Συστήματα

« Το διάβα σου άπειρο, μονάχο, με κόπο.
Στα δεσμά - δες, κι εγώ - της δικής μου ευθείας.
Λυτρωθήκαμε κάποτε στην κορυφή μιας γωνίας,
απ' του απείρου τη μέγγενη,
συντροφιά βρήκαμε τρόπο ».

1. Γραμμικές Εξισώσεις

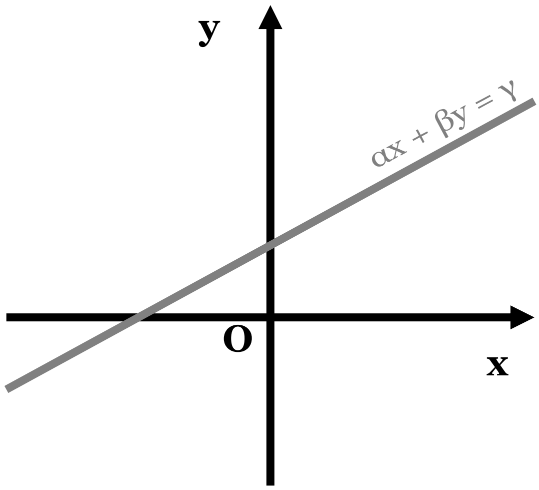
Κάθε εξίσωση **1ου βαθμού** με **2 αγνώστους** ονομάζεται **γραμμική**.

Η γενική της μορφή είναι $\mathbf{\alpha x + \beta y + \gamma = 0}$, όμως εμείς για πρακτικούς λόγους (και όχι γιατί δεν έχουμε ιδέα από μαθηματικά) θα συνηθίζουμε να τη γράφουμε $\mathbf{\alpha x + \beta y = \gamma}$, σα να λέμε δηλαδή πως έχουμε χωρίσει γνωστούς από αγνώστους.

Αν τη λύσουμε **ως προς y** γίνεται προφανής ο λόγος για τον οποίο καλείται γραμμική, αφού παίρνει τη μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας.

$$\mathbf{y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \gamma}$$

Αλλά αυτό υποτίθεται ότι το έχουμε διδαχτεί απ' το Γυμνάσιο (ορίστε;).



Άρα

Θυμάμαι καλά ότι κάθε αλγεβρική γραμμική εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά μία **ευθεία γραμμή**.

Οι λύσεις

Είναι λογικό να σκεφτούμε πως εφόσον μια ευθεία περιέχει **άπειρα σημεία** έτσι και η αντίστοιχη εξίσωση που την περιγράφει θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από αντίστοιχες άπειρες λύσεις, μία για κάθε σημείο.

- Άρα, κάθε γραμμική εξίσωση, από μόνη της, έχει **άπειρες λύσεις**.
- Για να βρούμε μερικές από αυτές, θέτουμε **τυχαίες** τιμές στη μεταβλητή **x** κι αφού εκτελέσουμε όλες τις δυνατές πράξεις βρίσκουμε μιαν αντίστοιχη τιμή για τη μεταβλητή **y**.
- Συνεπώς, μια γραμμική εξίσωση δεν έχει ως λύση έναν μοναδικό αριθμό, αλλά ένα **ζεύγος** αριθμών που την ικανοποιούν. Το ζεύγος αυτό είναι **διατεταγμένο** (δηλαδή, έχει αυστηρά καθορισμένη σειρά, ποιον αριθμό γράφουμε πρώτο και ποιον δεύτερο) και το συμβολίζουμε ως **(x, y)**.

πχ. Για να βρούμε **μια** λύση της εξίσωσης $y = 3x - 6$ θέτουμε όπου x ό,τι μας κατέβει ☺, ας πούμε $x = 5$, και εκτελούμε τις πράξεις:

$$y = 3 \cdot 5 - 6 = 15 - 6 = 9$$

Άρα, μια λύση της εξίσωσης είναι η **(x, y) = (5, 9)** .

- Επειδή δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε όλες από τις άπειρες αυτές λύσεις, αρκεί να σημειώνουμε τη **μορφή** που θα έχουν, ώστε να μπορεί κανείς να υπολογίσει όσες θέλει, ανά πάσα ώρα και στιγμή.

πχ. Για το προηγούμενο παράδειγμα, οι μορφή που θα έχουν οι λύσεις μας θα είναι: $(x, y) = (x, 3x - 6)$ ή καλύτερα **(x, y) = (κ, 3κ - 6)** . Παρατηρούμε ότι, για το σκοπό αυτό, θα πρέπει αναπόφευκτα να λύσουμε τη γραμμική εξίσωση ως προς y.

2. Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

Όταν μιλάμε για σύστημα μιλάμε για **κοινές λύσεις!**

Αν, δηλαδή, μια γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις και μια άλλη γραμμική εξίσωση έχει άλλες τόσες άπειρες λύσεις, είναι δυνατόν κάποιες από αυτές τις λύσεις να είναι κοινές και για τις δύο; Για να πλησιάσουμε την απάντηση, αρκεί να σκεφτούμε το εξής:

Αν κάθε γραμμική εξίσωση παριστάνει μία ευθεία, τότε 2 γραμμικές εξισώσεις θα παριστάνουν 2 ευθείες! (Απίστευτο έτσι;; κι όμως αληθινό!! ☺) Αν θυμηθούμε (από τη Γεωμετρία) ποιες μπορεί να είναι οι **σχετικές θέσεις** που μπορούν να πάρουν δύο ευθείες μεταξύ τους, τότε αμέσως μπορούμε να πάρουμε μιαν ιδέα για το τι μπορεί να συμβαίνει με τις λύσεις ενός συστήματος.

Γεωμετρική ερμηνεία

Σχετική Θέση Ευθειών	**Πλήθος Κοινών Σημείων**	**Επίλυση Γραμμικού Συστήματος**
τεμνόμενες	**1**	**Μία** μοναδική λύση
παράλληλες	**0**	**Καμία** λύση (Αδύνατο)
ταυτιζόμενες	∞	**Άπειρες** λύσεις (Αόριστο)

3. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Προτού λύσουμε ένα οποιοδήποτε σύστημα, προκειμένου να βγάλουμε μιαν άκρη, επιβάλλεται να το φέρουμε πρώτα σε **κανονική μορφή**, δηλαδή στη μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Με απλά λόγια, έχουν εκτελεστεί τα παρακάτω:

1. Απαλοιφή παρονομαστών.

2. Απαλοιφή παρενθέσεων.

3. Χωρισμός γνωστών από αγνώστους.

4. Αναγωγή ομοίων όρων.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην επίλυση του συστήματος επιλέγοντας κάποια από τις παρακάτω μεθόδους:

Μέθοδος της Αντικατάστασης

Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο (όποιον επιθυμούμε, άρα όποιον μας συμφέρει) και **αντικαθιστούμε** το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι στη 2η εξίσωση ο άγνωστος x δεν έχει συντελεστή (εντάξει, για τους εξυπνάκηδες, έχει τη μονάδα), άρα μας συμφέρει να επιλέξουμε τη 2η εξίσωση και να τη λύσουμε ως προς x (έτσι αποφεύγουμε να προκύψουν κλάσματα) :

$\mathbf{(2) \Leftrightarrow x = 2y - 4 \quad (3)}$

Προχωρούμε τώρα στην 1η εξίσωση, όπου αντικαθιστούμε στη θέση του x την παράσταση (3) που μόλις βρήκαμε (και φυσικά στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση):

$\mathbf{(1) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 2\cdot(2y-4)+5y=1 \Leftrightarrow 4y-8+5y=1 \Leftrightarrow 9y=9 \Leftrightarrow y=1}$

Προς το παρόν, έχουμε υπολογίσει μονάχα τον έναν από τους δύο αγνώστους. Επιστρέφουμε στην εξίσωση (2) και αντικαθιστούμε την τιμή y = 1 :

$\mathbf{(2) \overset{y=1}{\Leftrightarrow} x = 2\cdot 1 - 4 = 2 \Leftrightarrow x = -2}$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι η : $\begin{cases} \mathbf{x=-2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$ ή, αλλιώς, το ζεύγος **(x, y) = (–2, 1)** .

Παρατήρηση

Πολλά βιβλία ή καθηγητές - για χάρη της καθαρότητας αλλά εις βάρος της συντομίας - λύνοντας ένα σύστημα, αντιγράφουν σε κάθε βήμα και τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-2y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y-4)+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-8+5y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y=9 \\ x=2y-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2\cdot 1-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις 2 εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές μπροστά από κάποιον άγνωστο (πάλι επιλέγουμε αυθαίρετα όποιον μας συμφέρει). Στη συνέχεια, **προσθέτουμε** τις 2 εξισώσεις **κατά μέλη**. Έτσι προκύπτει και πάλι μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Ας επιμείνουμε στο ίδιο σύστημα: $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

Επιλέγουμε αυθαίρετα τον άγνωστο x , περισσότερο από θέμα οπτικής ευκολίας - καθώς βρίσκεται πρώτος-πρώτος στην εξίσωση - παρά από κανένα θέμα ουσίας. Θα προσπαθήσουμε, πολλαπλασιάζοντας τη μία ή και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι συντελεστές του x να γίνουν αντίθετοι.

