

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**Η εξίσωση $ax + by = \gamma$**

1. Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυση τους οδηγεί σε μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y και η οποία είναι της μορφής $ax + by = \gamma$.

Για παράδειγμα : Τοποθετείστε 48 μολύβια σε κουτιά που χωρούν 2 ή 3 μολύβια . Αυτό ισοδυναμεί με την επίλυση της εξίσωσης $2x+3y=48$, η οποία έχει τις (θετικές ακέραιες) λύσεις : $(x,y)=(0,16)$ ή $(3,14)$ ή $(6,12)$ ή $(9,10)$ ή $(12,8)$ ή $(15,6)$ ή $(18,4)$ ή $(21,2)$ ή $(24, 0)$. (... πολλές)

2. Γενικά , λύση μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

3. Η εξίσωση όμως $ax + by = \gamma$ δεν έχει λύση μόνο ένα ζεύγος , αλλά έχει άπειρες λύσεις. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη τιμή του y , ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση της και έτσι να σχηματίσουμε έναν πίνακα τιμών.

Π.χ στο προηγούμενο παράδειγμα είναι : $y = \frac{48-2x}{3}$

4. Αν σ' ένα σύστημα αξόνων προσδιορίσουμε τα σημεία που καθένα έχει συντεταγμένες μια λύση της εξίσωσης , παρατηρούμε ότι αυτά βρίσκονται σε μια ευθεία ϵ .

Αντιστρόφως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ϵ , τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $ax + by = \gamma$.

Άρα κάθε σημείο της ευθείας ϵ έχει συντεταγμένες (x, y) που είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση $ax + by = \gamma$ παριστάνει την ευθεία ϵ και γράφουμε :

$$(\epsilon) : ax + by = \gamma.$$

Εξίσωση ευθείας στο επίπεδο .

Η εξίσωση $ax+by=\gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$, λέγεται γραμμική εξίσωση και παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία γραμμή. (Αν $a=b=0$ δεν παριστάνει τίποτα)

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Αν $b \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται : $ax+by=\gamma \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$. (πιο απλά : $y = \lambda x + \beta$) .

Επομένως παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$ και τέμνει τον $y' y$ στο $\left(0, \frac{\gamma}{b}\right)$

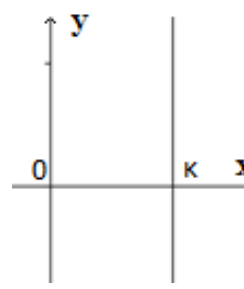
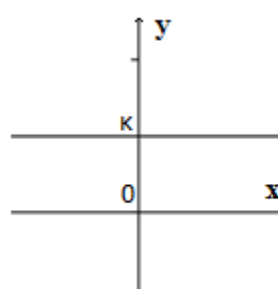
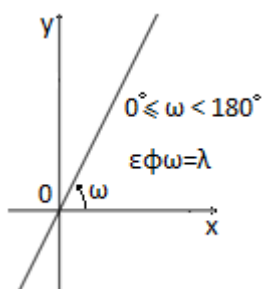
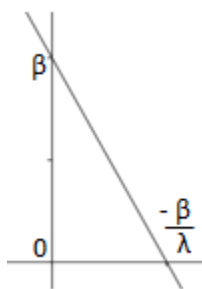
Ειδικά αν $\gamma=0$, παίρνει τη μορφή $y = -\frac{a}{b}x$ (πιο απλά : $y=\lambda x$) και διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$

Αν $a \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες , ενώ αν $a=0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{b}$ (πιο απλά $y=k$) και είναι παράλληλη στον $x'x$.

2) Αν $b=0$, (οπότε αναγκαστικά το $a \neq 0$) , γράφεται : $x = -\frac{\gamma}{a}$ (πιο απλά $x= \kappa$) και

παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον $y' y$ και τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\left(-\frac{\gamma}{a}, 0\right)$

Στο επόμενο σχήμα μπορείτε να δείτε όλες αυτές τις περιπτώσεις .



$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad y = \lambda x + \beta$$

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x \quad \text{ή} \quad y = \lambda x$$

$$y = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad y = \kappa$$

$$x = -\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \kappa$$

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων .

1. Γραμμικό σύστημα 2x2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $ax + by = \gamma$ και $a'x + b'y = \gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 2x2** και γράφουμε :

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

Λύση του συστήματος λέγεται κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος .

Ισοδύναμα λέγονται τα συστήματα που έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις . Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο (αποδεικνύεται ότι) είναι ισοδύναμο με το αρχικό. Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται συνήθως με έναν από τους εξής δύο τρόπους:

α) Μέθοδος της αντικατάστασης

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης εργαζόμαστε ως εξής :

1. Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο .
2. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
3. Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο
4. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 4(5 - 2y) + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 20 - 8y + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ -7y = 6 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 \cdot 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{Άρα } (x, y) = (1, 2)$$

5. Επαληθεύουμε τη λύση

$$\text{Για } x=1, y=2 : \begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ 4 \cdot 1 + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ 6 = 6 \end{cases} \quad \text{ισχύουν}$$

β) Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

Η μέθοδος στοχεύει στην απαλοιφή ενός αγνώστου από μια εξίσωση . Παράδειγμα :

1. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x + 7y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot (4x + 3y = 11) \\ -4 \cdot (5x + 7y = 17) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 15y = 55 \\ -20x - 28y = -68 \end{cases}$$

2. Για να απαλείψουμε το x , πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το 5 και της δεύτερης με το (-4) , οπότε έχουμε:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ -13y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ y = 1 \end{cases}$$

3. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο (γραμμικός συνδυασμός), την οποία και λύνουμε.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3 \cdot 1 = 11 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

4. Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου

$$\text{Άρα } (x, y) = (2, 1)$$

(.... και επαληθεύουμε)

5. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Μεθοδεύσεις και εφαρμογές

1. Αν το σύστημα είναι πολύπλοκο τότε για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και όλες τις απαιτούμενες πράξεις . Έπειτα το τακτοποιούμε και αποφασίζουμε ποια μέθοδος είναι κατάλληλη για την επίλυσή του .

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14 \frac{x-5}{2} + 14 \frac{2y+1}{7} + 14 \frac{2}{1} = 0 \\ 6 \frac{x+6}{3} - 6 \frac{y-6}{2} = 6 \frac{8}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0 \\ 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 35 + 4y + 2 + 28 = 0 \\ 2x + 12 - 3y + 18 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (7x + 4y = 5) \\ -7 \cdot (2x - 3y = 18) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 8y = 10 \\ -14x + 21y = -126 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 29y = -116 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4(-4) = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

2. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμη η αντικατάσταση κάποιων ποσοτήτων με άλλες ώστε το σύστημα να γίνει απλούστερο . Έπειτα επιστρέφουμε και υπολογίζουμε τις αρχικές μεταβλητές.

$$\begin{cases} \frac{3}{\chi-2} + \frac{5}{\psi+3} = 1 \\ \frac{2}{\chi-2} - \frac{1}{\psi+3} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \frac{1}{\chi-2} + 5 \frac{1}{\psi+3} = 1 \\ 2 \frac{1}{\chi-2} - \frac{1}{\psi+3} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \text{θέτω } \begin{cases} \frac{1}{\chi-2} = \kappa \\ \frac{1}{\psi+3} = \lambda \end{cases} \text{ οπότε } \begin{cases} 3\kappa + 5\lambda = 1 \\ 2\kappa - \lambda = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } \begin{cases} \frac{1}{\chi-2} = 2 \\ \frac{1}{\psi+3} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi-2 = \frac{1}{2} \\ \psi+3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{5}{2} \\ \psi = -4 \end{cases}$$

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους**1. Σύστημα με μοναδική λύση**

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες ε_1 και ε_2 , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α.

Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες (κ, λ) του κοινού σημείου Α των ευθειών αυτών.

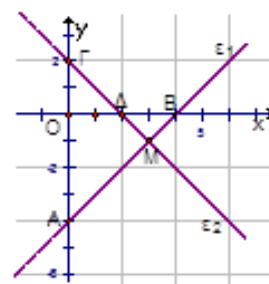
Επειδή το σημείο Α ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του (κ, λ) επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, άρα το ζεύγος (κ, λ) είναι λύση του συστήματος. Οι ευθείες όμως $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δεν έχουν άλλο κοινό σημείο, οπότε και το σύστημα δεν έχει άλλη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος (κ, λ) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

Π.χ. Να λύσετε γραφικά το σύστημα
$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$$

Η σχέση $x-y=4$ παριστάνει την ευθεία ε_1

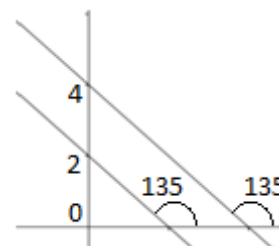
Η σχέση $x+y=2$ παριστάνει την ευθεία ε_2

Η γραφική λύση του συστήματος είναι το σημείο τομής $M(3, -1)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

**2. Αδύνατο σύστημα**

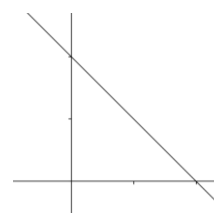
Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες τότε το σύστημα δεν έχει λύση. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο. Π.χ.

