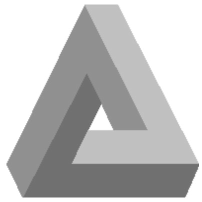
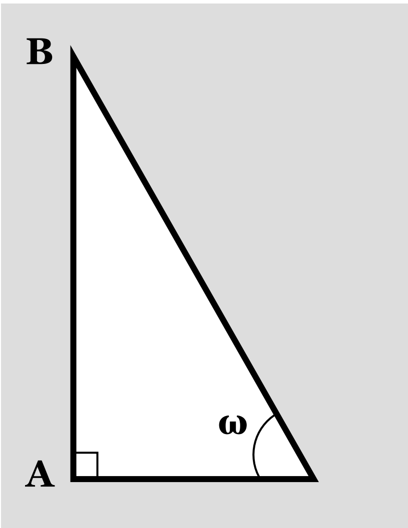
Τριγωνομετρία



«Αυτό το πρόβλημα, τούτ' η μεγάλη συμφορά
για να λυθεί χρειάζεται, δίχως αμφιβολία,
όπως κοιτάζω απ' τη δική σου την πλευρά,
να δεις κι εσύ απ' τη δική μου τη γωνία».

1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



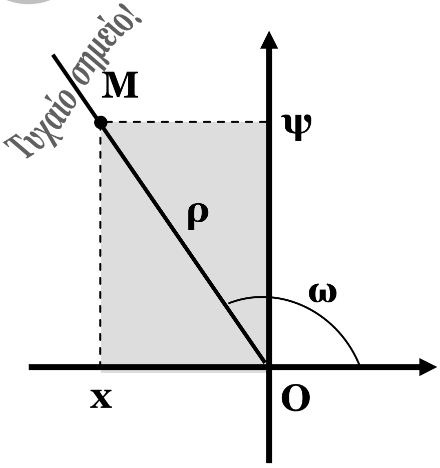
$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$

2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας

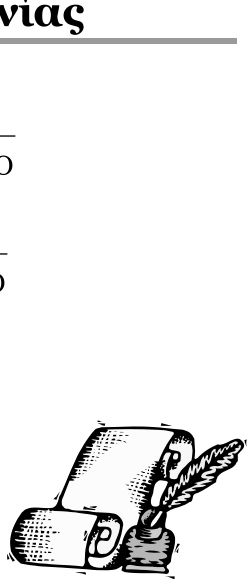


$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

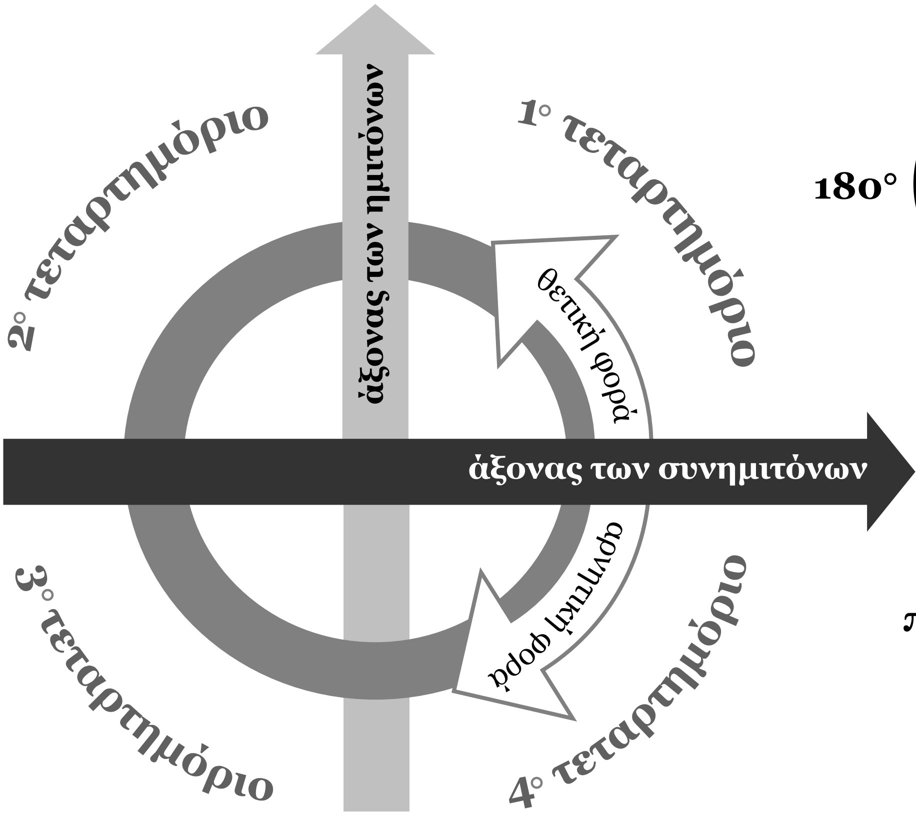
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{x} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}}$$

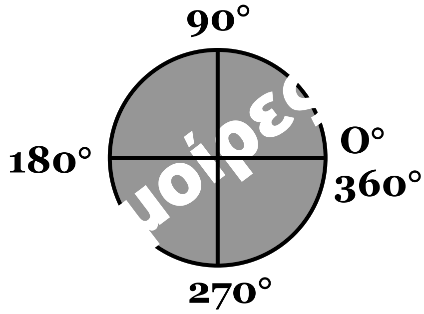
$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{\psi} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{τεταγμένη του Μ}}$$