Ο συντελεστής του x είναι το **2** $\longrightarrow$ $2x+5y=1$

Ο συντελεστής του x είναι το **1** $\longrightarrow$ $x-2y=-4$

Κανονικά, θα πρέπει να υπολογίσουμε το ΕΚΠ (2, 1) και να προχωρήσουμε σε μια διαδικασία όμοια μ' εκείνη που ακολουθούμε, κάθε φορά που κάνουμε δυο κλάσματα ομώνυμα. Ωστόσο, όταν εργαζόμαστε με μικρούς αριθμούς, δε είναι λάθος να σκεφτούμε λιγάκι "πονηρά" και να πολλαπλασιάσουμε τις 2 εξισώσεις με έναν τρόπο χιαστί:

πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με **1** — $2x+5y=1$

πολλαπλασιάζουμε την 2η εξίσωση με **2** — $x-2y=-4$

Με αυτό τον τρόπο όμως, στο συγκεκριμένο σύστημα, οι συντελεστές δε θα βγουν αντίθετοι αλλά ομόσημοι. Για το λόγο αυτό, συμπληρώνω ένα "–" αυθαίρετα σε όποιον από τους δύο αριθμούς επιθυμώ. Έτσι, έχουμε τελικά:

$$\begin{matrix} -1\cdot \\ 2\cdot \end{matrix}\begin{cases} \mathbf{2x+5y=1} \\ \mathbf{x-2y=-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{-2x-5y=-1} \\ \mathbf{2x-4y=-8} \end{cases}$$

Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη:

$$\oplus\begin{cases} \mathbf{-\cancel{2x}-5y=-1} \\ \mathbf{\cancel{2x}-4y=-8} \end{cases}$$

$$\mathbf{-9y=-9 \Leftrightarrow y=1}$$

Στη συνέχεια, με αντικατάσταση της λύσης που βρήκαμε είτε στην (1), είτε στη (2), υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$\mathbf{(2) \Leftrightarrow x-2\cdot 1=-4 \Leftrightarrow x=2-4 \Leftrightarrow x=-2}$$

Μέθοδος της Σύγκρισης

Λύνουμε και τις 2 εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο (όποιον επιθυμούμε, το καταλάβαμε πια!). Κατόπιν, εφόσον τα πρώτα μέλη είναι ίσα, **εξισώνουμε** τα δεύτερα μέλη. Έτσι, για μία ακόμη φορά, προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο!

Παράδειγμα

Συνεχίζοντας με το ίδιο πάντα σύστημα: $\begin{cases} 2x+5y=1 & (1) \\ x-2y=-4 & (2) \end{cases}$

λύνουμε **και τις δύο** εξισώσεις ως προς τον ίδιο άγνωστο (όποιον μπλα-μπλα θέλουμε κ.λπ.). Εδώ θα λύσουμε ως προς x, γιατί έτσι μας αρέσει :

$$\begin{cases} \mathbf{2x=1-5y} \\ \mathbf{x=2y-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x=\dfrac{1-5y}{2}} & \mathbf{(3)} \\ \mathbf{x=2y-4} & \mathbf{(4)} \end{cases}$$

Εφόσον τα πρώτα μέλη είναι ίσα τότε θα είναι και τα δεύτερα ίσα, οπότε εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη προκύπτει η παρακάτω εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο:

$$\mathbf{\frac{1-5y}{2}=2y-4 \underset{\text{παρονομαστών}}{\overset{\text{απαλοιφή}}{\Leftrightarrow}} 1-5y=4y-8 \Leftrightarrow -9y=-9 \Leftrightarrow y=1}$$

Έχοντας βρει τον έναν άγνωστο, δε θέλει πολύ φιλοσοφία, τον αντικαθιστούμε σε κάποια από τις αρχικές εξισώσεις (1), (2) ή ακόμα καλύτερα σε μία από τις (3), (4), οι οποίες είναι έτοιμες, λυμένες ως προς τον άλλον άγνωστο:

$$\mathbf{(3) \overset{y=1}{\Leftrightarrow} x=\frac{1-5\cdot 1}{2}=\frac{-4}{2} \Leftrightarrow x=-2}$$

Π Ρ Ο Σ Ο Χ Η !!!

ΘΥΜΟΜΑΣΤΕ ότι δεν έχουμε έναν, αλλά **2 !!!** αγνώστους να υπολογίσουμε! Αφού, λοιπόν, καταφέρουμε τον ένα από τους δύο - με κάποια από τις προηγούμενες μεθόδους - χρειάζεται να αντικαταστήσουμε την τιμή που βρήκαμε σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος (όποια επιθυμούμε, άρα την πιο απλή) ώστε να υπολογίσουμε, τελικά, και τον άλλο άγνωστο!

4. Μέθοδος των Οριζουσών

Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 σε κανονική μορφή:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha x + \beta y = \gamma} \\ \boldsymbol{\alpha' x + \beta' y = \gamma'} \end{cases}$$

Θα ονομάζουμε **Ορίζουσα** του συστήματος και θα τη συμβολίζουμε με το γράμμα **D**, την παρακάτω έκφραση:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha'} & \boldsymbol{\beta'} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

Αντίστοιχα, ορίζονται οι ορίζουσες **ως προς x** και **ως προς y**, ως εξής:

$$\mathbf{Dx} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma'} & \boldsymbol{\beta'} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\gamma\beta' - \gamma'\beta} \qquad \mathbf{Dy} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\alpha'} & \boldsymbol{\gamma'} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}$$

Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διερεύνηση του συστήματος, ως εξής:

Διερεύνηση

- Αν **D ≠ 0** τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** που δίνεται από τους τύπους:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{Dx}}{\mathbf{D}} \qquad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{Dy}}{\mathbf{D}}$$

- Αν **D = 0**, όμως συμβαίνει ένα από τα δύο **Dx ≠0** ή **Dy ≠ 0** τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.
- Αν **D = Dx = Dy = 0** τότε το σύστημα είναι **αόριστο**, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

Ε Ξ Α Ι Ρ Ε Σ Η !!!