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ y=-x+2 \end{cases}$$
 Οι δυο ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, το -1 . Άρα είναι παράλληλες, δεν έχουν κοινά σημεία, άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

**3. Αόριστο σύστημα**

Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συμπίπτουν (ταυτίζονται), τότε έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αόριστο. Π.χ.

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+y=4 \end{cases}$$
 Οι δυο ευθείες έχουν ίδια εξίσωση. Άρα παριστάνουν την ίδια ευθεία με εξίσωση $y=-x+4$ άρα έχουν άπειρα κοινά σημεία, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.



Σχόλιο : Γενικά, αποδεικνύεται ότι αν $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$, το σύστημα είναι αόριστο, ενώ αν

$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$, είναι αδύνατο.

Ορίζουσες .

Θεωρούμε την ποσότητα : $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ορίζουσα (Determinant) και ισούται με $D = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$

γ) Η μέθοδος Cramer (των οριζουσών)

Έστω το σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους: $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

Για να λύσουμε ένα σύστημα με την μέθοδο των οριζουσών ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Βρίσκουμε την ορίζουσα του συστήματος : $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$.

2. Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου x : (Προκύπτει από την D αντικαθιστώντας τους συντελεστές του x με τους σταθερούς όρους)

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

3. Βρίσκουμε την ορίζουσα του αγνώστου y: (Προκύπτει από την D αντικαθιστώντας τους συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους)

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

Αφού υπολογιστούν οι ορίζουσες D , D_x , D_y τότε:

Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση , την : $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

Αν $D = 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις. Το διαπιστώνουμε αντικαθιστώντας την τιμή της παραμέτρου στο σύστημα.

Σχόλιο:

Αποδεικνύεται ότι : Αν $D=0$ και ($D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$), το σύστημα είναι αδύνατο.

Αν $D = D_x = D_y = 0$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, εκτός αν $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ και $\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$, οπότε είναι αδύνατο.

Διερεύνηση - Λύση συστήματος με παράμετρο.

Όταν θέλουμε να λύσουμε ένα σύστημα όπου κάποιοι απ'τους συντελεστές περιέχουν παράμετρο , τότε φέρνουμε το σύστημα στην κανονική μορφή και ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D , D_x , D_y και προσπαθούμε να τις παραγοντοποιήσουμε.
- Βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου οι οποίες μηδενίζουν την ορίζουσα D.
- Παίρνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου , δηλαδή :

Παίρνουμε πρώτη περίπτωση η τιμή της παραμέτρου να είναι διαφορετική από τις τιμές που μηδενίζουν την D . Τότε έχουμε μοναδική λύση την $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

Έπειτα παίρνουμε χωριστές περιπτώσεις για κάθε τιμή της παραμέτρου που μηδενίζει την ορίζουσα D . Αντικαθιστούμε αυτές τις τιμές και λύνουμε το σύστημα. Αυτό θα έχει άπειρες λύσεις (αόριστο) ή θα είναι αδύνατο.

Σχόλιο : Η μέθοδος Cramer χρησιμοποιείται κυρίως στην επίλυση παραμετρικών συστημάτων , χωρίς να απαγορεύεται να χρησιμοποιηθεί και αλλού , όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα :

Παραδείγματα

1. Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13 \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 4 = -39, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$$

$$\text{Άρα : } (x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{-39}{-13}, \frac{-13}{-13} \right) = (3, 1)$$

2. Να λύσετε το σύστημα των :

$$\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^2 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Είναι : } D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1), \quad D_x = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$$

$$\text{και } D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1 - \alpha) = -\alpha(\alpha - 1).$$

α) Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 \neq 0$ και $\alpha + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1$, τότε το

σύστημα έχει τη μοναδική λύση, την : $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1}, \frac{-\alpha}{\alpha + 1} \right)$

β) Για $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$.

