

www.mathematica.gr

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Φάκελος : Άλγεβρα Β-Λυκείου

Επιμέλεια : Φωτεινή Καλδή

Άσκηση 1 :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$.

Να βρεθούν:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = \ln(x^2 - 4) + \ln 5 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

δ) Να λυθεί η ανίσωση $e^{f(6)-2f(4)} - e^x > e^{x^2} + e^{x+1} + \ln e^2$

ε) Να λυθεί η ανίσωση $2e^{f(6)-2f(4)} - e^x < e^{2x}$

(Προτάθηκε από : **Χρήστο Κανάθη** (pana1333))

Άσκηση 2 :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4^{\frac{1}{2}+\kappa} \ln x - \frac{2^\kappa}{\ln x}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Ναδειχθεί ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

γ) Αν $f(e^2) = 15$ να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$.

δ) Με $\kappa = 1$ να λυθεί η ανίσωση $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 6$

(Προτάθηκε από : **Ηλία Καμπελή** (hikampel))

Άσκηση 3 :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \ln(e^x - 3)$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 4)$ και $f(\ln 5)$

iii) Να λύσετε την ανισότητα $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$

(Προτάθηκε από : **Χρήστο Τσιφάκη** (xr.tsif))

Άσκηση 4 :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

2) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

3) Να λυθεί η εξίσωση $f(\sqrt{3}\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$.

4) Να λυθεί η ανίσωση $f(2x) > f(x)$

5) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Προτάθηκε από : **Χρήστο Κανάθη** (pana1333))

Άσκηση 5 :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 - \alpha x^2 - 5x + 6, & x < 1 \\ x - 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Αν είναι $f(1) = f(-2)$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α .

β) Για $\alpha = 2$

i) Ναδειχθεί ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

iii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$ για $x < 1$.

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = -x \ln 2$ για $x \leq 0$.

v) Να λυθεί η εξίσωση $f(\sigma\upsilon\nu x) - \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ για $x \in [0, \pi]$

(Προτάθηκε από : **Χρήστο Κανάδη** (pana133))

Άσκηση 6 :

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha^2 + \ln^4 \alpha) x^3 - 3(\alpha + \ln^3 \alpha) x^2 + (\alpha + \ln^2 \alpha) x + 1 + \ln^3 \alpha$ με $\alpha, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

A. Να βρεθεί ο $\alpha > 0$ ώστε το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου να είναι 0 (μηδέν).

B. Αν $\alpha = 1$ τότε:

α) Να γίνει η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $P(e^x + \sqrt{2}) = 0$

(Προτάθηκε από : **Ηλία Καμπελή** (hlkempel))

Άσκηση 7 :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την ευθεία $y = 2$

(Προτάθηκε από : **Σπύρο Καρδαμίτση**)

Άσκηση 8 :

A) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = e^x - x - 1$ με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = \ln(e^x - x)$.

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

2) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της g .

3) Να δείξετε ότι $\frac{1}{e^{x^2}} \geq 1 - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4) Να δείξετε ότι είναι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα.

B) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \ln x - x + 1$.

1) Να δείξετε ότι $h\left(\frac{1}{x}\right) + h(x) = -\frac{(x-1)^2}{x}$, $x > 0$.

2) Να λυθεί η εξίσωση $h(x) = -x + 1 + \ln^3 x$

Γ) Έστω η αριθμητική πρόοδος α_n με $\alpha_1 = 2x, \alpha_2 = f(x) + \ln 2, \alpha_3 = \ln 4$.

1) Να βρεθεί ο x και η διαφορά ω .

2) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων.

(Προτάθηκε από : **Χρήστο Κανάδη** (pana1333))

Άσκηση 9 :

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ που έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x) = (1 - x)^2$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln(P(x))$

A) Να υπολογιστούν τα α και β .

B) Για $\alpha = -5$ και $\beta = 4$

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

2) Είναι $f(x) = 2\ln|x - 1| + \ln(2x - 1)$

3) Να λυθεί η εξίσωση $P(\eta\mu x) = 0$.

4) Να λυθεί η εξίσωση $e^{P(x)+2} - e^{2x^3} = 0$.

5) Να βρεθεί το άθροισμα των 9 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου

α_n με $\alpha_1 = P(1), \alpha_2 = P(2), \alpha_3 = P(-1) + 18$.

6) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(P(x) + 1) + \ln(P(x) + 1)^2 + \dots + \ln(P(x) + 1)^{2011} = 0$.

7) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(Q(x)) + \ln^2(Q(x)) + \dots + \ln^{2011}(Q(x)) = 0$.

Άσκηση 10 :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\sqrt{5} + 1)^x + (\sqrt{5} - 1)^x$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

B) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2$

Δ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 12$ και $f(x) = 2$

E) Να λύσετε την ανίσωση $f(\eta\mu^2 x) \leq 2$

Στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x}) = f(x^2) + \ln x$

(Προτάθηκε από : **Μίλτο Παπαγρηγοράκη** (m.papagrigrorakis))

Λύσεις Ασκήσεων

Λύση Άσκησης 1:

α) Έχουμε $x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 10x + 6x - 12 = x^2(x - 2) - 5x(x - 2) + 6(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 5x + 6) = (x - 2)(x - 2)(x - 3) = (x - 2)^2(x - 3)$, (1)

Θέλουμε: $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 > 0 \Rightarrow (x - 2)^2(x - 3) > 0 \Rightarrow x \in (3, \infty)$

Άρα $D_f = (3, \infty)$

β) Έστω $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$ με $x_1 < x_2$.

Είναι $x_1 - 3 < x_2 - 3$ και $(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2$.

Επομένως $(x_1 - 3)(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 3)(x_2 - 2)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f γνήσιως αύξουσα στο $(3, +\infty)$

γ) $\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = \ln(x^2 - 4) + \ln 5 + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \Rightarrow$

$\ln(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) = \ln\left((x^2 - 4) \cdot 5 \cdot \frac{x-2}{x+2}\right) = \ln\left((x - 2)(x + 2) \cdot 5 \cdot \frac{x-2}{x+2}\right) =$

$\ln(5(x - 2)^2) \Rightarrow (x - 2)^2(x - 3) = 5(x - 2)^2 \Rightarrow (x = 2 \vee x - 3 = 5) \Rightarrow (x = 2 \vee x = 8)$

Με επαλήθευση απορρίπτουμε την λύση $x = 2$. Άρα $x = 8$.

δ) Είναι:

$f(6) = \ln(48)$ και $f(4) = \ln 4$, επομένως

$f(6) - 2f(4) = \ln(48) - 2\ln 4 = \ln(48) - \ln(16) = \ln\frac{48}{16} = \ln 3$.

Έτσι $e^{f(6)-2f(4)} = e^{\ln 3} = 3$.

Επίσης είναι γνωστό ότι $\ln e^2 = 2\ln e = 2$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η δοθείσα είναι ισοδύναμη με την:

$e^{x^2} + e^{x+1} + e^x < 1$, η οποία είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

Πράγματι για $x \geq 0$ έχουμε: $e^x \geq 1$ και $e^{x+1} \geq e$ και $e^{x^2} \geq 0$

άρα $e^{x^2} + e^{x+1} + e^x \geq e + 1 > 1$

Για $x < 0$ είναι:

$e^x > 0$ και $e^{x+1} > 0$ και $e^{x^2} > 1$

αφού $e^k > 0, \forall k \in \mathbb{R}$ και $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

Επομένως έχουμε $e^{x^2} + e^{x+1} + e^x > 1$.

Άρα η ανίσωση αδύνατη στο \mathbb{R}

ε) $f(6) = \ln(48)$ και $f(4) = \ln 4$, επομένως

$f(6) - 2f(4) = \ln(48) - 2\ln 4 = \ln(48) - \ln(16) = \ln\frac{48}{16} = \ln 3$.

Έτσι $e^{f(6)-2f(4)} = e^{\ln 3} = 3$.

Άρα έχουμε να λύσουμε την:

$$e^{2x} + e^x - 6 > 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 6 > 0 \Leftrightarrow (e^x + 3)(e^x - 2) > 0 \text{ από την οποία έχουμε:}$$

$$(e^x + 3 > 0 \wedge e^x - 2 > 0) \Leftrightarrow (e^x > -3 \wedge e^x > 2) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \wedge x > \ln 2)$$

ή

$$(e^x + 3 < 0 \wedge e^x - 2 < 0) \Leftrightarrow (e^x < -3 \wedge e^x < 2) \text{ που είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}.$$

Άρα τελικά $x > \ln 2$.