Αν $\mathbf{D} = \mathbf{D_x} = \mathbf{D_y} = \mathbf{0}$
με $\boldsymbol{\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0}$
αλλά κάποιο από τα **γ, γ΄≠ 0**
τότε το σύστημαείναι **αδύνατο** .

Παράδειγμα

Άντε πάλι το ίδιο σύστημα... $\begin{cases} 2x + 5y = 1 & (1) \\ x - 2y = -4 & (2) \end{cases}$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος :

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \mathbf{2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 = -4 - 5 = -9}$$

$$\mathbf{Dx} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \mathbf{1 \cdot (-2) - (-4) \cdot 5 = -2 + 20 = 18}$$

$$\mathbf{Dy} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{vmatrix} = \mathbf{2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -8 - 1 = -9}$$

Εφόσον D = −9 ≠ 0 το σύστημα θα έχει **μοναδική λύση** την :

$$\mathbf{x = \frac{Dx}{D} = \frac{18}{-9} = -2} \quad , \quad \mathbf{y = \frac{Dy}{D} = \frac{-9}{-9} = 1}$$

5. Το Αόριστο Σύστημα

Γενικά, είναι εύκολο να αντιληφθούμε αν ένα σύστημα καταλήγει να είναι αόριστο, δίχως καν να χρειαστεί να το επιλύσουμε. Εφόσον, δηλαδή, το έχουμε φέρει σε κανονική μορφή, το μόνο που χρειάζεται είναι να παρατηρήσουμε ότι οι δύο εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες! Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε μία (ή, συχνά, και τις δύο) από αυτές με κάποιον αριθμό και ιδού! Αυτό γίνεται προφανές, αν θυμηθούμε ότι το αόριστο σύστημα εκφράζεται γεωμετρικά από δύο ευθείες που **συμπίπτουν**, δηλαδή ουσιαστικά από την ίδια ευθεία.

Αλλά...

Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα όπως έχουμε πει έχει **άπειρες λύσεις**. Όμως, **ΔΕΝ** ξεμπερδεύουμε γράφοντας απλά ένα ξερό "αόριστο" και βάζοντας τελεία, αλλά είμαστε **υποχρεωμένοι** να σημειώσουμε τη **μορφή** που παίρνουν αυτές οι άπειρες λύσεις. Για το λόγο αυτό, λύνουμε μία από τις δύο εξισώσεις πχ. **ως προς y** και σημειώνουμε τη λύση του συστήματος, όπως ακριβώς φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα $\begin{cases} x - 4y = 3 & (1) \\ 3x - 12y = 9 & (2) \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2) δεν είναι παρά η (1) πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό 3. Άρα, καταλήγουμε πως πρόκειται για ένα σύστημα αόριστο. Λύνουμε την (1) ως προς y, οπότε :

$$\mathbf{(1) \Leftrightarrow -4y = -x + 3 \Leftrightarrow 4y = x - 3 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{4}}$$

Γράφουμε, τελικά, πως οι λύσεις μας είναι άπειρες, της μορφής:

$$\mathbf{(x, y) = (\kappa, \frac{\kappa - 3}{4})}, \ \kappa \in \mathrm{P}$$

Ουσιαστικά, τι κάναμε; Απλά στο διατεταγμένο ζεύγος των λύσεων θέσαμε, στη θέση του y, την παράσταση που προέκυψε από την (1). Επιπλέον, θέσαμε στη θέση του x μια μεταβλητή κ, που σημαίνει ότι - και καλά - για να βρούμε μια οποιαδήποτε λύση, αρκεί να αντικαθιστούμε κάθε φορά στο x κι έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό κ. Αυτά!

Αλλιώς;

Αν λύναμε το σύστημα "κανονικά", ας πούμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης θα είχαμε:

$$\begin{cases} x - 4y = 3 & (1) \\ 3x - 12y = 9 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 3x - 12y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 3(4y+3) - 12y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 12y + 9 - 12y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 12y - 12y = 9 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 3 \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Εφόσον η εξίσωση βγήκε **ταυτότητα** ως προς y, άρα το σύστημα είναι τελικά αόριστο. Ολοκληρώνουμε γράφοντας τη μορφή των λύσεων όπως δείξαμε προηγουμένως.