Άρα έχει άπειρες λύσεις, τις $(x, y) = (k, 1 - k)$, με $k \in \mathbb{R}$.

γ) Για $\alpha = -1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ -1 = 1 \end{cases}$, αδύνατο

3. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y έχει μοναδική λύση. Αν ισχύει : $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = DD_x + DD_y + D_x D_y$ να λυθεί το σύστημα.

Λύση

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση έχουμε ότι $D \neq 0$. Η δοσμένη σχέση γράφεται διαδοχικά :

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = DD_x + DD_y + D_x D_y \Rightarrow 2D^2 + 2D_x^2 + 2D_y^2 = 2DD_x + 2DD_y + 2D_x D_y \Rightarrow$$

$$D^2 - 2DD_x + D_x^2 + D_y^2 - 2DD_y + D^2 + D_x^2 - 2D_x D_y + D_y^2 = 0 \Rightarrow (D - D_x)^2 + (D - D_y)^2 + (D_x - D_y)^2 = 0$$

Άρα $D_x = D$ και $D_y = D$, οπότε $\frac{D_x}{D} = 1$ και $\frac{D_y}{D} = 1$ δηλαδή $(x, y) = (1, 1)$

2. Συστήματα 3x3

Θεωρούμε ένα σύστημα 3 γραμμικών εξισώσεων με 3 αγνώστους στη γενική του μορφή :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \omega = \delta_1 & (1) \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \omega = \delta_2 & (2) \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \omega = \delta_3 & (3) \end{cases}$$

Οι βασικότερες μέθοδοι για την επίλυσή του είναι οι παρακάτω:

1. Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε μία εξίσωση ως προς ένα άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στις άλλες δύο εξισώσεις, απ' όπου βρίσκονται οι δύο άγνωστοι . Μπορούμε επίσης να βρούμε από τις δύο εξισώσεις τους δύο αγνώστους ως συνάρτηση του τρίτου αγνώστου και να τους αντικαταστήσουμε στην άλλη εξίσωση .

2. Μέθοδος της απαλοιφής

Απαλείφουμε το x μεταξύ των (1), (2) και των (1), (3), οπότε προκύπτει σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τους y και ω . Έπειτα βρίσκουμε τους y , ω και από την (1) βρίσκουμε το x .

Σχόλια

1. Ανάλογη διαδικασία εφαρμόζουμε για να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων και με περισσότερους από 3 αγνώστους .
2. Γενικά πρέπει να ελέγχουμε αν οι λύσεις επαληθεύουν τα αρχικά συστήματα .

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y + \omega = 4 & (1) \\ -x - 2y + 2\omega = 6 & (2) \\ 2x + 3y + \omega = 4 & (3) \end{cases}$$

Λύση

Απαλείφουμε το x μεταξύ της (1) και (2) :
$$\begin{array}{r} x + y + \omega = 4 \\ +) -x - 2y + 2\omega = 6 \\ \hline -y + 3\omega = 10 \end{array}$$

Απαλείφουμε το x μεταξύ της (1) και (3) :
$$\begin{array}{r} x + y + \omega = 4 \\ 2x + 3y + \omega = 4 \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} -2x - 2y - 2\omega = -8 \\ +) 2x + 3y + \omega = 4 \\ \hline y - \omega = -4 \end{array}$$

Οπότε το σύστημα γίνεται :
$$\begin{cases} x + y + \omega = 4 & (1) \\ -y + 3\omega = 10 & (2) \\ y - \omega = -4 & (3) \end{cases}$$

Στη συνέχεια απαλείφουμε το y μεταξύ της (2) και (3) :
$$\begin{array}{r} -y + 3\omega = 10 \\ +) y - \omega = -4 \\ \hline 2\omega = 6 \end{array}$$

Οπότε το σύστημα γίνεται :
$$\begin{cases} x + y + \omega = 4 \\ -y + 3\omega = 10 \\ 2\omega = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ \omega = 3 \end{cases} \quad (\dots \text{ και κάνουμε επαλήθευση })$$

Σχόλια :

1. Εάν στο σύστημα οι σταθεροί όροι είναι όλοι 0 τότε το σύστημα λέγεται ομογενές και έχει πάντα λύση την (0,0,0) (μηδενική λύση) . Ενδεχομένως να έχει και άλλες λύσεις (άπειρες)
2. Τα συστήματα 3x3 λύνονται και με ορίζουσες 3x3 . Έχουν όμως πιο πολύπλοκο τρόπο υπολογισμού .
3. Ένα σύστημα 3x2 λύνεται ως εξής : Σχηματίζουμε ένα σύστημα 2x2 , το λύνουμε και μετά ελέγχουμε αν η λύση επαληθεύει την τρίτη εξίσωση .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2x2