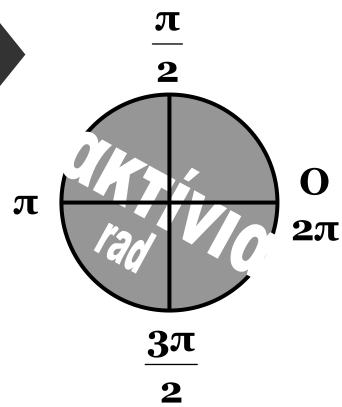


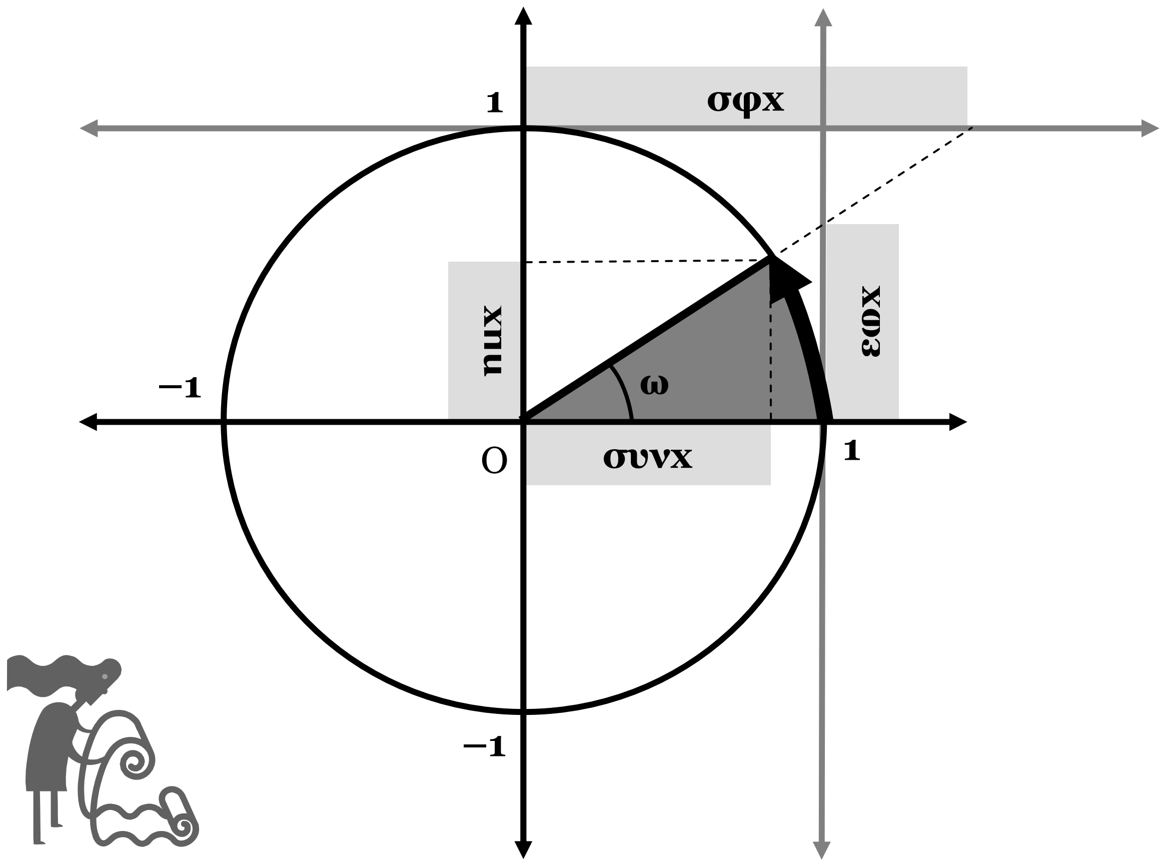
3. Ο τριγωνομετρικός κύκλος

ρ = 1

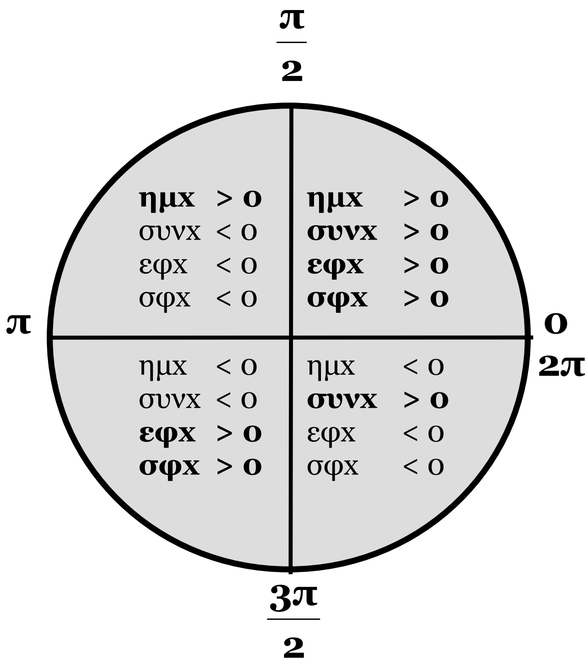








4. Πρόσημο τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Μνημονικός κανόνας
Ο Η Ε Σ

Ο = Όλα θετικά
Η = Ημίτονο θετικό
Ε = Εφαπτομένη θετική
(και συνεφαπτομένη)
Σ = Συνημίτονο θετικό

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	30^o	45^o	60^o
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
σφ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

0^o	90^o	180^o	270^o
0	1	0	−1
1	0	−1	0
0	–	0	–
–	0	–	0

$30^o = \frac{\pi}{6}$ $\quad 45^o = \frac{\pi}{4}$ $\quad 60^o = \frac{\pi}{3}$ $\quad 90^o = \frac{\pi}{2}$ $\quad 180^o = \pi$ $\quad 270^o = \frac{3\pi}{2}$

6. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$-1 \le \eta\mu x \le 1 \qquad -1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \qquad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

Επίσης, πολύ χρήσιμες είναι οι σχέσεις:

$$\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} \qquad \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

7. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

ίδιο συνημίτονο

ΓΩΝΙΕΣ
ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ
x, − x

$$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$
$$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$$
$$\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$$
$$\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$$

εναλλάξ

ΓΩΝΙΕΣ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ
$$x, \quad \frac{\pi}{2} - x$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$
$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$$
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi x$$
$$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x$$

ίδιο ημίτονο

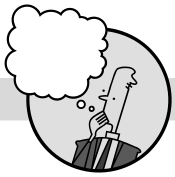
ΓΩΝΙΕΣ
ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ
x, π − x

$$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$
$$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$$
$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$
$$\sigma\varphi(\pi - x) = -\sigma\varphi x$$

ίδια εφαπτομένη
& συνεφαπτομένη

ΓΩΝΙΕΣ
ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ π
x, π + x

$$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$$
$$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$$
$$\varepsilon\varphi(\pi + x) = \varepsilon\varphi x$$
$$\sigma\varphi(\pi + x) = \sigma\varphi x$$



Ένας μνημονικός κανόνας

Πολλαπλάσια του π

Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π, 3π και γενικά πολλαπλάσια του π τότε έχουν ομώνυμους (ίδιους) τριγωνομετρικούς αριθμούς. Για τον υπολογισμό του προσήμου χρειάζεται να γνωρίζουμε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο. Σκεφτόμαστε ειδικότερα:

α. Τα **περιττά** πολλαπλάσια του π καταλήγουν πάντα στο π του τριγωνομετρικού κύκλου, συνεπώς χρησιμοποιούμε τη θέση αυτή για σημείο αναφοράς.

β. Τα **άρτια** πολλαπλάσια του π είναι απλά πολλαπλάσια ολόκληρων κύκλων, συνεπώς απλά τα αγνοούμε.

