πολυώνυμο

$$\mathbf{P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}$$

θα είναι ίσο με το μηδενικό πολυώνυμο αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή αν ισχύει:

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = \ldots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$$

4. Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Αριθμητική τιμή ή απλά **τιμή** ενός πολυωνύμου για x = ρ, όπου ρ ένας πραγματικός αριθμός, καλείται ο αριθμός που προκύπτει αν θέσουμε όπου x τον αριθμό ρ και εκτελέσουμε τις πράξεις. Η τιμή αυτή συμβολίζεται ως **P(ρ)**. Δηλαδή:

$$P(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$$

Ρίζα ενός πολυωνύμου θα λέγεται ένας πραγματικός αριθμός ρ, εάν ισχύει:

$$P(\rho) = 0$$

Παρατήρηση ...
Είναι φανερό ότι ένα σταθερό πολυώνυμο θα έχει πάντα την ίδια τιμή, ανεξαρτήτως των τιμών που παίρνει το x.

5. Πράξεις μεταξύ πολυωνύμων

Πρόσθεση & Αφαίρεση

Γίνονται κατά τα γνωστά με απαλοιφή παρενθέσεων και αναγωγή ομοίων όρων.

Βαθμός αθροίσματος

Ο βαθμός του αθροίσματος δύο πολυωνύμων είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο βαθμό των δύο πολυωνύμων.

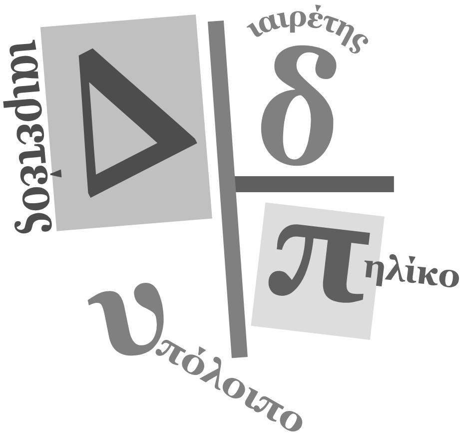
Εκτός κι αν το άθροισμά τους είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε δεν ορίζεται βαθμός.

Πολλαπλασιασμός — Γίνεται με τη βοήθεια της γνωστής επιμεριστικής ιδιότητας.

Βαθμός γινομένου

Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

6. Διαίρεση πολυωνύμων



Όπως είναι γνωστό, κατά την ολοκλήρωση του αλγόριθμου της ευκλείδειας διαίρεσης, τα τέσσερα μεγέθη: **Διαιρετέος**, **διαιρέτης**, **πηλίκο** και **υπόλοιπο**, συνδέονται μεταξύ τους με την παρακάτω ταυτότητα:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$
$$\text{με } 0 \leq \upsilon < \delta$$

Η ταυτότητα ετούτη μπορεί να εκφραστεί, επίσης, και ως εξής:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ (δ ≠ 0), υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon, \text{ με } 0 \leq \upsilon < \delta.$$

Με την ίδια λογική μπορούμε να εκφράσουμε και την έννοια της διαίρεσης πολυωνύμων, δηλ.

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x), με δ(x) ≠ 0, υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

βαθμός(υ) < βαθμός(δ)

όπου το υ(x) έχει βαθμό μικρότερο του βαθμού του δ(x) ή είναι μηδέν.

Για να διαιρέσουμε, λοιπόν, δύο πολυώνυμα ακολουθούμε μια αλγοριθμική διαδικασία αντίστοιχη με αυτή της διαίρεσης φυσικών αριθμών:

Παράδειγμα Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2) : (x^2 + x)$

Γράφουμε το γνωστό σχήμα της διαίρεσης

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 & x^2 + x \\ \hline & \end{array}$$

Διαιρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου με το μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρέτη. Έτσι υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου. Άρα: $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 & x^2 + x \\ \cline{2-2} & \mathbf{2x^2} \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε τον όρο που βρήκαμε στο πηλίκο με κάθε όρο του διαιρέτη (κάνουμε δηλαδή επιμεριστική ιδιότητα).