(Από : Αντώνη Νασιούλα)

Λύση Άσκησης 2:

α) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχουμε:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

β) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 4^{\frac{1}{2}+k} \cdot \ln x - \frac{2^k}{\ln x} + 4^{\frac{1}{2}+k} \cdot \ln \frac{1}{x} - \frac{2^k}{\ln \frac{1}{x}} =$
 $= 4^{\frac{1}{2}+k} \cdot \ln x - \frac{2^k}{\ln x} - 4^{\frac{1}{2}+k} \ln x + \frac{2^k}{\ln x} = 0$

γ) $f(e^2) = 4^{\frac{1}{2}+k} \cdot \ln e^2 - \frac{2^k}{\ln e^2} = 2 \cdot 4^{\frac{1}{2}+k} - \frac{1}{2} \cdot 2^k = 15 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2k+1} - \frac{1}{2} \cdot 2^k - 15 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2k} - \frac{1}{2} \cdot 2^k - 15 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4u^2 - \frac{1}{2}u - 15 = 0 \Leftrightarrow u = 2, u = -\frac{15}{8}$

Άρα $u = 2 \Leftrightarrow 2^k = 2 \Leftrightarrow k = 1$

δ) Για $k = 1$:

$f(x) = 8 \ln x + \frac{2}{\ln x}$. Άρα:

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 16 \ln x + \frac{4}{\ln x} - 8 \ln x - \frac{2}{\ln x} = 8 \ln x + \frac{2}{\ln x} \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 \ln x + \frac{2}{\ln x} - 6 \leq 0.$$

Θέτω $\ln x = u$ και η ανίσωση γίνεται:

$$8u + \frac{2}{u} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8u^2 - 6u + 2}{u} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow u \cdot (8u^2 - 6u + 2) \leq 0 \text{ με } u \neq 0. \text{ Προκύπτει ότι } 8u^2 - 6u + 2 > 0 \text{ αφού } \Delta < 0 \text{ και } a=8 > 0.$$

Άρα η ανίσωση γίνεται:

$$u(8u^2 - 6u + 2) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$u < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Rightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$$

(Από : (vanalex))

Λύση Άσκησης 3:

α) Πρέπει $e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$

Άρα $D_f = (\ln 3, +\infty)$

β) $f(\ln 4) = \ln 4 + \ln(e^{\ln 4} - 3) = \ln 4 + \ln(4 - 3) = \ln 4 + \ln 1 = \ln 4$

$f(\ln 5) = \ln 5 + \ln(e^{\ln 5} - 3) = \ln 5 + \ln(5 - 3) = \ln 5 + \ln 2 = \ln 10$

Όμως $\ln 10 > \ln 4 \Rightarrow f(\ln 5) > f(\ln 4)$

γ) $f(x) > \ln 2 + \ln(e^x - 2)$, (1) πρέπει $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$

και $x > \ln 3$

Αν $x > \ln 3$ η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}
x + \ln(e^x - 3) &> \ln 2 + \ln(e^x - 2) \Leftrightarrow \ln e^x + \ln(e^x - 3) > \ln [2(e^x - 2)] \Leftrightarrow \\
\ln(e^{2x} - 3e^x) &> \ln(2e^x - 4) \stackrel{\ln x^1}{\Leftrightarrow} e^{2x} - 3e^x > 2e^x - 4 \Leftrightarrow \\
e^{2x} - 5e^x + 4 &> 0 \Leftrightarrow (e^x - 4)(e^x - 1) > 0 \\
\text{Άρα } e^x < 1 &\Leftrightarrow x < 0 \text{ (απορρίπτεται) ή } e^x > 4 \Leftrightarrow x > \ln 4 \\
\text{Έτσι } x &\in (\ln 4, +\infty)
\end{aligned}$$

(Από : **Ηλία Καμπελή** (hilkampel))

Λύση Άσκησης 4:

1) Πρέπει $e^x + 1 > 0 \stackrel{e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{A_f = \mathbb{R}}$, όπου A_f είναι το πεδίο ορισμού της f