Παρατήρηση

α. Παρατηρώντας τη μορφή των λύσεων, αντιλαμβανόμαστε ότι το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αντικαθιστούμε διάφορες τιμές - της αρεσκείας μας - στον x και να κάνουμε πράξεις. Γι' αυτό, στην περίπτωση αυτή, ο άγνωστος x ονομάζεται και **ελεύθερος άγνωστος**.

β. Με την ίδια λογική, θα μπορούσαμε να λύσουμε την (1) ως προς x, συνεπώς ο ελεύθερος άγνωστος τότε θα ήταν το y. Κανένα πρόβλημα, είναι το ίδιο πράγμα. Για του λόγου το αληθές: (1) $\Leftrightarrow$ x = 4y + 3. Οι λύσεις μας τότε θα είχαν τη μορφή:

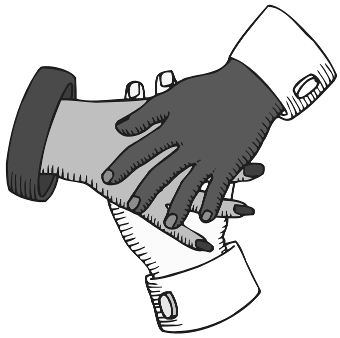
$$\mathbf{(x, y) = (4\kappa + 3, \kappa)}$$

6. Το Ομογενές Σύστημα

Ένα σύστημα θα λέγεται **ομογενές** αν οι σταθεροί όροι όλων των εξισώσεων είναι **μηδέν**. Είναι προφανές πως ένα ομογενές σύστημα δεν είναι ποτέ αδύνατο, εφόσον έχει πάντα μια λύση: τη **μηδενική**!

7. Γραμμικά Συστήματα 3x3

Σα να μην έφταναν όλα μας τα προβλήματα, χρειάζεται τώρα να μάθουμε πως υπάρχουν επιπλέον και συστήματα **3 εξισώσεων** με **3 αγνώστους** ! Ευτυχώς, αν έχουμε κατανοήσει τα προηγούμενα, τα πράγματα δεν είναι καθόλου δύσκολα, αρκεί να εφοδιαστούμε με αρκετή υπομονή στις πράξεις και τις αντικαταστάσεις.



Η Μέθοδος

Λύνουμε μία από τις 3 εξισώσεις ως προς έναν από τους 3 αγνώστους (μην τα ξαναλέμε: όποιον άγνωστο ή όποιαν εξίσωση μας συμφέρει). Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στις άλλες δύο εξισώσεις. Κατ' αυτό τον τρόπο, καταφέρνουμε ν' απαλειφθεί ο ένας άγνωστος από τις δύο εξισώσεις και να καταλήξουμε σε ένα απλούστερο σύστημα 2x2, το οποίο φυσικά επιλύουμε, με κάποια απ' τις μεθόδους που μάθαμε νωρίτερα.

Παράδειγμα

Να λύθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x+y-z=2 & (1) \\ 4x-y-3z=-2 & (2) \\ 2x+2y-z=9 & (3) \end{cases}$

Λύνουμε πχ. την (1) ως προς y και κατόπιν αντικαθιστούμε στις (2) και (3):

$$\begin{cases} \mathbf{y=-2x+z+2} \\ \mathbf{4x-(-2x+z+2)-3z=-2} \\ \mathbf{2x+2(-2x+z+2)-z=9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y=-2x+z+2} \\ \mathbf{4x+2x-z-2-3z=-2} \\ \mathbf{2x-4x+2z+4-z=9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y=-2x+z+2} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{6x-4z=0} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{-2x+z=5} & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι από τις (2) και (3) απαλείφθηκε ο άγνωστος y κι έτσι έχουμε καταλήξει σε ένα σύστημα 2x2, το οποίο λύνεται πολύ εύκολα:

$$\begin{cases} 6x - 4z = 0 \\ -2x + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4z = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4(5 + 2x) = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 20 - 8x = 0 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 20 \\ z = 5 + 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = 5 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = 5 + 2(-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ z = -15 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τις λύσεις $x = -10$ και $z = -15$ στην εξίσωση (1) :

$\mathbf{y = -2x + z + 2 \Leftrightarrow y = -2(-10) + (-15) + 2 \Leftrightarrow y = 20 - 15 + 2 \Leftrightarrow y = 7}$

Τελικά, η λύση του συστήματος είναι η **διατεταγμένη τριάδα** αριθμών :

$$\mathbf{(x, y, z) = (-10, 7, -15)}$$

8. Μη Γραμμικά Συστήματα

Ένα μη γραμμικό σύστημα είναι αυτό ακριβώς που λέει τ' όνομά του: μία ή και οι δύο από τις εξισώσεις που το συνθέτουν **δεν είναι** γραμμική. Στην περίπτωση αυτή, οπλιζόμαστε με τις ιδιότητες των ισοτήτων, φαντασία και πολλή-πολλή ελπίδα! Ωστόσο, το καλό με την ύλη μας είναι ότι μία από τις δύο εξισώσεις θα είναι συνήθως **1ου βαθμού**, ως προς κάποιον άγνωστο! Προχωράμε, λοιπόν, λύνοντας ως προς αυτόν ακριβώς τον άγνωστο και συνεχίζουμε κάνοντας αντικατάσταση, με το συνηθισμένο τρόπο. Έτσι, καταφέρνουμε να σχηματίσουμε μία εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο, ωστόσο 2^{ου}, 3^{ου} ή μεγαλύτερου βαθμού.