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 & x^2 + x \\ \cline{2-2} \mathbf{-2x^4 - 2x^3} \qquad\qquad\qquad & 2x^2 \end{array}$$

Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάτω απ’ το Διαιρετέο, αλλά **με αντίθετα πρόσημα** (επειδή εννοείται ότι αφαιρούμε το αποτέλεσμα από το Διαιρετέο). Προσέχουμε κάθε όρος να βρίσκεται ακριβώς κάτω απ’ τον αντίστοιχο (ομοιοβάθμιο) όρο του Διαιρετέου.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^4} + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 & x^2 + x \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^4} - 2x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^2 \\ \mathbf{x^3 - x^2 + 5x - 2} & \end{array}$$

Εκτελούμε την πρόσθεση. Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται. Έπειτα «κατεβάζουμε» και τους υπόλοιπους όρους του Διαιρετέου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 2 & x^2 + x \\ \cline{2-2} -2x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^2 + \mathbf{x} \\ x^3 - x^2 + 5x - 2 & \end{array}$$

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από εκείνον του διαιρέτη. Τότε η διαίρεση σταματάει.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{3-3}
- & 2x^4-2x^3 & 2x^2+x \\ \cline{2-2}
 & \cancel{x^3}-x^2+5x-2 & \\
- & \cancel{x^3}-x^2 & \\ \cline{2-2}
 & \mathbf{-2x^2+5x-2} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{3-3}
- & 2x^4-2x^3 & 2x^2+x-\mathbf{2} \\ \cline{2-2}
 & x^3-x^2+5x-2 & \\
- & x^3-x^2 & \\ \cline{2-2}
 & -2x^2+5x-2 & \\ \cline{2-2}
 & \mathbf{2x^2+2x} &
\end{array}
$$

Άρα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα γράφεται:

$$\underbrace{\mathbf{2x^4+3x^3-x^2+5x-2}}_{\Delta(x)} = \underbrace{\mathbf{(x^2+x)}}_{\delta(x)}\cdot\underbrace{\mathbf{(2x^2+x-2)}}_{\pi(x)}+\underbrace{\mathbf{7x-2}}_{\upsilon(x)}$$

1η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση, που «λείπουν» κάποιοι όροι από τον Διαιρετέο (δηλαδή, κάποιες δυνάμεις του x), τότε είναι προτιμότερο να τους συμπληρώνουμε με μηδενικούς συντελεστές.

Παράδειγμα: Να γίνει η διαίρεση $(2x^4-x^2-2):(x^2+x)$

Γράφουμε:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+\mathbf{0x^3}-x^2+\mathbf{0x}-2 & x^2+x \\ \cline{2-2}
 &
\end{array}
$$

$2^{η}$ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

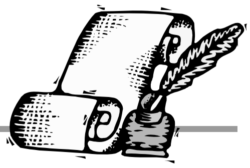
Όπως είναι γνωστό, αν το υπόλοιπο της διαίρεσης βγαίνει μηδέν (**υ = 0**) τότε λέμε ότι η διαίρεση είναι **τέλεια**. Θα λέμε ακόμη ότι «το πολυώνυμο δ(x) **είναι παράγοντας** του Δ(x)» ή ότι «το δ(x) διαιρεί το Δ(x)».

Επειδή η ταυτότητα της διαίρεσης θα γράφεται, προφανώς:

$$\mathbf{Δ(x) = δ(x) \cdot π(x)}$$

είναι φανερό ότι, στην περίπτωση αυτή, έχουμε καταφέρει μιας μορφής παραγοντοποίηση για το πολυώνυμο Δ(x).

7. Διαίρεση πολυωνύμου με x – ρ



Όταν η διαίρεση που καλούμαστε να εκτελέσουμε έχει ως διαιρέτη ένα πολυώνυμο της μορφής **x – ρ**, όπου ρ κάποιος πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχουν δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το **x – ρ** είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου P(x) για x = ρ. Ισχύει δηλαδή:

$$\mathbf{υ = P(ρ)}$$

$1^{η}$ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή ο διαιρέτης x – ρ είναι $1^{ου}$ βαθμού εννοείται ότι το υπόλοιπο θα είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο. Με άλλα λόγια, θα είναι απλά ένας πραγματικός αριθμός.