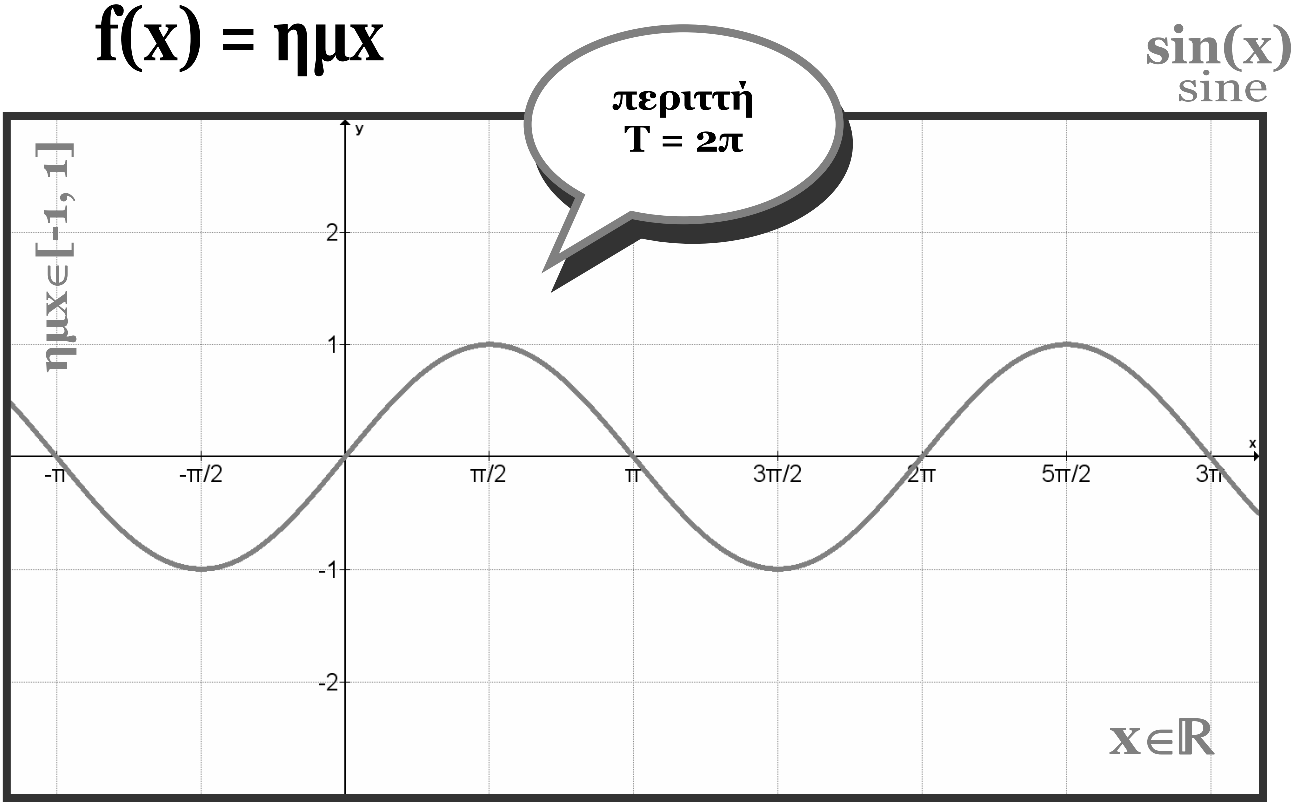
Πολλαπλάσια του π/2

Όταν δύο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά π/2, 3π/2 και γενικά (περιττά) πολλαπλάσια του π/2 τότε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εναλλάσσονται (ημ με συν και εφ με σφ). Για να βρούμε το πρόσημο, διαιρούμε τον αριθμητή του κλάσματος, που μας δίνεται, με το 4 (έτσι βρίσκουμε και απορρίπτουμε τους παραπανίσιους κύκλους) και κρατάμε το υπόλοιπο. Αν το τελευταίο είναι 1 τότε πηγαίνουμε στο π/2, αν είναι 3 στο 3π/2.

Παρατήρηση: Για **άρτια** πολλαπλάσια του π/2 εκτελούμε απλά τη διαίρεση με το 2 και αναγόμαστε σε πολλαπλάσιο του π.

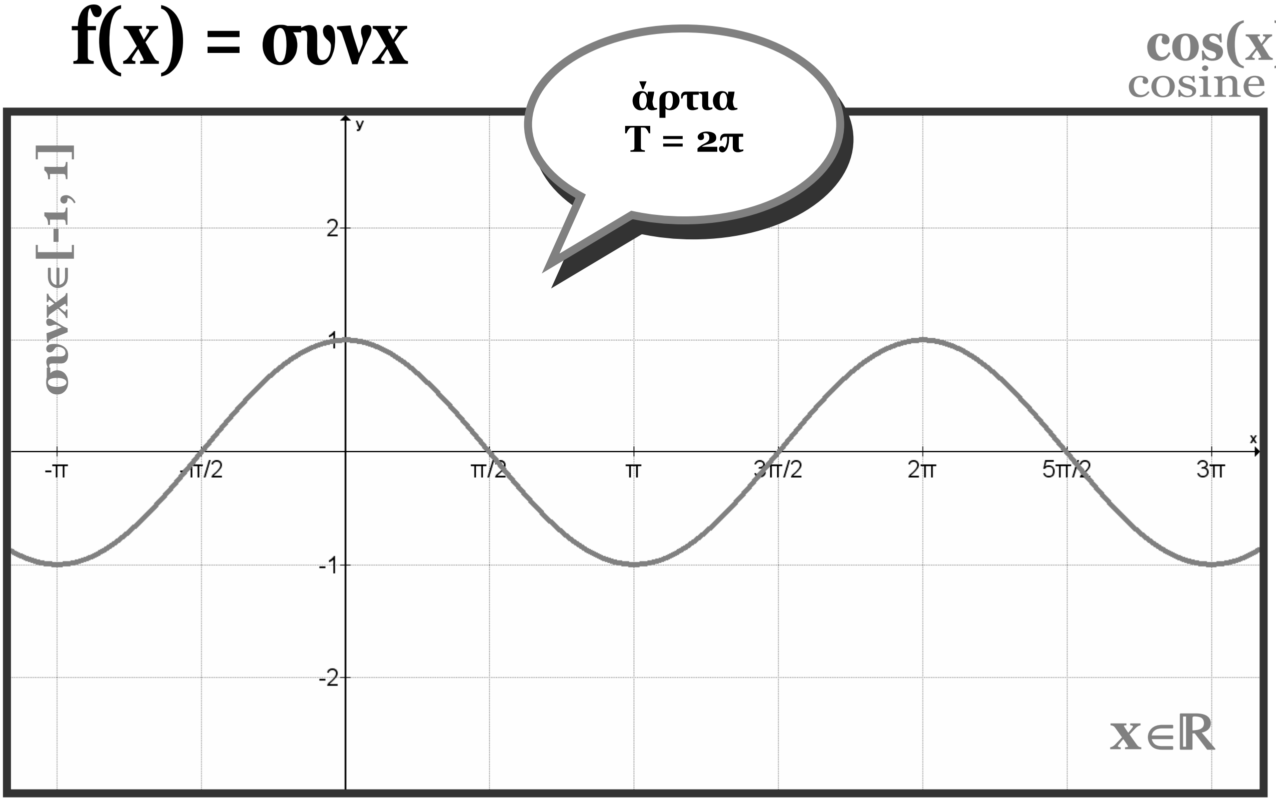
8. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