Παράδειγμα

Να λύθεί το σύστημα $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 2y^2 = 14 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 2y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ x^2 - 2y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 & (1) \\ (y + 3)^2 - 2y^2 = 14 & (2) \end{cases}$$

Λύνουμε τη (2) κανονικά, όπως κάθε εξίσωση 2ου βαθμού:

$\mathbf{y^2 + 6y + 9 - 2y^2 = 14 \Leftrightarrow -y^2 + 6y - 5 = 0}$ $\quad\quad$ $\mathbf{\Delta = 6^2 - 4(-1)(-5) = 36 - 20 = 16}$

$$\mathbf{y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow y_1 = 1 \text{ ή } y_2 = 5}$$

Άρα, για $y_1 = 1$:

(1) $\Leftrightarrow$ **x = 1 + 3** $\Leftrightarrow$ **x = 4** δηλαδή μια λύση είναι η **(x, y) = (4, 1)** .

Αντίστοιχα, για $y_2 = 5$:

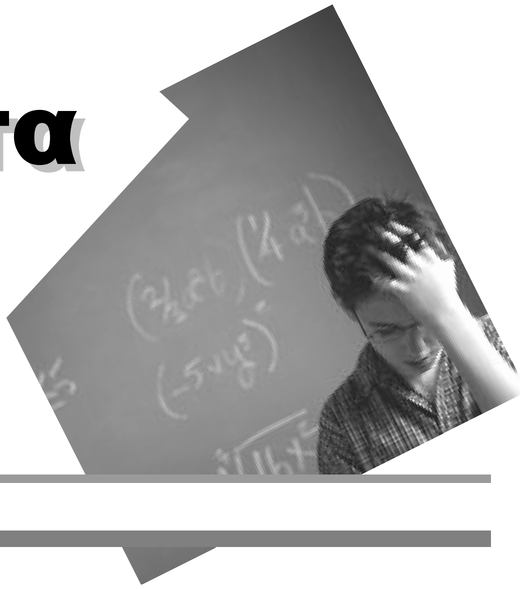
(1) $\Leftrightarrow$ **x = 5 + 3** $\Leftrightarrow$ **x = 8** δηλαδή μια δεύτερη λύση είναι η **(x, y) = (8, 5)** .

Παρατήρηση

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι τα μη γραμμικά συστήματα δεν έχουν απαραίτητα μία μοναδική λύση, αλλά πιθανότατα 2 ή περισσότερες. Για παράδειγμα, στο σύστημα που μόλις λύσαμε, έχουμε βρει **δύο λύσεις**, που το ικανοποιούν: **(4, 1) και (8, 5) !**

Ασκήσεις

Συστήματα



1. Συστήματα 2x2

1. Συμπληρώστε τα κενά με μια εξίσωση ή την κατάλληλη έκφραση:

α. Το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ είναι αδύνατο.

β. Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος (2, 3).

γ. Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

δ. Το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=10 \\ 2x+y=12 \end{cases}$ είναι / έχει ....

ε. Το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=12 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ έχει λύση, πάνω στη διχοτόμο της γωνίας του πρώτου τεταρτημορίου, ενός συστήματος αξόνων.

2. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x+y=5 \end{cases}$

β. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{3} \\ 3x+5y=59 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ x-\dfrac{y}{2}=3 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} 3x-5=2(y+1)-8 \\ 2(x-1)=3(1-2y)+9 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3(2-x)-5(y+2)=3x-1 \\ 4(x-y)-5x=2x+3(x-y) \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{1-2x}{3}+\dfrac{1+y}{2}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=x+2 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}(2x+y)=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+y}{3}=2-3y \end{cases}$

ε. $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{x+1}{2}=1 \\ \dfrac{2-x}{3}-\dfrac{1-y}{3}=-2 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} \dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{3(y-3)}{2}+11-3x \\ \dfrac{4x-(2y-x)}{2}=\dfrac{1-y}{10}-\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{23}{4}\right) \end{cases}$

ζ. $\begin{cases} \dfrac{4x+15}{3}=x+\dfrac{3y-5}{5} \\ \dfrac{3x+2y}{4}+\dfrac{y+15}{5}=y \end{cases}$ **η.** $\begin{cases} \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{3y+4}{10}+x-y \\ \dfrac{2x-5}{5}=\dfrac{2y-4}{4}+x-12 \end{cases}$

4. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ |3x-5y|=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3|x+1|-|y-2|=3 \\ |x+1|+2|y-2|=8 \end{cases}$

5. Ομοίως:

α. $\begin{cases} \dfrac{1}{3+x+2y}+\dfrac{3}{6+4x-5y}=0 \\ 3(6x-5y+4)=3x+2y+401 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=8 \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=3 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} \dfrac{-3}{x-7}+\dfrac{5}{y+3}=7 \\ \dfrac{5}{x-7}-\dfrac{4}{y+3}=-3 \end{cases}$

6. Να λυθούν τα συστήματα :

α. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 0 \\ \sqrt{(x-y)^2} = 2 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} |x+1| = |x+y| \\ 3x+5y = 9 \end{cases}$

2. Παραμετρικά Συστήματα

7. Να λυθούν τα συστήματα για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ:

α. $\begin{cases} x+y=\lambda \\ \lambda x+y=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x-3\lambda y=2\lambda+3 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} x+\lambda y=1 \\ \lambda x+y=\lambda^2 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \lambda^2 x+y=2 \\ x+y=2\lambda \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} 2\lambda x+y=1 \\ 6x+3y=-3 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} 2x+(5-\lambda)y=1 \\ x+2\lambda y=0 \end{cases}$

ζ. $\begin{cases} (1-\lambda)x+2y=3 \\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-4 \end{cases}$ **η.** $\begin{cases} x+y=3 \\ \lambda^2 x+y=3 \end{cases}$

θ. $\begin{cases} (\lambda+1)x-3\lambda^2 y=\lambda \\ x+(\lambda-1)y=-1 \end{cases}$ **ι.** $\begin{cases} (\lambda-1)x-y=4 \\ \lambda x-2y=4\lambda \end{cases}$

ια. $\begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y=2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y=12 \end{cases}$ **ιβ.** $\begin{cases} 2\lambda x+(\lambda-2)y=2 \\ \lambda x+\lambda y=1 \end{cases}$

ιγ. $\begin{cases} (\lambda-1)x+-2y=3\lambda \\ x+(\lambda-4)y=\lambda+4 \end{cases}$ **ιδ.** $\begin{cases} (\mu+1)x+8y=4\mu \\ \mu x+(\mu+3)y=3\mu-1 \end{cases}$

ιε. $\begin{cases} (2\lambda-1)x+\lambda y=1 \\ \lambda x+(2\lambda-1)y=\lambda \end{cases}$ **ιστ.** $\begin{cases} (\lambda-2)x+\lambda y=2\lambda \\ 3x+(\lambda+2)y=12 \end{cases}$

ιζ. $\begin{cases} (\lambda+1)x+2\lambda y=2 \\ 2\lambda x+(\lambda+1)y=\lambda+1 \end{cases}$ **ιη.** $\begin{cases} (\lambda^2-1)x-y=3\lambda \\ 3x-y=8-\lambda \end{cases}$

8. Να προσδιοριστούν οι τιμές του λ∈Ρ, ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda+4)x+(2\lambda+1)y=3\lambda-1 \\ (3\lambda+7)x+(5\lambda+1)y=2\lambda+2 \end{cases}$$

α. να έχει μία λύση **β.** να είναι αόριστο **γ.** να είναι αδύνατο

9. Να βρεθούν οι τιμές του α∈Ρ, ώστε τα ακόλουθα συστήματα να είναι συγχρόνως αόριστα:

$$\begin{cases} (\alpha+3)x+4y=4 \\ \alpha x+\alpha y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\alpha-2)x+3y=2 \\ -x+(\alpha+2)y=\alpha+1 \end{cases}$$

10. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ για τις οποίες τα ακόλουθα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\begin{cases} (\mu+1)x+\lambda y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -(\mu+1)x+(\lambda+1)y=2 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

11. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x+\lambda y=4\lambda+2 \\ x+y=4 \end{cases}$. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του, τότε να λυθεί η εξίσωση: $x - 5x_0 \cdot x + y_0 = 0$.

12. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+\mu y=2 \\ -4\mu x+\lambda y=5 \end{cases}$ και η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \mu^2 = 0$, με λ, μ ∈Ρ. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μία μοναδική λύση, αν και μόνον αν, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

13. **α.** Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ∈Ρ:

$$\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda+2)y=1 \\ -x+\lambda y=2-y \end{cases}$$

β. Για τη μοναδική λύση (x_0, y_0), που βρήκατε στο (α), να υπολογίσετε το λ, ώστε: $y_0 - 2x_0 > 1$.