$2^{η}$ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όσον αφορά στον πραγματικό ρ, χρειάζεται να προσέξουμε το εξής: αν έχουμε το πολυώνυμο πχ. x – 3 τότε προφανώς το ρ = 3. Αν όμως το πολυώνυμο είναι της μορφής πχ. x + 2 τότε είναι:

$$x + 2 = x - (-2), \text{ δηλαδή } ρ = -2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το πολυώνυμο x − ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\mathbf{P(\rho) = 0}$$

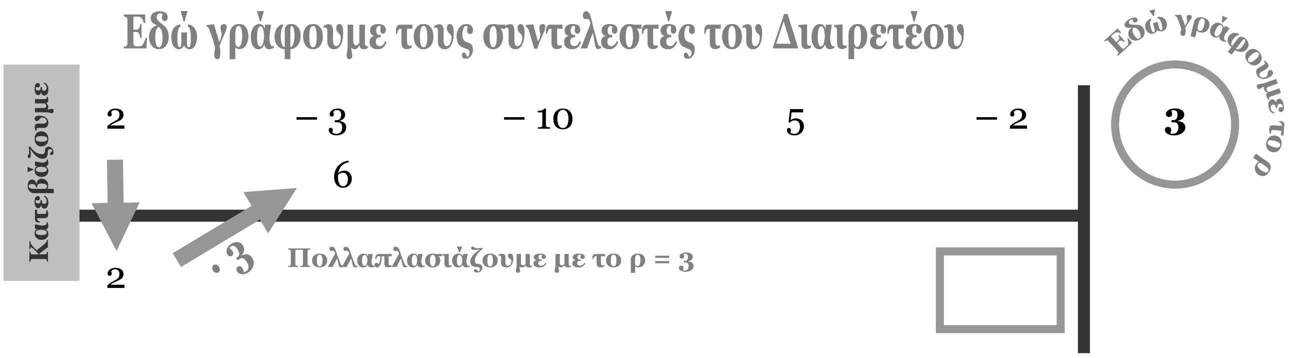
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

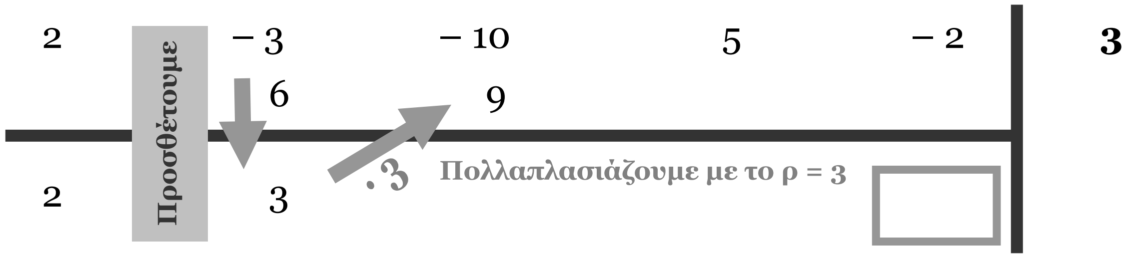
Πρέπει να θυμόμαστε ότι εκφράσεις της μορφής «*αν και μόνο αν*», «*τότε και μόνο τότε*» υποννοούν μια σχέση ισοδυναμίας (⇔). Συνεπώς, όταν καλούμαστε να αποδείξουμε μια παρόμοια σχέση Α ⇔ Β, χρειάζεται να αποδεικνύουμε και το **ευθύ** (Α ⇒ Β) και το **αντίστροφο** (Β ⇒ Α).

8. Σχήμα Horner

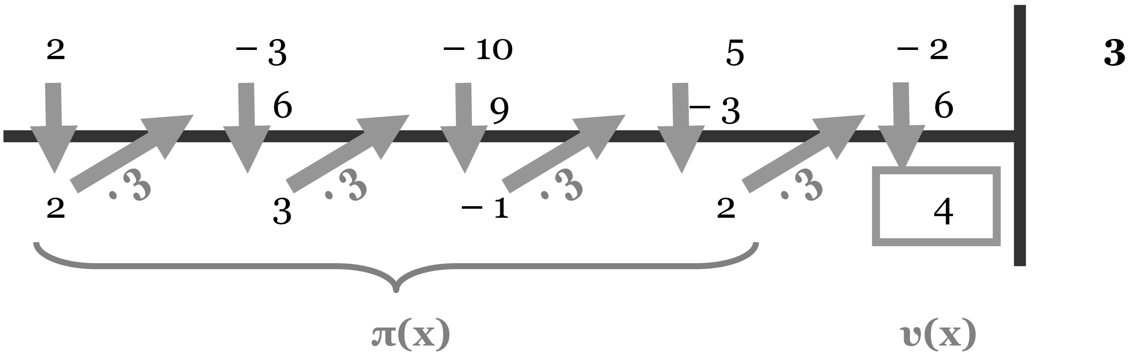
Προκειμένου, τώρα, να υπολογίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x − ρ, αντί να εφαρμόσουμε τον κλασικό αλγόριθμο της διαίρεσης πολυωνύμων, εφαρμόζουμε έναν άλλον αλγόριθμο, πολύ συντομότερο και απλούστερο. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάζεται **σχήμα Horner** και έχει ως εξής:

Παράδειγμα Να γίνει η διαίρεση $(2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2) : (x - 3)$





Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο εξής σχήμα:



Το τελευταίο άθροισμα που βρήκαμε (στο πλαίσιο) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, δηλαδή **υ = 4**. Τα υπόλοιπα επί μέρους αθροίσματα (2, 3, –1, 2) αποτελούν τους συντελεστές του πηλίκου. Προφανώς, αφού διαιρέσαμε με το x – 3 που είναι πρώτου βαθμού, το πηλίκο θα είναι ένα πολυώνυμο κατά ένα βαθμό μικρότερο από το Διαιρετέο. Άρα ο πρώτος όρος θα είναι ο x^3, ο δεύτερος ο x^2 κτλ. δηλαδή θα έχουμε :

$$\pi(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Γράφουμε τελικά:

$$\underbrace{2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x-3)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + 3x^2 - x + 2)}_{\pi(x)} + \underset{\upsilon(x)}{4}$$

Μεθοδολογία

Πολυωνυμικές Εξισώσεις & Ανισώσεις

(και κάτι ψιλά)

1. Πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ν ($\nu \in \mathbb{N}$)

θα λέγονται οι εξίσωσεις της μορφής:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad \text{με } \alpha_\nu \neq 0$$

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης θα ονομάζουμε κάθε ρίζα του αντίστοιχου πολυωνύμου $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε $\rho \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

Α. Προκειμένου να λύσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις **1ου** ή **2ου βαθμού** ακολουθούμε τις γνωστές διαδικασίες επίλυσης, που μας βασανίζουν κοντά τρία χρόνια τώρα, αλλά μυαλό δε λέμε να βάλουμε.

Β. Για εξισώσεις, όμως, **μεγαλύτερου βαθμού** δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι επίλυσης (ίσως να υπάρχουν για εξισώσεις έως και 3ου ή 4ου βαθμού, αλλά είναι αβάσταχτα πολύπλοκες). Αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε στις περιπτώσεις αυτές είναι **παραγοντοποίηση**, έτσι ώστε τελικά να καταλήξουμε σε παράγοντες το πολύ 1ου ή 2ου βαθμού. Αν καταφέρουμε να το επιτύχουμε αυτό, χωρίς να διαταράξουμε ανεπανόρθωτα την ψυχική μας γαλήνη, τα πράγματα θα έχουν γίνει πλέον εξαιρετικά εύκολα. Σύμφωνα με το παρακάτω γενικό σχήμα θα έχουμε:

$$P(x) = 0 \iff P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_k(x) = 0$$

$$P_1(x) = 0 \qquad P_2(x) = 0 \qquad \ldots \qquad P_k(x) = 0$$

Για να το επιτύχουμε αυτό, πολύ χρήσιμο είναι το παρακάτω θεώρημα, γνωστό και ως **«Θεώρημα ακέραιων ριζών»**:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Σύμφωνα με όλα τα προηγούμενα, λοιπόν, μπορούμε να επιλύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$ ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Αναζητούμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου. Αν η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ακέραια ρίζα τότε αυτή θα βρίσκεται ανάμεσα στους διαιρέτες αυτούς. Ξαναδιαβάστε το βήμα αυτό, μέχρι να καταλάβετε καλά τι εννοεί!

2. Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner, **διαδοχικά**, για καθένα από τους αριθμούς που βρήκαμε πριν, μέχρι να ανακαλύψουμε μια ρίζα της εξίσωσης. Θ' αναρωτιέστε, φυσικά, πως στην ευχή θα το καταλάβετε αυτό. **Το υπόλοιπο θα βγαίνει μηδέν!**

3. Στην περίπτωση αυτή, όπως έχουμε προαναφέρει, το πολυώνυμο $x - \rho$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$. Άρα, σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης, θα είναι $\mathbf{P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)}$. Συνεπώς, θα έχουμε καταφέρει έτσι μια πρώτη παραγοντοποίηση. Τι δεν καταλαβαίνετε;;

4. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο στο πολυώνυμο $\pi(x)$, δηλαδή στο πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης, κι ούτω καθεξής, έως ότου καταλήξουμε σε ένα γινόμενο με παράγοντες, μονάχα, πολυώνυμα $1^{ου}$ ή $2^{ου}$ βαθμού. Στις περισσότερες ασκήσεις αρκούν 2 με 3 επαναλήψεις του σχήματος Horner, ώστε να φτάσουμε στο σημείο αυτό. Ούτε δυο γουλιές καφέ, δηλαδή!

Π Α Ρ Α Τ Η Ρ Η Σ Η

Συμβαίνει συχνά, μια πολυωνυμική εξίσωση να έχει για ρίζα δυο και τρεις (ή περισσότερες) φορές τον **ίδιο αριθμό!** Λέμε τότε ότι πρόκειται για **διπλή** ή **τριπλή** ρίζα. Ακόμα μπορεί ν' ακούσετε να μιλάμε για **ρίζα πολλαπλότητας** 2 ή 3, κλπ. Για παράδειγμα, αν παραγοντοποιώντας μία εξίσωση καταλήξουμε στο εξής:

$$(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-3)\cdot(x^2+x+1) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+x+1) \;=\; 0$$

τότε λέμε ότι η εξίσωση έχει «*διπλή ρίζα το 3*» ή πως το 3 είναι «*ρίζα πολλαπλότητας 2*».

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

Εξαιτίας της προηγούμενης παρατήρησης, θα πρέπει σε κάθε βήμα Horner να επανεξετάζουμε τη ρίζα που βρήκαμε από το προηγούμενο, καθώς είναι πολύ πιθανό ο ίδιος αριθμός να είναι πολλαπλή ρίζα. Ακούγεται βαρετό, αλλά μπορεί ν' αποδειχθεί σωτήριο!

2. Πολυωνυμικές ανισώσεις

Προκειμένου να λύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση, ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα με μια πολυωνυμική εξίσωση. Ποια είναι αυτά; Μόλις πριν λίγο τα διαβάσατε! Στο τέλος, όμως, δεν αρκεί απλά η εύρεση των ριζών κάθε παράγοντα. Αυτό που μας ενδιαφέρει, κυρίως, είναι **το πρόσημο** της παράστασης. Για το σκοπό αυτό, κατασκευάζουμε ένα πίνακα προσήμων, όπως γνωρίζουμε πολύ καλά από την 1^{η} Λυκείου, και κατόπιν επιλέγουμε το κατάλληλο διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

3. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Πολλές εξισώσεις, με μια πρώτη ματιά, δεν έχουν πολυωνυμική μορφή. Πολλές ούτε με τη δεύτερη ματιά! Ωστόσο, με απλές αλγεβρικές μεθόδους μπορούμε να τις ανάγουμε σε ισοδύναμες πολυωνυμικές, τις οποίες κατόπιν επιλύουμε σχεδόν με κλειστά τα μάτια, έπειτα από τόσες, απίστευτες ώρες εξάσκησης που έχουμε περάσει για να φτάσουμε σε αυτό το σημείο μαθηματικής ωριμότητας. Τέτοιες εξισώσεις, μπορεί να είναι: κλασματικές, άρρητες, τριγωνομετρικές, κλπ. Ας τις δούμε μία-μία:

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ή ΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Όπως καλά θυμόμαστε, εξισώσεις στις οποίες εμφανίζουν άγνωστο σε παρονομαστή ονομάζονται κλασματικές. Για παράδειγμα:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{x^2-1}$$

Στην περίπτωση αυτή ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.

3. Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε Ε.Κ.Π. $\neq 0$.

4. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.

Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π.

5. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

6. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

7. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.

8. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

Σύμφωνα με τους περιορισμούς.

ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Πρόκειται για εξισώσεις που περιλαμβάνουν τον άγνωστο σε υπόρριζη ποσότητα. Για παράδειγμα:

$$\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$$

Τότε, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε τους κατάλληλους περιορισμούς, ώστε οι υπόριζες ποσότητες να είναι μη-αρνητικές (δηλ. ≥ 0).