2) Έστω

$x_1, x_2 \in A_f = \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2} \stackrel{e^x \uparrow}{\Rightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \stackrel{+1}{\Rightarrow} e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

3) Είναι $f(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x) \stackrel{f(\gamma\nu\sigma.\alpha\lambda\epsilon\sigma\upsilon\sigma\alpha) \Rightarrow f:1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x} : (1)$

Η τελευταία εξίσωση δεν μπορεί να έχει ρίζα κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\eta\mu x_0 = 0$ διότι τότε θα είναι $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x_0 = \sigma\upsilon\nu x_0 \stackrel{\eta\mu x_0=0}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x_0 = 0 \stackrel{\eta\mu^2 x_0 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0 = 0}{\Rightarrow} \stackrel{\eta\mu^2 x_0 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0 = 1}{\Rightarrow} \boxed{1 = 0}$ (άτοπο).

Οπότε ισοδύναμα έχουμε: $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \stackrel{\eta\mu x}{\Leftrightarrow} \sqrt{3} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}}$$

4) Είναι $f(2x) > f(x) \stackrel{f(\gamma\nu\sigma.\alpha\lambda\epsilon\sigma\upsilon\sigma\alpha)}{\Leftrightarrow} 2x > x \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$

5) Έχουμε: $f(-x) = \ln(e^{-x} + 1) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) \stackrel{\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \ln \theta_1 - \ln \theta_2, \theta_1, \theta_2 \in (0, +\infty)}{=} \ln(e^x + 1) - \ln e^x$

$$\ln(e^x + 1) - \ln e^x \stackrel{f(x) = \ln(e^x + 1), \ln e^x = x}{\Rightarrow} \boxed{f(-x) = f(x) - x}$$

(Από : **Στάθης Κούτρα**)

Λύση Άσκησης 5:

A). $f(1) = f(-2) \Rightarrow 0 = (-2)^3 - a(-2)^2 - 5(-2) + 6 \Leftrightarrow 4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$

B).i) Για $a = 2$ η $f(x)$ γίνεται: $\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5x + 6, & x < 1 \\ x - 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

Για $x \geq 1$: $f(x) = \ln x + x - 1$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα αφού:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει για $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα για $x \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

ii) Για $x < 1$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -2$$

Απ' όπου προκύπτει ότι τελικά $x = -2$.

Για $x \geq 1$: $f(x) = \ln x + x - 1$ η οποία έχει ως γνησίως αύξουσα μοναδική ρίζα σ' αυτό το διάστημα το $x = 1$

iii) Για $x < 1$: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2) < 0$

Για $x < 1$ η f είναι θετική στο $(-2, 1)$ και αρνητική στο $(-\infty, -2)$.

Άρα $x \in (-\infty, -2)$

iv) $x \leq 0$: $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = -x \ln 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^x + 6 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow$

$$u^3 - 2u^2 - 5u + 6 = \ln u \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

$$v) 0 \leq x \leq \pi : |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

Αν το $\sin x$ είναι 1 τότε προφανώς το $x = 0$ το οποίο είναι δεκτή λύση.

Τώρα για $\sin x < 1$: $f(\sin x) = \sin^3 x - 2\sin^2 x - 5\sin x + 6$. Και έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$f(\sin x) - \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x - 2\sin^2 x - 6\sin x + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$u^3 - 2u^2 - 6u + 7 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 - u - 7) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1, u_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Παραπάνω απορρίπτονται όλες οπότε μόνη λύση μένει $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

(Από : (vanalex))

Λύση Άσκησης 6:

A. Για να είναι το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου 0 πρέπει:

$$a^2 + \ln^4 a - 3a - 3\ln^3 a + a + \ln^2 a + 1 + \ln^3 a = 0 \Leftrightarrow \ln^4 a - 2\ln^3 a + \ln^2 a - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln^2 a (\ln^2 a - 2\ln a + 1) + (a - 1)^2 \Leftrightarrow \ln^2 a (\ln a - 1)^2 + (a - 1)^2 = 0$$

Προέκυψε άθροισμα θετικών όρων ίσο με 0 άρα πρέπει:

$$\begin{cases} \ln a (\ln a - 1) = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln a = 0 \vee \ln a = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \vee a = e \\ a = 1 \end{cases}$$

Άρα $a = 1$.