3. Ορίζουσες

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\begin{vmatrix} 1+x & 1+x^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x$ **β.** $\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+x \\ 1-x+x^2 & 1-x \end{vmatrix} = 16$

γ. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ x & x \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5$ **δ.** $\begin{vmatrix} 10 & \sqrt{10x} \\ \sqrt{10x} & x \end{vmatrix} = 0$

ε. $\begin{vmatrix} 3^{10} & 3^{10} \\ 3^{10} & 3^{11} - 2x \end{vmatrix} = 0$

15. Να λυθεί η ανίσωση : $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 3x + 4$

16. Να λυθεί η ανίσωση : $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \end{vmatrix} \le 0$

17. Αν η εξίσωση $\lambda^2 (x-1) = x - 3\lambda + 2$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας: $D = \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1} & \lambda+3 \\ 4\lambda & \lambda^2-1 \end{vmatrix}$

18. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^{-\nu}\cdot f(x)$ όπου ν φυσικός αριθμός. Αν υπάρχουν κ, λ∈Ρ, τέτοιοι ώστε g(κ) = g(λ), τότε να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας : $\begin{vmatrix} \kappa^\nu & f(\kappa) \\ \lambda^\nu & f(\lambda) \end{vmatrix}$

19. Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, Dx, Dy. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = D\,(2Dx - 4Dy - 5D)$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

20. Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, Dx, Dy. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 = 4D(D_x - D_y) + 2DD_y$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

21. Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με ορίζουσες D, Dx, Dy. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και επιπλέον ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + 2D^2 = 2(D_x - D + DD_y + 1)$$

τότε να βρείτε την λύση αυτή.

22. Έστω γραμμικό σύστημα 2x2, με αγνώστους x, y, το οποίο έχει μοναδική λύση. Αν ισχύει ότι:

$$\begin{cases} 2D_x + D_y = 5D \\ 3D_x - 2D_y = 4D \end{cases}$$

να βρεθεί η λύση αυτή.

23. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$, με α, β ∈Ρ, αν γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} + 4 = 0$$

4. Συστήματα 3x3 και κάτι ψιλά

24. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 2z = -1 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 4x - y - 3z = -2 \\ 2x + 2y - \dfrac{2}{3}z = 9 \end{cases}$

25. Να δείξετε ότι τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα:

α. $\begin{cases} 20x+y=1 \\ y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x+z=2 \\ 2x+y-z=0 \\ 2x+z=0 \\ x+y+z=16 \end{cases}$

26. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ x-y-z=0 \\ 4x+5y+6z=11 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 2x+y+2z=4 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ 2x+4z=3 \\ 2y+2z=5 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} 3x+y-z=11 \\ 4y+3z=10 \\ 2z=4 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} 2x+\frac{4}{5}y-3\omega=8 \\ x-y+2\omega=-3 \\ 0{,}6x+0{,}3y-0{,}5\omega=1{,}6 \end{cases}$

στ. $\begin{cases} x+2y+4\omega=1 \\ -x+3y+6\omega=2 \\ -2x+y+2\omega=3 \end{cases}$ **ζ.** $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$

27. Να λύσετε τα παρακάτω ομογενή συστήματα:

α. $\begin{cases} x+2y+8z=0 \\ x+3y+7z=0 \\ x+5y+5z=0 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 4x-y-z=0 \\ 3x+y+z=0 \\ 4x+y+3z=0 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} 3x+3y+5\omega=0 \\ 3x+5y+9\omega=0 \\ 5x-9y+17\omega=0 \end{cases}$

28. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x-y-z=2 \\ x+2y+6z=-1 \\ 5x+2y+3z=-6 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x-z+4\omega+5\varphi=4 \\ y-2\omega-\varphi=1 \\ -x+5z-12\omega-17\varphi=-4 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} x+y+\varphi+\omega=12 \\ x+\varphi=1 \\ y+x=2 \\ y+\omega=3 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=3 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{\beta+\gamma}{2}=3 \\ \dfrac{\gamma+\delta}{2}=4 \\ \dfrac{\delta+\varepsilon}{2}=3 \\ \dfrac{\varepsilon+\alpha}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

στ. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}=2 \\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$ **ζ.** $\begin{cases} 2x-3y+2\omega=9 \\ 4x+y-3\omega=11 \end{cases}$

5. Μη Γραμμικά Συστήματα

29. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases} 3x+y=6 \\ xy=3 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x-3y=1 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} (3x+2).(x-y)=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ **δ.** $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ xy(x+y)=12 \end{cases}$

ε. $\begin{cases} x^2+y^2-xy=57 \\ x-y=-1 \end{cases}$ **στ.** $\begin{cases} x^3+y^3=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$

ζ. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{5}{2} \\ x+y=1 \end{cases}$

30. Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x^3 + 8y^4 = 0 \\ \dfrac{3}{2}x^3 + 10y^4 = -2 \end{cases}$

31. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ x + y = 13 \end{cases}$

β. $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 7 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -1 \end{cases}$

γ. $\begin{cases} x\sqrt{5} + 4y = \sqrt{5} - 1 \\ y - x = \sqrt{5} \end{cases}$

δ. $\begin{cases} x + 2\sqrt{3} \cdot y = 1 \\ \sqrt{3} \cdot x + 6y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

ε. $\begin{cases} x + y = 4 \\ \sqrt{2}x + 4y = 8 + 2\sqrt{2} \end{cases}$