2. Επειδή, συνήθως, καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε τετραγωνικές ρίζες, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, ώστε να απαλοιφούν οι ρίζες. Αν για διάφορους λόγους, κάποιες ρίζες εξακολουθούν να «αντιστέκονται», αφού εκτελέσουμε όσες πράξεις είναι δυνατόν να γίνουν, υψώνουμε και πάλι στο τετράγωνο.

3. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

4. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

5. Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση, όπως έχουμε προαναφέρει.

6. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.

Σύμφωνα με τους περιορισμούς.

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η ! ! !

7. Απαιτείται, οπωσδήποτε, να **επαληθεύουμε** επιπλέον και την αρχική εξίσωση, για καθεμία από τις **δεκτές** ρίζες που βρήκαμε, γιατί συμβαίνει συχνά – εξαιτίας της ύψωσης στο τετράγωνο – να δημιουργούνται λύσεις, που δεν αντιστοιχούν στην αρχική εξίσωση. Έτσι, αν χρειαστεί απορρίπτουμε ακόμα και κάποιες από τις δεκτές ρίζες.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αν συναντήσουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις, οι οποίες κατά τ' άλλα μας θυμίζουν πολυώνυμα, όπως για παράδειγμα:

$$ημ^4x - 2\,ημ^3x - 7\,ημ^2x + 8\,x + 12 = 0$$

τότε, αρκεί να κάνουμε τα εξής:

1. Θέτουμε τον άγνωστο τριγωνομετρικό αριθμό ίσο μια νέα μεταβλητή, έστω y, και κατόπιν λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση, που προκύπτει.

2. Αν ο τριγωνομετρικός αριθμός που αντικαθιστούμε είναι ημίτονο ή συνημίτονο, δεν ξεχνάμε να θέσουμε τους ανάλογους περιορισμούς, εφόσον:

$$-1 \le ημx \le 1 \quad και \quad -1 \le συνx \le 1$$

Αν πρόκειται για εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, συνx ≠ 0 ή ημx ≠ 0, αντίστοιχα.

3. Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.

4. Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται, σύμφωνα με τους περιορισμούς.

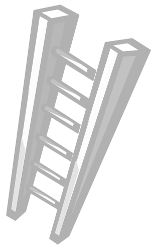
5. Ξε–θέτουμε και λύνουμε τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές εξισώσεις που προκύπτουν, από τις δεκτές λύσεις της πολυωνυμικής.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις της μορφής $\mathbf{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0}$ ($\alpha \neq 0$) ανήκουν σε μια ειδική κατηγορία πολυωνυμικών εξισώσεων, που ονομάζονται **αντίστροφες**. Για παράδειγμα:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι το 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, άρα:



1. Διαιρούμε όλους τους όρους με x^2.

2. Ομαδοποιούμε τα ζεύγη με x, $\frac{1}{x}$ και x^2, $\frac{1}{x^2}$.

3. Βγάζουμε κοινό παράγοντα, αν υπάρχει, από κάθε ζεύγος.

4. Θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$ και $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.*

* Γιατί: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \overset{x+\frac{1}{x}=y}{\Leftrightarrow} y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

5. Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.

6. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$, όπου είχαμε θέσει αρχικά, και για κάθε λύση της πολυωνυμικής βρίσκουμε και μια αντίστοιχη λύση για το x.

Ασκήσεις

Πολυώνυμα

1. Βασικές γνώσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν:

α. $P(x) + Q(x)$

β. $P(x) - Q(x)$

γ. $P(x) \cdot Q(x)$

2. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το πολυώνυμο:

$P(x) = (\lambda + 2)\, x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)\, x + \lambda^2 - 4$

να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο:

$P(x) = (\alpha - \beta)\, x^2 + (\beta - \gamma)\, x + \gamma - \alpha$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο: $P(x) = (\kappa - 2)\, x^2 + (2\lambda + 6)\, x + \kappa + \lambda - 3$ είναι διάφορο του μηδενικού.

5. Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)\, x + \mu - 2\lambda$

$Q(x) = (\mu - \lambda)\, x^2 + 4x + \kappa + \lambda$.

6. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:

$P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$

να παίρνει τη μορφή:

$\alpha\,(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

7. Να βρεθεί πολυώνυμο K(x), ώστε το τετράγωνό του να ισούται με:
$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.