1. Να λυθούν τα συστήματα . i) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} \\ 3x + 5y = 59 \end{cases}$
- iv) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 6\sqrt{y} = 7 \\ 2\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -1 \end{cases}$ v) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + x = \frac{y-4}{3} - 2 + 5x \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$
2. Να λυθούν τα συστήματα : i) $\begin{cases} (x+2)(x-y) = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^3 + 8y^4 = 0 \\ 3x^3 + 20y^4 = -4 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} |x+1| = |x+y| \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$
3. Να βρείτε πόσες λύσεις έχουν τα συστήματα : i) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = -8 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$
4. α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A(-1,4) και B(2,-7).
 β) Να λύσετε την εξίσωση $(2x-3y+1)^2 + (4x+y-5)^2 = 0$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-3y+1| + |4x+y-5| = 0$

5. Αν το σύστημα $\begin{cases} (2\alpha+1)x - (\beta-\alpha-4)y = 1 \\ (2\alpha+\beta)x + (\alpha-2\beta)y = 2 \end{cases}$, έχει τη λύση $(x,y) = (1,-1)$ να βρείτε τα α, β .

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

6. Να δείξετε ότι : α) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ \gamma+\delta & \delta \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta \omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta \omega \end{vmatrix}$
7. Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $\begin{vmatrix} 1+x & 1+x^2 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x$ ii) $\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1+x \\ 1-x+x^2 & 1-x \end{vmatrix} = 16$
8. Να λυθεί η ανίσωση : $\begin{vmatrix} \sqrt{1-x} & \sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & \sqrt{1+x} \end{vmatrix} \leq 0$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

9. Να λυθούν τα συστήματα : i) $\begin{cases} x\sqrt{5} + 4y = \sqrt{5} - 1 \\ y - x = \sqrt{5} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x + 2\sqrt{3} \cdot y = 1 \\ \sqrt{3} \cdot x + 6y = 3\sqrt{3} \end{cases}$
10. Δίνεται το σύστημα : $\lambda x + y = 2$ και $4x + \lambda y = 4$
 ι) Για ποιες τιμές του λ έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) .
 ιι) Για ποιες τιμές του λ συναληθεύουν οι ανισώσεις $x_0 > 2$ και $y_0 > 0$;
11. Να λυθούν τα συστήματα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- i) $\begin{cases} 2\lambda x + y = 1 \\ 6x + 3y = -3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x + (5-\lambda)y = 1 \\ x + 2\lambda y = 0 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} (\lambda-1)x + 2\lambda y = 2 \\ 2\lambda x + (\lambda-1)y = \lambda-1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} (\lambda^2-1)x - y = \lambda \\ 2x - y = \lambda-1 \end{cases}$
- v) $\begin{cases} 3x + \lambda y = 3 \\ \lambda x + 3y = \lambda \end{cases}$ vi) $\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$ vii) $\begin{cases} \lambda x - 2y = 5 \\ \lambda x + 2\lambda y = \lambda \end{cases}$

12. Δίνεται το γραμμικό 2×2 σύστημα που έχει ορίζουσες D, D_x, D_y . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) και επί πλέον ισχύει: $D_x^2 + D_y^2 = D(2D_x - 4D_y - 5D)$ τότε να βρείτε την λύση αυτή.

13. Έστω ένα σύστημα 2×2 με αγνώστους x και y για το οποίο ισχύει: $D = D_x + 3D_y$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) να αποδείξετε ότι :

$$\text{i) } x_0 + 3y_0 = 1 \quad \text{ii) } x_0^2 - 9y_0^2 = \frac{D_x - 3D_y}{D}$$

14. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα: $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 6 \\ 3x + y = 2\mu \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις και στη συνέχεια να βρείτε τις λύσεις. (Απ: $\lambda=3$ ή $\lambda=-3$ και $\mu=1$)

15. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει :

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 4D - 2D_x + 5 = 0. \quad \alpha) \text{ Δείξτε ότι: } (D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0. \quad \beta) \text{ Να βρεθούν τα } x, y.$$

16. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει :

$$D_x + D_y = D \quad \text{και} \quad D_x - D_y = 3D. \quad \text{Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.}$$

17. Δίνονται τα συστήματα: $(\Sigma_1) \begin{cases} (k+1)x + 2\lambda y = 2 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ και $(\Sigma_2) \begin{cases} (2k+1)x + (\lambda+7)y = -6 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

Για ποιες τιμές των k, λ τα δύο αυτά συστήματα έχουν συγχρόνως άπειρες λύσεις ;

Για τις τιμές αυτές των k, λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τις κοινές λύσεις των συστημάτων (Σ_1) και (Σ_2) .