f(x) = ημx



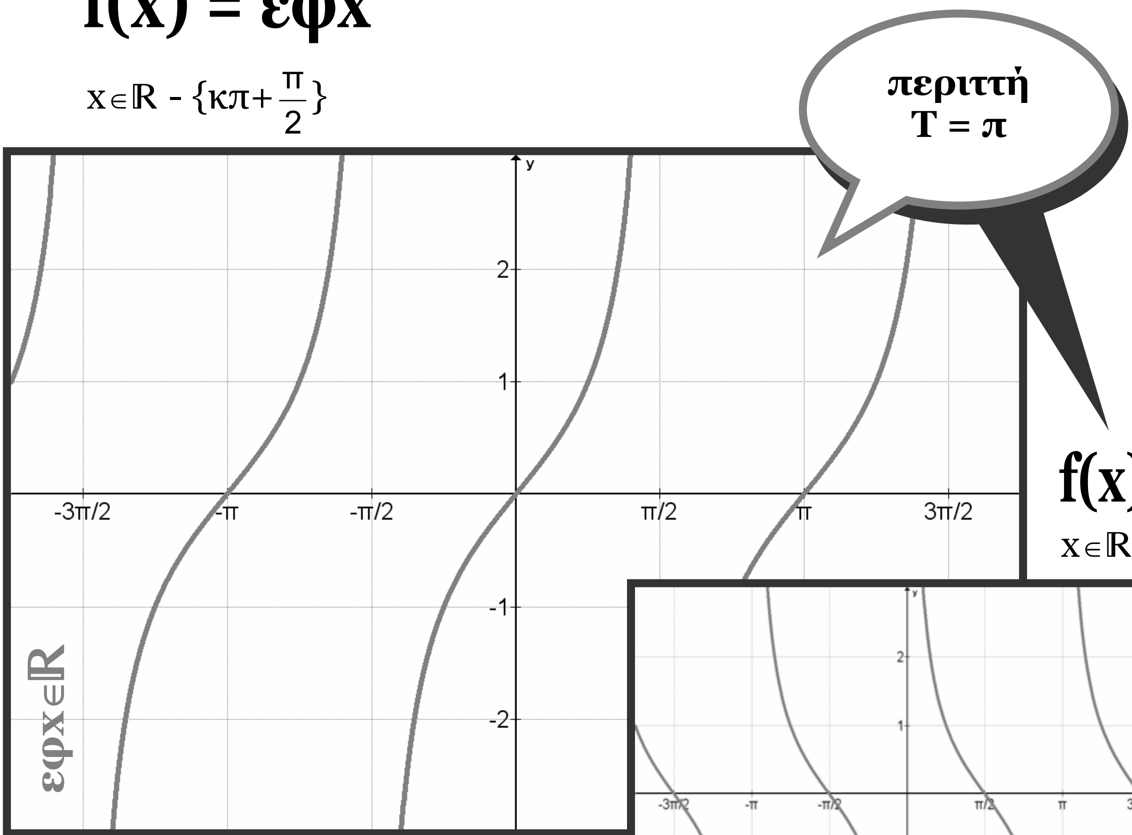
$f(x) = συνx$

cos(x)
cosine



$f(x) = εφx$

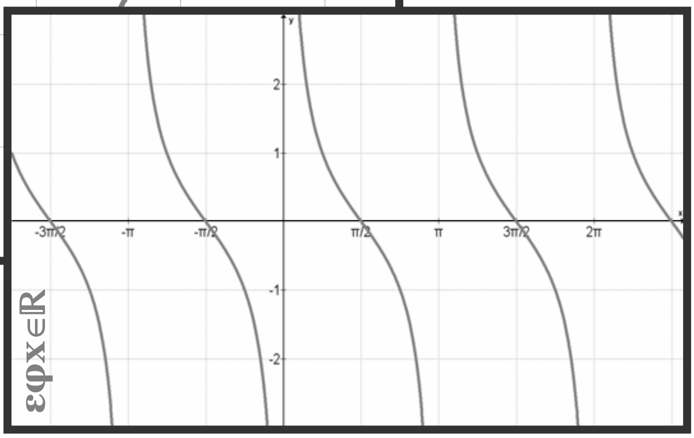
$x \in \mathbb{R} - \{κπ + \frac{π}{2}\}$



tan(x)
tangent

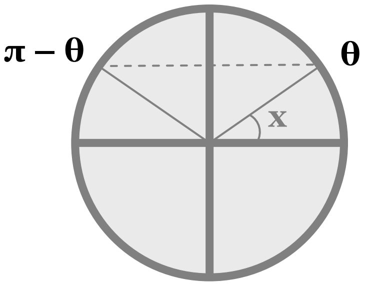
$f(x) = σφx$

$x \in \mathbb{R} - \{κπ\}$

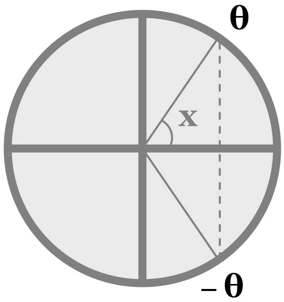


cot(x)
cotangent

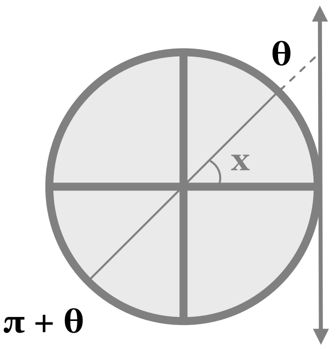
9. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις



$$\textbf{ημx = ημθ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + θ \\ \\ x = 2κπ + (π - θ) \end{cases}, \quad κ \in \mathbb{Z}$$



$$\textbf{συνx = συνθ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + θ \\ \\ x = 2κπ - θ \end{cases}, \quad κ \in \mathbb{Z}$$

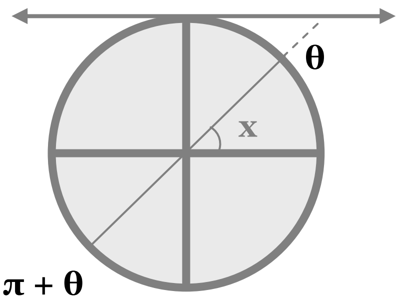


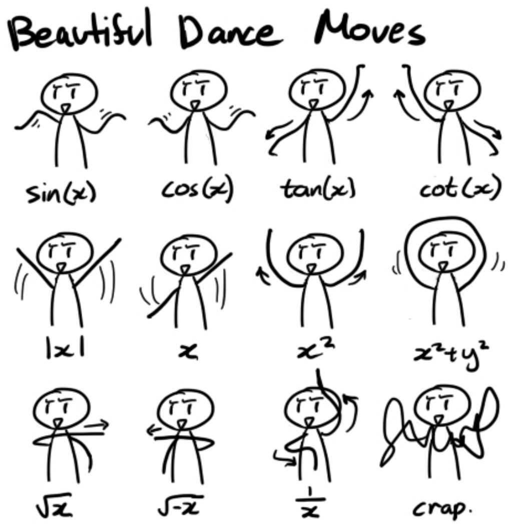
$$\textbf{εφx = εφθ} \Leftrightarrow x = κπ + θ \quad , κ \in \mathbb{Z}$$

$x \neq κπ + \frac{π}{2}$

$$\textbf{σφx = σφθ} \Leftrightarrow x = κπ + θ \quad , κ \in \mathbb{Z}$$

$x \neq κπ$





Μεθοδολογία

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

1. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Αν η τριγωνομετρική εξίσωση έχει μια από τις παρακάτω βασικές μορφές τότε χρησιμοποιούμε τους αντίστοιχους τύπους επίλυσης, τους οποίους έχουμε αποστηθίσει ώστε να μην σπάμε τα νεύρα των καθηγητών μας, κάθε φορά που μας ρωτάνε:

$\kappa \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{\eta\mu x = \pm \eta\mu\theta} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\kappa\pi + \theta \;\text{ ή }\; x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$

$\mathbf{\sigma\upsilon\nu x = \pm \sigma\upsilon\nu\theta} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\kappa\pi + \theta \;\text{ ή }\; x = 2\kappa\pi - \theta$

$\mathbf{\varepsilon\varphi x = \pm \varepsilon\varphi\theta} \quad \Leftrightarrow \quad x = \kappa\pi + \theta \qquad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$\mathbf{\sigma\varphi x = \pm \sigma\varphi\theta} \quad \Leftrightarrow \quad x = \kappa\pi + \theta \qquad x \neq \kappa\pi$

Παρατήρηση: Οι περιορισμοί που συνοδεύουν τους δύο τελευταίους τύπους απαιτούνται γιατί δεν ορίζεται για όλες τις γωνίες εφαπτομένη και συνεφαπτομένη. Αντιθέτως όλες οι γωνίες έχουν ημίτονο και συνημίτονο.