B.α) Για $a = 1$ το πολυώνυμο γίνεται:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Από σχήμα *Horner*

1	-3	1	1	1
	1	-2	-1	
1	-2	-1	0	

προκύπτει $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

β) Από την παραπάνω εξίσωση $P(x) = 0$ προκύπτει ότι $x = 1, x = 1 + \sqrt{2}, x = 1 - \sqrt{2}$

Άρα $e^x + \sqrt{2} = 1, e^x + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}, e^x + \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$

Ή $e^x = 1 - \sqrt{2}, e^x = 1, e^x = 1 - 2\sqrt{2}$

Η πρώτη και τη τρίτη είναι αδύνατες αφού τα δεύτερα μέλη είναι αρνητικοί αριθμοί. Η δεύτερη έχει λύση $x = 0$.

(Από : (vanalex))

Λύση Άσκησης 7:

α) πρέπει

$$\begin{cases} \alpha \nu x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0 < 1 \leq \sqrt{x^2 + 1} \\ \alpha \nu x > 0 \Rightarrow (\sqrt{x^2 + 1})^2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ισχχει } \forall x \in (-\infty, 0] \\ x^2 + 1 > x^2, x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ισχχει } \forall x \in (-\infty, 0] \\ 1 > 0, \text{ισχχει } \forall x \in (0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + 1} - x > 0, \forall x \in R \Rightarrow \boxed{A_f = R}$$

B) Έστω

$$x \in A_f = R \Rightarrow \begin{cases} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = \log \left(\sqrt{(-x)^2 + 1} + x \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = \log \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = \log \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = \log \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = \log \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = \log (\sqrt{x^2+1} - x)^{-1} \end{array} \right. \stackrel{\log \theta^k = k \log \theta, \theta > 0, k \in R}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = -\log (\sqrt{x^2+1} - x) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x \in R = A_f \\ \text{και} \\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right.$$

άρα η f είναι περιττή

γ) Φανερά μας ζητείται να λύσουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \log (\sqrt{x^2+1} - x) \\ y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log (\sqrt{x^2+1} - x) = 2 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} - x = 10^2 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = 100 + x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = (100 + x)^2 \\ 100 + x \geq 0 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = 10.000 + 200x + x^2 \\ x - 100 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 200x = -9999 \\ x - 100 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{9999}{200} - 100 \\ x - 100 \\ y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\stackrel{(\varepsilon): y=2}{\Rightarrow} \boxed{C_f \cap (\varepsilon) = M \left(-\frac{9999}{200}, 2 \right)}$$

(Από: **Στάθη Κούτρα**)

)

Λύση Άσκησης 8:

A) 1) Πρέπει $e^x - x > 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 > -1 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$ που ισχύει για κάθε

$$x \in R$$

άρα είναι $A_f = R$

2) Επειδή $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \stackrel{g(x) \geq 0, \forall x \in R}{\Rightarrow} \boxed{\min g = g(0) = 0}$

3) Επειδή ισχύει: $g(x) \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow e^x - x - 10, \forall x \in R \Rightarrow$

$$x \in R \Rightarrow -x^2 \in (-\infty, 0] \subset R, x \rightarrow -x^2 \Rightarrow e^{-x^2} - (-x^2) - 10, \forall x \in R \Rightarrow \stackrel{e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{e^{x^2}} + x^2 - 1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow \dots \boxed{\frac{1}{e^{x^2}} \geq 1 - x^2, \forall x \in R}$$

4) Με

$$g(x) \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow$$

$$x \rightarrow x^{-1} e^{x-1} - (x-1) - 1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow e^{x-1} - x + 1 - 1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow$$

$$e^{x-1} \geq x, \forall x \in R \stackrel{\ln \uparrow, x \in (0, +\infty)}{\Rightarrow} \ln e^{x-1} \geq \ln x, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow$$

$$\log_{\alpha} \alpha^x = x - 1 \geq \ln x, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow \boxed{\ln x \leq x - 1, x \in (0, +\infty)}$$

B)