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 3×3

18. Να λυθούν τα συστήματα: i) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ -3x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + x = 3 \end{cases}$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha+1)x^2 + (\alpha-\beta-2)x + (2-\gamma)$. Να βρείτε τα α, β, γ αν είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,6)$ και ακόμα το $f(0)=1$.

20. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ενός 2×2 γραμμικού συστήματος (Σ) ισχύουν οι σχέσεις:

$$2D + 3D_x - D_y = 5, \quad D + D_x - D_y = 0, \quad D - D_x + D_y = 2. \quad \text{Να βρείτε την λύση } (x_0, y_0) \text{ του συστήματος } (\Sigma).$$

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μέθοδοι επίλυσης

- α) Ένας περίπου γενικός τρόπος λύσης είναι να λύνουμε την πιο εύκολη (την πρωτοβάθμια ή εκείνη που παραγοντοποιείται) ως προς ένα άγνωστο και έπειτα να αντικαθιστούμε στην άλλη .
- β) Η χρήση των τύπων Vieta . Από τις δοσμένες εξισώσεις υπολογίζουμε τα $x+y=S$, $xy=P$ και σχηματίζουμε το τριώνυμο $\omega^2 - S\omega + P = 0$. Οι λύσεις του είναι οι τιμές των x, y (2 ζεύγη λύσεων)
- γ) Σχηματισμός ταυτοτήτων
- δ) Προσθέτουμε ή αφαιρούμε κατά μέλη , ώστε να σχηματισθεί μια απλούστερη εξίσωση .

Παράδειγμα : Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 9 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (3-y)y=2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x=-3-y \\ (-3-y)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ -y^2+3y-2=0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x=-3-y \\ -y^2-3y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y=1 \text{ ή } y=2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x=-3-y \\ y=-1 \text{ ή } y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(2,1) \text{ ή } \\ (x,y)=(1,2) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} (x,y)=(-2,1) \text{ ή } \\ (x,y)=(-1,2) \end{cases} \quad \text{Άρα το σύστημα έχει 4 λύσεις .} \end{aligned}$$

Σχόλια

- Οι λύσεις πρέπει να γράφονται υποχρεωτικά σαν ζεύγη . Δεν αποτελούν πάντα λύσεις όλοι οι συνδυασμοί τιμών των x, y .
- Από το * και μετά , θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε με Vieta .
- Επειδή $xy = 2$, είναι $x \neq 0$, οπότε $y = \frac{2}{x}$ και αντικαθιστώντας στην άλλη εξίσωση , προκύπτει μια διτετράγωνη εξίσωση, που δίνει τις τιμές του x

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

- $\begin{cases} y+3x=6 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ [Απ : $(x,y)=(1,3), (13/5, -9/5)$]
- $\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2-xy=4 \end{cases}$ [Απ : $(x,y)=(2,3), (3,2), (-2, -3), (-3, -2)$]
- $\begin{cases} x^2+y^2+x-3y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ [Απ : $(x,y)=(1,2), (-2,1)$]
- $\begin{cases} 4x^2-9y^2=3 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ [Απ : $(x,y)=(\sqrt{3},1), (\sqrt{3},-1), (-\sqrt{3},1), (-\sqrt{3},-1)$]

$$\begin{aligned}
 \text{v)} \quad & \begin{cases} 4x^2 + x - y - y^2 = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} & [\text{Απ} : (x,y)=(1,1), (1,-2), (-1,-1), (-11/7, 13/7)] \\
 \text{vi)} \quad & \begin{cases} x^3 - 4xy = 0 \\ x + 3y - xy = 3 \end{cases} & [\text{Απ} : (x,y)=(2,1), (-2,1), (0,1), (3, \frac{9}{4})]
 \end{aligned}$$

Συστήματα και προβλήματα

Αν τα ζητούμενα του προβλήματος μπορούν να εκφραστούν μέσω δυο αγνώστων, τότε από τα δεδομένα σχηματίζουμε δυο εξισώσεις, δηλαδή ένα σύστημα 2×2 το οποίο μετά λύνουμε.