Ασκ.Φυλ. 1, 7 (σελ.18)

Αν στο ένα μέλος δεν έχουμε άμεσα τριγωνομετρικό αριθμό αλλά κάποιον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\mathbf{\eta\mu x = \pm \alpha} \quad , \; -1 \leq \alpha \leq 1$

$\mathbf{\sigma\upsilon\nu x = \pm \alpha} \quad , \; -1 \leq \alpha \leq 1$

$\mathbf{\varepsilon\varphi x = \pm \alpha}$

$\mathbf{\sigma\varphi x = \pm \alpha}$

τότε, αφού καταλλαγιάσει ο πανικός μας, αναζητούμε ψύχραιμα μία γωνία θ τέτοια ώστε ο αντίστοιχος τριγωνομετρικός της αριθμός να ισούται με α. Δύσκολο; Όχι βέβαια, αφού για καλή μας τύχη οι ασκήσεις είναι φτιαγμένες έτσι ώστε να προκύπτει κάποιο απ' τα νούμερα με τα οποία είμαστε εξοικειωμένοι απ' τα σκονάκια μας πχ. 1, 0, -1, $\sqrt{3}/2$, ½ κτλ. Τελικά, αναγόμαστε πάλι σε μια από τις προηγούμενες βασικές εξισώσεις.

Ασκ.Φυλ. 3 (σελ 18)

Γενικότερα, αν έχουμε μια εξίσωση 1ου βαθμού με άγνωστο ένα μόνο τριγωνομετρικό αριθμό, τότε τη λύνουμε ως προς τον άγνωστο με τη πασίγνωστη σε όλους (;) διαδικασία (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, κτλ.), καταλήγοντας σε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Ασκ.Φυλ. 5 (σελ.19)

Ειδικές περιπτώσεις

Ειδικότερα για τις παρακάτω περιπτώσεις, είναι επιθυμητό να υπάρχει μια άνεση στην εξαγωγή των συμπερασμάτων, αλλά και να μην υπάρχει δεν τρέχει και τίποτα:

$κ \in \mathbb{Z}$

$$\textbf{ημx = 0} \Leftrightarrow x = κπ$$
$$\textbf{συνx = 0} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2}$$
$$\textbf{εφx = 0} \Leftrightarrow x = κπ$$
$$\textbf{σφx = 0} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2}$$

$κ \in \mathbb{Z}$

$$\textbf{ημx = 1} \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{π}{2}$$
$$\textbf{ημx = − 1} \Leftrightarrow x = 2κπ - \frac{π}{2}$$
$$\textbf{συνx = 1} \Leftrightarrow x = 2κπ$$
$$\textbf{συνx = − 1} \Leftrightarrow x = 2κπ + π$$

Ασκ.Φυλ. 2 (σελ 18)

Περιπτώσεις αρνητικών πρόσημων

Σε περίπτωση που μπροστά από κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό υπάρχει αρνητικό πρόσημο, τότε χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα (σε περίπτωση που δεν υπάρχει αρνητικό πρόσημο, τότε δεν τον χρησιμοποιούμε):

$$\mathbf{-\,ημx \;=\; ημ(-x)}$$
$$\mathbf{-\,συνx \;=\; συν(π - x)}$$
$$\mathbf{-\,εφx \;=\; εφ(-x)}$$
$$\mathbf{-\,σφx \;=\; σφ(-x)}$$

Ασκ.Φυλ. 4 (σελ.19)

2. Κανόνας συμπληρωματικών γωνιών

Αν η τριγωνομετρική εξίσωση έχει μία από τις παρακάτω μορφές, τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα των συμπληρωματικών γωνιών καταλήγουμε σε μια ισοδύναμη εξίσωση με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό και στα δύο μέλη. Έτσι, αναγόμαστε σε μια εξίσωση της προηγούμενης κατηγορίας, που υποτίθεται ότι γνωρίζουμε:

$$\textbf{ημx} = \pm\textbf{συνθ} \iff \textbf{ημx} = \pm\textbf{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\textbf{συνx} = \pm\textbf{ημθ} \iff \textbf{συνx} = \pm\textbf{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\textbf{εφx} = \pm\textbf{σφθ} \iff \textbf{εφ} = \pm\textbf{εφ}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\textbf{σφx} = \pm\textbf{εφθ} \iff \textbf{σφx} = \pm\textbf{σφθ}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

Ασκ.Φυλ. 8 (σελ.19)

3. Αλγεβρική εξίσωση ως προς ένα τριγωνομετρικό αριθμό

1ου βαθμού

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση αυτή λύνουμε την εξίσωση σύμφωνα με τα γνωστά σε όλους μας λάθη στα βήματα, τις πράξεις και τα πρόσημα (όπως δηλαδή σε κάθε πρωτοβάθμια εξίσωση με έναν άγνωστο), καταλήγοντας σε μια περίπτωση της 1ης κατηγορίας εξισώσεων.

Ασκ.Φυλ. 5 (σελ.19)

2ου βαθμού

Ανάλογα με τη μορφή της εξίσωσης, τα χάνουμε και με διαφορετικό τρόπο:

1) $\boldsymbol{\alpha \cdot ημ^2x + \beta = 0}$ — Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και στη συνέχεια $\pm$ τετραγωνική ρίζα.

Ασκ.Φυλ. 10 (σελ.20)

2) $\alpha\cdot\eta\mu^2x + \beta\cdot\eta\mu x = 0$ Βγάζουμε κοινό παράγοντα το ημx και θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με το 0.

Ασκ.Φυλ. 9 (σελ.20)

3) $\alpha\cdot\eta\mu^2x + \beta\cdot\eta\mu x + \gamma = 0$ Δηλαδή, πλήρες τριώνυμο. Λύνεται κατά τα γνωστά με διακρίνουσα κτλ. Βοηθάει αν θέσουμε ημx = y οπότε η εξίσωση παίρνει την πιο κατανοητή μορφή:

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

Ασκ.Φυλ. 12 (σελ.21)

Εννοείται πως, χάρη συντομίας, οι παραπάνω μορφές ισχύουν και για τις αντίστοιχες εξισώσεις με συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, αλλά πού να πάει ο νους σας.

Παρατήρηση: Προσέχουμε όταν αντικαθιστούμε ημx = y ή συνx = y να μην παραλείπουμε τον περιορισμό $-1 \le y \le 1$. Για την εφx και σφx δεν υπάρχει αντίστοιχος περιορισμός.

3ου ή μεγαλύτερου βαθμού

Αν υπάρχει μόνο ένας τριγωνομετρικός αριθμός τότε λύνουμε ως προς αυτόν και στη συνέχεια βγάζουμε αντίστοιχης τάξης ρίζα, μια γελοία διαδικασία την οποία φυσικά αγνοούμε θανάσιμα (βλ. παρατήρηση πιο κάτω).

Ασκ.Φυλ. 10 (σελ.20)

Γενικότερα

Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότεροι όροι της εξίσωσης που περιέχουν άγνωστο, τους μεταφέρουμε όλους στο 1ο μέλος και παραγοντοποιούμε. Κατόπιν θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν και λύνουμε ξεχωριστά, κάθε εξίσωση που προκύπτει. Πείθουμε τον εαυτό μας ότι μπορούμε να εκτελέσουμε όλα τα προηγούμενα χωρίς καμία βοήθεια!