8. Να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο:
$P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$
δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.

9. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το -1 αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το: $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$.

10. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) για το οποίο να ισχύει:
$(x^2 + 1) \cdot P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$.

12. Αν η διαφορά δύο πολυωνύμων βαθμού ν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δείξτε ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

13. Να βρεθούν τα πολυώνυμα f(x), g(x) αν:
α. $f(x + 1) = x^2 - 2x + 3$
β. $g(3x + 1) = 9x^2 - 6x + 1$

14. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου:
$P(x) = (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha) \cdot x^3 + (\alpha^2 - \alpha) \cdot x + 1 - \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

15. Αν ρ είναι ρίζα του $P(2x - 1)$ δείξτε ότι ο $\rho - 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(2x + 1)$.

16. Δίνεται πολυώνυμο P(x) που ικανοποιεί τη συνθήκη:
$$P(x^2 + 1) = [P(x)]^2 + 1 .$$
Αν $P(0) = 1$ και $P(2) = 2$, να βρείτε τα: P(1), P(5) και P(26). Τι παρατηρείτε;

17. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει η σχέση:
$$(x - 3) \cdot P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Διαίρεση πολυωνύμων

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α. $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$

β. $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$

γ. $(3x^3 - 4\alpha x + \alpha^2) : (x - 2\alpha)$

δ. $[7x^3 - (9\alpha + 7\alpha^2)x + 9\alpha^2] : (x - \alpha)$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο f(x) το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

3. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

4. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x) : (x - 1)$ και $P(x) : (x + 1)$ είναι αντίστοιχα 3 και 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 1)\cdot(x + 1)$$

5. Το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διαιρούμενο με το: $g(x) = x^2 - 3x + 2$ δίνει υπόλοιπο: $\upsilon(x) = 4x + 7$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Διαίρεση πολυωνύμου με x – ρ

1. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το P(x) διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\alpha + \beta)x + 6$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το P(x) έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + x - 2$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

5. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.

6. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α. $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$

β. $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$

γ. $[\,6x^3 - (2\alpha + 6\alpha^2)\,x + 3\alpha^2\,] : (x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

δ. $(x^6 - 4x^3 + x^2 - 2) : (2x - 1)$

ε. $(x^5 - \frac{1}{\lambda^2} x^3 + \lambda x^2 - 2) : (\lambda x + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

7. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο:

$P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)\,x + 5$

να έχει για παράγοντα το: $(x - 1)(x + 2)$.

8. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο:

$P(x) = x^3 - x^2 - (3 + \alpha)\,x + \beta + 10$

να έχει παράγοντα το: $(x - 2)^2$.

9. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το $(x + 1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου: $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha + \beta)\,x - 1$.

10. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το: $(x - 2)(x + 3)$.

11. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με $x^2 - 4x + 3$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x) : (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$.

12. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = \alpha x^{\nu+1} + \beta x^{\nu} + 1$ έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$ αποδείξτε ότι το πολυώνυμο: $Q(x) = (\nu + 1)\,\alpha x^{\nu} + \nu\beta x^{\nu-1}$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

13. Αν το πολυώνυμο: $P(x) = (\nu + 1)\,x^{\nu} - \nu x^{\nu+1} + \alpha$ διαιρείται με το $x - 1$, τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το $(x - 1)^2$.

14. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του:

$$P(x) = 8\mu x^3 + (\mu - 1)x + 3$$

με το $(2x + 1)$ να είναι το 5 .

15. Έστω P(x) ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύει: $P(0) = P(1) = 2004$. Να αποδείξετε ότι: $P(x) = x(x - 1)\cdot\pi(x) + 2004$.

4. Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

α. $x^3 - 8x + 7 = 0$

β. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ. $(x^3 - 2x)x + x + 2 = 0$

δ. $(x - 1)(x^4 + x) - 3(x + 4) = 0$

ε. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

2. Αν κ ακέραιος αριθμός να δειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2\nu} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

3. Αν κ, λ ακέραιοι αριθμοί να δειχθεί ότι η εξίσωση: $8\lambda x^{2\nu} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.