Ανάλογα εργαζόμαστε αν έχουμε τρεις αγνώστους κ.τ.λ

Παράδειγμα

Ένας Χημικός έχει δύο διαλύματα Α, Β υδροχλωρικού οξέως. Το Α έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το Β 80%. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;

Λύση

Έστω x , y οι ζητούμενες ποσότητες των Α, Β, αντίστοιχα. Από το Α παίρνει $x \frac{50}{100} = 0,5x$ οξύ

και από το δεύτερο $y \frac{80}{100} = 0,8y$. Το νέο διάλυμα θα περιέχει $0,5x + 0,8y$ οξύ (1)

Η συνολική ποσότητα του νέου διαλύματος είναι $x + y = 100$ ml και θέλουμε να είναι

περιεκτικότητας 68% σε οξύ. Άρα θα περιέχει $100 \frac{68}{100} = 68$ οξύ, οπότε

$$0,5x + 0,8y = 68 \Leftrightarrow 5x + 8y = 680 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) σχηματίζουμε το σύστημα $\begin{cases} x + y = 100 \\ 5x + 8y = 680 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} y = 60 \\ x = 40 \end{cases}$

Άρα από το Α θα πάρει 40 ml και από το Β 60 ml.

Συστήματα και γραμμές του επιπέδου

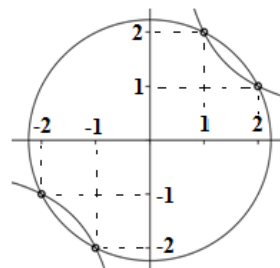
Είδαμε ότι η εξίσωση $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία γραμμή.

Γενικά κάθε εξίσωση με δυο αγνώστους x και y είναι δυνατόν να παριστάνει μια γραμμή (ευθεία ή καμπύλη ή τμήματα ή συνδυασμούς αυτών) στο επίπεδο. Αν έχουμε δυο τέτοιες γραμμές τότε η επίλυση του συστήματός τους, μας δίνει τα κοινά τους σημεία.

Έτσι στο παράδειγμα της § 1.2 το σύστημα που λύθηκε είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα:

« Να βρεθούν τα κοινά σημεία ενός κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$ και μιας υπερβολής με εξίσωση $xy = 2$ ».

Τα κοινά σημεία φαίνονται στο διπλανό σχήμα



Μπορούμε να καταλήξουμε σε ενδιαφέροντα θεωρητικά συμπεράσματα όπως στο επόμενο παράδειγμα: Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = r^2$ και η ευθεία $y = \lambda x + \mu$. Βρείτε μια σχέση μεταξύ των r , λ , μ ώστε η ευθεία να εφάπτεται στον κύκλο.

Θέλουμε το σύστημα των δυο εξισώσεων να έχει μοναδική λύση ως προς x , y . Αντικαθιστώντας το y στην άλλη εξίσωση παίρνουμε την $x^2 + (\lambda x + \mu)^2 = r^2$ που μετά τις πράξεις γράφεται:

$(\lambda^2 + 1)x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2 - r^2 = 0$. Θέλουμε αυτό το τριώνυμο να έχει μια λύση ως προς x . Αρκεί $\Delta = 0$.

Όμως $\Delta = (2\lambda\mu)^2 - 4(\lambda^2 + 1)(\mu^2 - r^2) = \dots = 4\lambda^2 r^2 - 4\mu^2 + 4r^2$. Άρα $\Delta = 0 \Leftrightarrow r^2(1 + \lambda^2) = \mu^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22. Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα . Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες , πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ ;
23. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 42 και εμβαδόν 110 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του ;
24. Βρείτε δυο αριθμούς με γινόμενο 45 και άθροισμα τετραγώνων 106 .
25. Έστω ο διψήφιος ακέραιος α με $\alpha > 60$. Αντιστρέφουμε τα ψηφία του και σχηματίζουμε τον αριθμό β . Αν $\alpha + \beta = 110$, να βρείτε τους α , β .
26. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} yx = \alpha \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε αυτό να έχει 4 λύσεις .
27. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} yx = \alpha \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε αυτό να έχει δυο λύσεις
28. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 2x + \alpha \end{cases}$. Να βρείτε το α ώστε αυτό να έχει μοναδική λύση .