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε τους κανόνες επίλυσης της $\mathbf{x^\nu = \alpha}$.

$\nu\in\mathbb{Z},\ \alpha\in\mathbb{R}$

1. Αν **ν = άρτιος** και **α > 0** τότε: $x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$
2. Αν **ν = άρτιος** και **α < 0** τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. Αν **ν = περιττός** και **α > 0** τότε: $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$
4. Αν **ν = περιττός** και **α < 0** τότε: $x = -\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

Κλασματικές εξισώσεις

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν δεν ξέρουμε πολύ κρίμα!) με το ΕΚΠ και έτσι οδηγούμαστε σε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

4. Αλγεβρική εξίσωση με δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς

1ου βαθμού

Προσπαθούμε χωρίζοντας τους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς να αναχθούμε σε μια περίπτωση της δεύτερης κατηγορίας ασκήσεων. Αν δεν τα καταφέρουμε φυσικά ξαναπροσπαθούμε.

Αν το προηγούμενο δεν είναι εφικτό, δεν ανοίγουμε κατευθείαν την τηλεόραση ή τον υπολογιστή μας, αλλά μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και παραγοντοποιούμε. Κατόπιν θέτουμε κάθε παράγοντα ίσο με το μηδέν και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

Ασκ.Φυλ. 6 (σελ. 19), 11 (σελ.20)

2ου βαθμού με ημx, συνx

Αντικαθιστούμε έναν από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς που βρίσκονται υψωμένοι στο τετράγωνο, με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας: **ημ²x = 1 – συν²x** ή **συν²x = 1 – ημ²x**. Με αυτόν τον τρόπο αναγόμαστε σε μια 2βάθμια εξίσωση με ένα μόνο τριγωνομετρικό αριθμό, η οποία λύνεται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη κατηγορία ασκήσεων (απίστευτο; αυτή είναι η ομορφιά των μαθηματικών!).

Ασκ.Φυλ. 13 (σελ.21)

5. Άλλες μορφές

συνx = ±α·ημx, ημx = ±α·συνx $(\alpha \in \mathbb{R})$

Σε κάθε περίπτωση, διαιρούμε και τα δύο μέλη με ημx ή συνx, αντίστοιχα. Έτσι προκύπτει μια εξίσωση της μορφής:

$$\text{συνx} = \pm\alpha \cdot \text{ημx} \Leftrightarrow \frac{\text{συνx}}{\text{ημx}} = \pm\alpha \cdot \frac{\text{ημx}}{\text{ημx}} \Leftrightarrow \text{σφx} = \pm\alpha$$

$$\text{ημx} = \pm\alpha \cdot \text{συνx} \Leftrightarrow \frac{\text{ημx}}{\text{συνx}} = \pm\alpha \cdot \frac{\text{συνx}}{\text{συνx}} \Leftrightarrow \text{εφx} = \pm\alpha$$

η οποίες λύνονται εύκολα, όπως οι εξισώσεις της πρώτης εθνικής κατηγορίας.

Παρατηρήσεις

1. Για να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο απαραίτητη προϋπόθεση είναι και στα δύο μέλη είτε οι γωνίες, είτε οι παραστάσεις που βρίσκονται μέσα στους τριγωνομετρικούς αριθμούς να είναι ίσες.
2. Επειδή διαιρούμε και τα δύο μέλη με ημx ή συνx θα πρέπει ημx ή συνx $\neq$ 0. Ωστόσο, αν ήταν πχ. στην 1η περίπτωση ημx = 0, τότε θα ήταν επίσης: συνx = ±α·0 ή συνx = 0. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού πρέπει απαραίτητα: ημ^{2}x + συν^{2}x = 1. Συνεπώς, ημx $\neq$ 0 για κάθε x$\in\mathbb{R}$ (Ομοίως εξετάζουμε και τη δεύτερη περίπτωση).

Ασκ.Φυλ. 14 (σελ.21)

Σύνθετες μορφές με ημx, συνx, εφx και σφx

Στην περίπτωση αυτή, αναλύουμε την εφαπτομένη ή τη συνεφαπτομένη, σύμφωνα με τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές ταυτότητες: εφx = $\frac{\text{ημx}}{\text{συνx}}$, σφx = $\frac{\text{συνx}}{\text{ημx}}$. Κατόπιν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών με το ΕΚΠ και… ευχόμαστε να καταλήξουμε σε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Ασκ.Φυλ. 15 (σελ.21), 17 (σελ.22)

Ασκήσεις

Τριγωνομετρία

1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

1. Ποιες από τις παρακάτω τιμές δε μπορεί να είναι ημίτονο γωνίας;

α. $\frac{1}{2}$ **β.** $-\frac{3}{2}$ **γ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **δ.** $-\frac{1}{2}$ **ε.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **στ.** $-\frac{\sqrt{8}}{4}$ **ζ.** $\frac{3}{\sqrt{3}}$

2. Αν $|ημx| + |συνx| = 2$ τότε η γωνία x ισούται με:

α. 0^o **β.** 90^o **γ.** 180^o **δ.** 270^o **ε.** 45^o **στ.** Τίποτα από αυτά

3. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων:

α. $ημ80^o \cdot συν260^o$ **β.** $συν120^o \cdot εφ310^o$

γ. $ημ100^o \cdot συν100^o \cdot εφ100^o$ **δ.** $εφ240^o \cdot συν320^o \cdot σφ510^o$

4. Η τιμή του γινομένου $συν0^o \cdot συν90^o \cdot συν180^o \cdot συν270^o \cdot συν360^o$ είναι:

α. -1 **β.** 1 **γ.** 0 **δ.** 2 **ε.** $\frac{1}{2}$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$συν^2 0 + συν^2\frac{π}{6} + ημ^2\frac{π}{4} - ημ^2\frac{π}{3} - εφ^2\frac{π}{4}$$

6. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α. $εφ1845^o$ **β.** $ημ2580^o$ **γ.** $σφ\frac{97π}{6}$ **δ.** $συν\frac{11π}{2}$

7. Εάν $ημx = \frac{\sqrt{2}}{3}$ και $90^o < x < 180^o$, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

8. Εάν $εφθ = -\frac{3}{4}$ και $270^o < θ < 360^o$, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ.

2. Αποδεικτικές ασκήσεις

Να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες x, y ισχύουν οι σχέσεις:

1. $(ημx - συνx)^2 = 1 - 2 \cdot ημx \cdot συνx$

2. $ημ^4x - συν^4x = ημ^2x - συν^2x = 1 - 2 \cdot συν^2x = 2 \cdot ημ^2x - 1$

3. $συν^2x \cdot συν^2y - ημ^2x \cdot ημ^2y + 1 = συν^2x + συν^2y$

4. $(1 + ημx + συνx)^2 = 2 \cdot (1 + συνx) \cdot (1 + ημx)$

5. $\frac{1 - εφ^2x}{1 + εφ^2x} = 1 - 2 \cdot ημ^2x$

6. $1 - \frac{συν^2x}{1 + ημx} = ημx$

7. $εφ^2x \cdot συν^2x + σφ^2x \cdot ημ^2x = 1$

8. $ημ^3x + ημx \cdot συν^2x = ημx$

9. $\frac{ημx - συνx + 1}{ημx + συνx - 1} = \frac{συνx}{1 - ημx}$

10. $\frac{ημx}{1 + συνx} + \frac{1 + συνx}{ημx} = \frac{2}{ημx}$

11. $3συν^2x + 2ημ^2x = \frac{3 + 2εφ^2x}{1 + εφ^2x}$

12. $εφx \cdot εφy \cdot (σφx + σφy) = εφx + εφy$

13. $\frac{ημx}{1 + συνx} - \frac{1 + συνx}{ημx} + 2σφx = 0$

14. $\frac{συν^3x}{ημx} + \frac{εφx}{1 + εφ^2x} = σφx$

15. $\frac{εφx + σφy}{εφy + σφx} = \frac{εφx}{εφy}$

16. $\frac{1}{συνx} - \frac{συνx}{1 + ημx} = εφx$

17. $\frac{σφx}{1 - σφx} - \frac{εφx}{1 - εφx} = \frac{ημx + συνx}{ημx - συνx}$

18. $\frac{εφx + ημx}{εφx - ημx} = \left(\frac{1}{ημx} + σφx\right)^2$

19. $\dfrac{εφx - ημx}{ημ^3x} = \dfrac{1}{συνx + συν^2x}$

20. $εφx - σφx = \dfrac{1-2συν^2x}{ημx \cdot συνx}$

21. $\dfrac{σφx}{1+σφx} + \dfrac{εφx}{1+εφx} = 1$

22. $σφx + \dfrac{ημx}{1+συνx} = \dfrac{1}{ημχ}$

23. $ημ^2x \cdot (1 + σφ^2x) + συν^2x \cdot (1 + εφ^2x) = 2$

24. $συν^4x + ημ^2x \cdot συν^2x + ημ^2x = 1$

3. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα

ημ (–x) = – ημx	ημ (π – x) =	$ημ\left(\frac{3π}{2} + x\right) =$
συν (–x) =	συν (π – x) =	$συν\left(\frac{3π}{2} + x\right) =$
εφ (–x) =	εφ (π – x) =	$εφ\left(\frac{3π}{2} + x\right) =$
σφ (–x) =	σφ (π – x) =	$σφ\left(\frac{3π}{2} + x\right) =$
$ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) =$	ημ (π + x) =	ημ (2π – x) =
$συν\left(\frac{π}{2} - x\right) =$	συν (π + x) =	συν (2π – x) =
$εφ\left(\frac{π}{2} - x\right) =$	εφ (π + x) =	εφ (2π – x) =
$σφ\left(\frac{π}{2} - x\right) =$	σφ (π + x) =	σφ (2π – x) =
$ημ\left(\frac{π}{2} + x\right) =$	$ημ\left(\frac{3π}{2} - x\right) =$	ημ (2π + x) =
$συν\left(\frac{π}{2} + x\right) =$	$συν\left(\frac{3π}{2} - x\right) =$	συν (2π + x) =
$εφ\left(\frac{π}{2} + x\right) =$	$εφ\left(\frac{3π}{2} - x\right) =$	εφ (2π + x) =
$σφ\left(\frac{π}{2} + x\right) =$	$σφ\left(\frac{3π}{2} - x\right) =$	σφ (2π + x) =

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α. $\dfrac{ημ(3π+α)\cdot σφ(7π+α)\cdot συνα}{συν(3π+α)\cdot σφ(4π+α)\cdot ημα}$

β. $\dfrac{2\cdot ημ(π-θ)+συν\left(\dfrac{π}{2}-θ\right)-2\cdot ημ(2π-θ)}{ημ\left(\dfrac{π}{2}-θ\right)-3\cdot συν(π-θ)+συν(2π-θ)}$

3. Να εκφράσετε συναρτήσει των συνx και ημx την παράσταση:

$$A = συν(-x) + ημ(-x) + ημ(π + x) + συν(π - x)$$

4. Εάν Α, Β και Γ είναι γωνίες τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α. $ημ(Β + Γ) = ημΑ$

β. $συν(Β + Γ) = - συνΑ$

γ. $εφ(Β + Γ) = - εφΑ$

5. Αν $0 < α < \dfrac{π}{2}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{συν\left(\dfrac{π}{2}-α\right)\cdot εφ\left(\dfrac{9π}{2}+α\right)\cdot ημ\left(\dfrac{3π}{2}-α\right)\cdot συνα}{ημ\left(\dfrac{3π}{2}+α\right)\cdot σφ\left(\dfrac{6π}{2}-α\right)\cdot συν(π-α)\cdot ημα}=-1$$

6. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{ημ^2 212°\cdot συν302°-συν^3 148°}{ημ58°\cdot συν32°+ημ392°\cdot ημ148°-ημ58°\cdot ημ148°}=συν32°+ημ32°$$

7. Έστω $A = \dfrac{εφ\left(\dfrac{3π}{2}-x\right)\cdot συν\left(\dfrac{3π}{2}+x\right)}{συν(2π-x)}$

$B = συν\left(x-\dfrac{π}{2}\right)\cdot ημ(π + x)$

$Γ = συν(π + x)\cdot ημ\left(x-\dfrac{π}{2}\right)$

Να αποδειχθεί ότι:

α. $Γ = Β + 1$ **β.** $Β + Α = συν^2α$ **γ.** $Α + Β = Γ$

4. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημx = ημ\frac{π}{7}$ **ii.** $ημx = ημ70^o$

iii. $συνx = συν\frac{3π}{15}$ **iv.** $συνx = συν25^o$

v. $εφx = εφ\frac{π}{10}$ **vi.** $εφx = εφ42^o$

vii. $σφx = σφ\frac{2π}{11}$ **viii.** $σφx = σφ88^o$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημx = 0$ **ii.** $ημx = 1$ **iii.** $ημx = -1$

iv. $συνx = 0$ **v.** $συνx = 1$ **vi.** $συνx = -1$

vii. $εφx = 0$ **viii.** $εφx = 1$ **ix.** $εφx = -1$

x. $σφx = 0$ **xi.** $σφx = 1$ **xii.** $σφx = -1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημx = \frac{1}{2}$ **ii.** $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **iii.** $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iv. $συνx = \frac{1}{2}$ **v.** $συνx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **vi.** $συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

vii. $εφx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **viii.** $εφx = 1$ **ix.** $εφx = \sqrt{3}$

x. $σφx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **xi.** $σφx = 1$ **xii.** $σφx = \sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **ii.** $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

iii. $\varepsilon\varphi x = -1$ **iv.** $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$

v. $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ **vi.** $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

vii. $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **viii.** $\sigma\varphi x = -1$

ix. $\eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{10}$ **x.** $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}$

xi. $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 55^{o}$ **xii.** $\sigma\varphi x = -\sigma\varphi 17^{o}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\sqrt{2}\,\eta\mu x - 1 = 0$ **ii.** $2\sqrt{3}\,\eta\mu x + 3 = 0$

iii. $2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$ **iv.** $6\sigma\upsilon\nu x - 3\sqrt{2} = 0$

v. $\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1 = 0$ **vi.** $\sqrt{6}\,\sigma\varphi x + \sqrt{18} = 0$

vii. $\eta\mu x - \eta\mu\frac{2\pi}{9} = 0$ **viii.** $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} = 0$

ix. $\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{8} = 0$ **x.** $\sigma\varphi x + \sigma\varphi\frac{\pi}{9} = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x\cdot(\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$ **ii.** $\sigma\upsilon\nu x\cdot(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$