* **4.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

β. $9x^3 - 27x^2 - x + 3 = 0$

γ. $3x^4 - 8x^3 = 6x^2 - 16x$

δ. $x^3 - x^2 + 3x - 27 = 0$

ε. $3x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 6x + 27 = 0$

στ. $2x^2(x + 2) = 3x^2 + 15x + 18 = 0$

* **5.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^3 - 7x - 6 = 0$

β. $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9 = 0$

γ. $4x^4 - 9x^2 - 2x + 3 = 0$

δ. $6x^4 + 10x^3 - x^2 + 5x - 2 = 0$

ε. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

β. $4x^4 - 5x^3 - 4x + 5 \geq 0$

γ. $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

δ. $(x + 2)^3 < 8x^2 + 16x$

ε. $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq\leq 0$

στ. $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

ζ. $x^4 (3x - 4) \geq 10x^2 (2x - 1) + 6 - 17x$

5. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

5. Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

* **1.** Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$

β. $2y^4 - 7y^2 - 4 \geq 0$

γ. $3t^4 + 5t^2 + 2 = 0$

δ. $\varphi^4 + 9\varphi^2 + 24 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

β. $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ. $(\omega^2 - 3\omega + 1)^2 - 10(\omega^2 - 3\omega - 3) - 51 = 0$

δ. $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$

ε. $(x^3 - 11x + 12)^4 - 3(x^3 - 11x + 12)^2 - 4 = 0$

στ. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

3. Δίνεται η εξίσωση: $x^5 + x^4 + \kappa x + \lambda = 0$. Να προσδιοριστούν οι κ, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4. Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $x^3 - 12x + 1 = 0$ έχει 3 διαφορετικές ρίζες, ακριβώς μία σε καθένα από τα διαστήματα: $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\frac{x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{x^2-1}$ **β.** $\frac{x^2+2x-4}{x-2}=x^2$

γ. $\frac{x^3+2}{x+1}+\frac{2-x}{x-1}=\frac{2x+1-x^2}{x^2-1}$ **δ.** $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x^2-x-2}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $\frac{x^2+2x-4}{x-2}<1$ **β.** $\frac{x^2}{x+1}-\frac{4}{x-1}\le\frac{2}{x^2-1}$

γ. $\frac{6}{2x-1}-\frac{5}{2x+1}=\frac{1-8x}{1-4x^2}$ **δ.** $\frac{3x^2-1}{x-1}-\frac{2}{x^2-x}>\frac{x^2-3x+2}{x}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $(2ημx-1)^4+6(2ημx-1)^2-7=0$

β. $2ημ^3x+5ημ^2x+5ημx+2=0$

γ. $2συν^4x-5συν^3x+5συνx-2=0$

δ. $2συν^4x+17συν^2x-9=0$

ε. $2ημ^3x-3ημ^2x-3ημx+2=0$

8. Να βρείτε το $α\in[0, \frac{π}{2})$ ώστε το x + 1 να είναι παράγοντας του:

$$P(x)=x^4-(ημ3α)x^3+(2ημ2α)x^2-(ημα)x-1 .$$

Στη συνέχεια για την τιμή του α που θα βρείτε υπολογίστε το πηλίκο της διαίρεσης: P(x) : (x + 1) .

* **9.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $1+\sqrt{x}=\sqrt{3(x-1)}$ **β.** $\sqrt[3]{5φ-7}=φ-1$

γ. $\sqrt{3y+1}+\sqrt{y-1}=\sqrt{7y+1}$ **δ.** $t^2-6t-2\sqrt{t^2-6t+2}=1$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x+\sqrt{5x+10}=8$ **β.** $\sqrt{x}-2=\sqrt{x+1}$

γ. $\sqrt{x-8}=2+x$ **δ.** $\sqrt{x}+\sqrt{x+32}=16$

ε. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\sqrt{x-1}-1=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ **β.** $\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$

γ. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{3+\sqrt{2-x}}=2$ **δ.** $\sqrt{-x-1}-1=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x}}$

ε. $\sqrt{2x^2-7x+4}=\sqrt{x^2+3x-5}$

11. Να λυθεί η εξίσωση: $x+\sqrt{x^2-x+\lambda^2+1}=\lambda$

12. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+3}$ **β.** $x-1\geq\sqrt{x+5}$

γ. $\sqrt{x^2+x+3}\geq x+\dfrac{1}{2}$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

β. $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$

γ. $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$

δ. $2x^5-13x^4-61x^3-61x^2-13x+2=0$