1) Είναι

$$h\left(\frac{1}{x}\right) + h(x) \stackrel{h(x)=\ln x - x + 1}{=} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + 1 + \ln x - x + 1 =$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x \quad - \ln x - \frac{1}{x} + 1 + \ln x - x + 1 =$$

$$2 - \frac{1}{x} - x = \frac{2x - 1 - x^2}{x} = -\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \Rightarrow \dots \boxed{h\left(\frac{1}{x}\right) + h(x) = -\frac{(x-1)^2}{x}, x \in (0, +\infty)}$$

2) Έχουμε:

$$\begin{cases} h(x) = -x + 1 + \ln^3 x \\ x \in (0, +\infty) \end{cases} \stackrel{h(x)=\ln x - x + 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \ln x - x + 1 = -x + 1 + \ln^3 x \\ x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dots \begin{cases} \ln^3 x - \ln x = 0 \\ x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \cdot (\ln^2 x - 1) = 0 \\ x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln^2 x - 1 = 0 \end{cases} \\ x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ \ln x = \pm 1 \end{cases} \\ x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 > 0 \\ x = e^{-1} > 0 \\ x = e > 0 \end{cases} \\ x \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \dots \boxed{x = 1, \frac{1}{e}, e}$$

$$\Gamma) \text{ Είναι : } 1) \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Delta.O.A.\Pi \Leftrightarrow 2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \stackrel{\alpha_1=2x, \alpha_2=f(x)+\ln 2, \alpha_3=\ln 4}{\Leftrightarrow} 2[f(x) + \ln 2] = 2x + \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ln(e^x-x), \ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$$

$$2[\ln(e^x - x) + \ln 2] = 2x + 2\ln 2 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \ln(e^x - x) + \ln 2 = x + \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - x) = x \Leftrightarrow e^x - x = e^x \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\text{Με } x = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = f(0) + \ln 2 \stackrel{f(0)=\ln(e^0-0)=\ln 1=0}{=} \ln 2 \Rightarrow \omega = \ln 2 - 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \ln 2}$$

2) Είναι

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot [2\alpha_1 + (5-1) \cdot \omega] \Rightarrow$$

$$\alpha_1=0, \omega=\ln 2 \quad S_5 = \frac{5}{2} \cdot 4 \ln 2 \Rightarrow \dots \boxed{S_5 = 10 \cdot \ln 2}$$

(Από : **Στάθη Κούτρα**)

Λύση Άσκησης 9:

A) Για να έχει το $P(x)$ παράγοντα το $Q(x) = (1-x)^2 = (x-1)^2$ πρέπει να υπάρχει πολυώνυμο $R(x) = \kappa x + \lambda$ ώστε :

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) \Leftrightarrow 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1 = (x-1)^2 \cdot (\kappa x + \lambda) \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1 = (x^2 - 2x + 1) \cdot (\kappa x + \lambda) \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1 = \kappa x^3 + \lambda x^2 - 2\kappa x^2 - 2\lambda x + \kappa x + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1 = \kappa x^3 + (\lambda - 2\kappa)x^2 + (\kappa - 2\lambda)x + \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \beta = \kappa - 2\lambda \\ \alpha = \lambda - 2\kappa \\ \kappa = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \beta = 4 \\ \alpha = -5 \\ \kappa = 2 \end{cases}$$

B) Για $\alpha = -5, \beta = 4 \Rightarrow P(x) = (x-1)^2 \cdot (2x-1)$

1) Πρέπει $P(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A_f = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

2) Είναι $f(x) = \ln(P(x)) = \ln[(x-1)^2 \cdot (2x-1)] = \ln(x-1)^2 + \ln(2x-1) \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = 2 \ln|x-1| + \ln(2x-1)}$$

3) Είναι $P(\eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x - 1)^2 \cdot (2\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \eta\mu x - 1 = 0 \\ 2\eta\mu x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = 1 \\ \eta\mu x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z} \\ x = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4) $e^{P(x)+2} - e^{2x^3} = 0 \Leftrightarrow e^{P(x)+2} = e^{2x^3} \Leftrightarrow$

$$P(x) + 2 = 2x^3 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 + 2 = 2x^3 \Leftrightarrow \dots 5x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \dots \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