iii. $\varepsilon\varphi x\cdot(\sqrt{3}\,\sigma\varphi x + 1) = 0$ **iv.** $\sigma\varphi x\cdot(\varepsilon\varphi x - 1) = 0$

v. $(1 - \eta\mu x)\cdot(\sqrt{2} + 2\sigma\upsilon\nu x) = 0$ **vi.** $(\varepsilon\varphi x + \sqrt{3})\cdot(\sigma\varphi x + 1) = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{5}\right) = \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{10}\right)$ **ii.** $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

iii. $\sigma\upsilon\nu\pi x = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi x-\frac{\pi}{3}\right)$ **iv.** $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

iii. $\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-2x\right) = 0$ **iv.** $\sigma\varphi(x + 10^{o}) - \sigma\varphi 2x = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημx = συνx$ **ii.** $εφx = σφx$

iii. $ημ2x = συν\left(x-\frac{π}{3}\right)$ **iv.** $συν2x = ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)$

v. $εφ(π + 2x) = σφ\left(x-\frac{π}{4}\right)$ **vi.** $σφ\left(2x-\frac{π}{5}\right) - εφ\left(x+\frac{π}{10}\right) = 0$

vii. $ημ\left(3x-\frac{π}{4}\right) = -συν\left(x-\frac{π}{4}\right)$ **viii.** $συν\left(x-\frac{π}{3}\right) = -ημ\left(\frac{π}{4}-x\right)$

ix. $εφ\left(2x-\frac{π}{3}\right) = -σφ\left(2x-\frac{π}{6}\right)$ **x.** $σφ\left(x-\frac{π}{4}\right) + εφ\left(x+\frac{π}{8}\right) = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2ημ^2x = \sqrt{3}\,ημx$ **ii.** $ημ^2x - \sqrt{2}\,ημ^3x = 0$

iii. $συνx - \sqrt{2}\,συν^2x = 0$ **iv.** $2συν^2x = -συνx$

v. $εφ^3x - εφx = 0$ **vi.** $\sqrt{3}\,σφx - σφ^2x = 0$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημ^2x = \frac{1}{2}$ **ii.** $ημ^2(2x) - \frac{3}{4} = 0$

iii. $συν^2x - 1 = 0$ **iv.** $4συν^2\left(x-\frac{π}{3}\right) = 1$

v. $3εφ^2x - 1 = 0$ **vi.** $σφ^2(\frac{x}{2}) - 1 = 0$

vii. $8ημ^3x + 1= 0$ **viii.** $9σφ^4x - 1 = 0$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημx·συνx - 1 = συνx - ημx$

ii. $2ημx + 2\sqrt{2}\,ημx·συνx = 1 + 2ημx$

iii. $ημ^2x - συν^2x = 0$

iv. $\sqrt{3}\,εφx - εφ^2x - \sqrt{3}\,σφx + 1 = 0$

v. $(1 - 2ημx)^2 + 2ημx - 1 = 0$

iv. $σφ^4x + σφx = 0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημ^2x - 2ημx + 1 = 0$ **ii.** $2ημ^2x + ημx - 1 = 0$

iii. $4συν^2x - 4συνx + 1 = 0$ **iv.** $συν^2x - 2συνx - 3 = 0$

v. $ημ^2x - \frac{4+\sqrt{3}}{2}ημx + \sqrt{3} = 0$ **vi.** $συν^2x - \frac{3\sqrt{2}}{2}συνx + 1 = 0$

vii. $4συν^2x - 2(\sqrt{3} + 1)συνx + \sqrt{3} = 0$

viii. $εφ^2x - (1 - \sqrt{3})εφx - \sqrt{3} = 0$ **ix.** $3σφ^2x - 4\sqrt{3}σφx + 3 = 0$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $2συν^2x - 10ημ^2x + 1 = 0$ **ii.** $5συν^2x - ημ^2x - 5 = 0$

iii. $2ημ^2x + 1 = -\sqrt{3}συνx$ **iv.** $2ημ^2x + 6 - 6συνx = 0$

v. $4συνx - 2συν^2x = 2ημ^2x - 3$ **vi.** $3 - 3\sqrt{2}συνx = 2ημ^2x$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $ημx = \sqrt{3}συνx$ **ii.** $2ημx + \sqrt{12}συνx = 0$

iii. $ημ\left(x - \frac{π}{4}\right) + συν\left(x - \frac{π}{4}\right) = 0$ **iv.** $\sqrt{3}ημ3x = συν3x$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $σφx = συνx$ **ii.** $εφx = ημx$

iii. $εφx - συνx + \frac{1}{συνx} = 0$ **iv.** $ημx - \frac{1}{συνx} = 1 - εφx$

v. $2εφ^2x + \frac{εφx}{συνx} = 1$ **vi.** $σφ^2x \cdot ημx - συνx = 0$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $εφx = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [0, 2π]$ **ii.** $3συνx + \sqrt{3} = 0$, $x \in (-π, π)$

iii. $εφ\left(\frac{π}{3} - x\right) = 1$, $x \in (\frac{π}{2}, \frac{5π}{2}]$ **iv.** $\sqrt{2}ημ(πx) - 1 = 0$, $x \in [-1, 2]$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\sigma\upsilon\nu x\,(1+\varepsilon\varphi^2 x) - \varepsilon\varphi x = \sigma\upsilon\nu x$ **ii.** $\varepsilon\varphi^2 x = 4\,\sigma\upsilon\nu^2 x - 1$

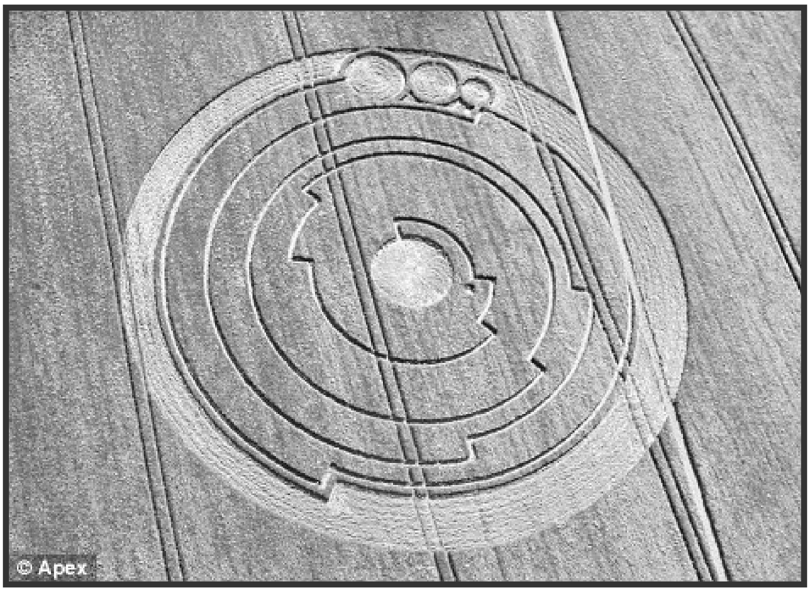
iii. $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2\varepsilon\varphi x$ **iv.** $\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x - 1$

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του x, καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της.

i. $f(x) = 2 - \eta\mu\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right),\ \ 0 \le x \le 2\pi$

ii. $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right),\ \ 0 \le x \le 2\pi$

iii. $f(x) = 3 + 3\sigma\upsilon\nu(\pi x - \pi),\ \ -1 \le x \le 1$



Ποιος είναι ο μυστικός κώδικας της εικόνας;