5) Είναι $\alpha_1 = P(1) \xrightarrow{P(x)=(x-1)^2(2x-1) \Rightarrow P(1)=0} \boxed{\alpha_1 = 0}, \alpha_2 = P(2) \xrightarrow{P(x)=(x-1)^2(2x-1) \Rightarrow P(2)=3} \boxed{\alpha_2 = 3},$

$$\alpha_3 = P(-1) + 18 \xrightarrow{P(x)=(x-1)^2(2x-1) \Rightarrow P(-1)=-12} \boxed{\alpha_3 = 6}$$

Είναι $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 0 \Rightarrow \boxed{\omega = 3}$ άρα είναι: $S_9 = \frac{9}{2} [2\alpha_1 + (9-1) \cdot \omega] \xrightarrow{\alpha_1=0, \omega=3} \boxed{S_9 = 108}$

6) Είναι $\ln(P(x)+1) + \ln(P(x)+1)^2 + \dots + \ln(P(x)+1)^{2011} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \ln(P(x)+1) + 2\ln(P(x)+1) + \dots + 2011\ln(P(x)+1) = 0 \\ P(x)+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(P(x)+1)(1+2+\dots+2011) = 0 \\ 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x)+1 = 1 \\ x(2x^2 - 5x + 4) > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 25 - 32 = -7 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(2x-1) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} x = 1 > 0 \\ x = \frac{1}{2} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

7) $\ln(Q(x)) + \ln^2(Q(x)) + \dots + \ln^{2011}(Q(x)) = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\ln(Q(x)) \cdot [1 + \ln(Q(x)) + \dots + \ln^{2010}(Q(x))] = 0} : (1)$$

ι) Αν $\ln(Q(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) = e \\ Q(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = e \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \pm\sqrt{e} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{e} \\ x \neq 1 \end{cases}$

τότε έχουμε: $1 + \ln(Q(x)) + \dots + \ln^{2010}(Q(x)) = 2011$ και η (1) γίνεται ισόδυναμα

$$2011 \cdot \ln(Q(x)) = 0 \Leftrightarrow \ln(Q(x)) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

υ) Αν $\ln(Q(x)) \neq 1 \Rightarrow 1 + \ln(Q(x)) + \dots + \ln^{2010}(Q(x)) = \frac{\ln^{2011}(Q(x)) - 1}{\ln(Q(x)) - 1}$ οπότε η (1) ισχύει
 δύναμη γίνεται
 $\frac{\ln^{2011}(Q(x)) - 1}{\ln(Q(x)) - 1} \cdot \ln(Q(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(Q(x)) = 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) = 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$
 Οπότε οι ρίζες της (1) είναι $x=0, x=2$

(Από : **Στάθη Κούτρα**)

Λύση Άσκησης 10:

Α) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το R άρα $A_f = R$.

Β) Για $x_1, x_2 \in A_f$ και αφού $\sqrt{5} + 1 > 1$ και $\sqrt{5} - 1 > 1$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow (\sqrt{5} + 1)^{x_1} < (\sqrt{5} + 1)^{x_2} \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{5} - 1)^{x_1} < (\sqrt{5} - 1)^{x_2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει: Για $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) $f(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 2$ άρα η εξίσωση γίνεται $f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$. (Ως γνησίως αύξουσα είναι και 1 - 1)

Παρατηρούμε επίσης ότι $f(2) = 12$ άρα ομοίως η εξίσωση γίνεται $f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$. (Ως γνησίως αύξουσα είναι και 1 - 1)

$$\text{Ε) } f(\eta\mu^2 x) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$f(\eta\mu^2 x) \leq f(0) \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi.$$

Στ) Προφανής ρίζα είναι το 1

$$\text{Για κάθε } 0 < x < 1 \text{ ισχύει ότι } \sqrt{x} > x^2 \Rightarrow f(\sqrt{x}) > f(x^2)$$

και $0 > \ln x$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει ότι

$$f(\sqrt{x}) > f(x^2) + \ln x \quad (1)$$

$$\text{Για κάθε } x > 1 \text{ ισχύει ότι } \sqrt{x} < x^2 \Rightarrow f(\sqrt{x}) < f(x^2)$$

και $0 < \ln x$. Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει ότι $f(\sqrt{x}) < f(x^2) + \ln x \quad (2)$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η εξίσωση δεν μπορεί να έχει άλλη ρίζα, επομένως μοναδική ρίζα είναι το 1

(από :

(vanalex) και **Μίλτο Παπαγρηγοράκη** (m.papagrigrorakis)