Φθίνουσες ταλαντώσεις.

Για χαμηλές ταχύτητες:

$$F_{αντίστασης} = F' = -bv.$$

(Για μεγάλες ταχύτητες έχουμε επιπλέον:
$F'_{αντίστασης} = F'' = -b' \cdot v^2$)

2ος ΝΝ στις αμείωτες ταλαντώσεις.

$$\Sigma F = F_{επαν} \Rightarrow \Sigma F = -Dx \Rightarrow ma = -Dx \Rightarrow \boxed{ma + Dx = 0}$$

2ος ΝΝ στις φθίνουσες ταλαντώσεις:

$$\Sigma F = F_{επαν} + F_{αντ} = F_{επ} + F' \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -Dx - bv \Rightarrow ma = -Dx - bv \Rightarrow \boxed{ma + bv + Dx = 0}$$

Στις φθίνουσες, αποδεικνύεται ότι:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$$

όπου $\Lambda = \frac{b}{2m}$.

ο τύπος $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ ισχύει για κάθε χρονική στιγμή t και όχι μόνο για εκείνες τις στιγμές που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.

2ος ΝΝ

$$\sum F = F_{\text{ελατ}} + F_{\text{αντίστασης}} + F_{\text{εξωτερική}}$$

ή

$$\sum F = F_{\text{ελ}} + F' + F \Rightarrow$$

$$\sum F = -Dx - bu + F \Rightarrow$$

$$ma = -Dx - bu + F \Rightarrow$$

$$\boxed{ma + bu + Dx = F}$$

Τις εξαναγκασμένες τις μελετούμε με την υπόθεση ότι η απόσβεση b είναι αρκετά μικρή ώστε η συχνότητα συντονισμού να είναι περίπου ίση με την ίδιο συχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος.

Δηλαδή $\omega_{\text{συντονισμού}} \simeq \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

Ασκ. 2.95.)

$m = 1\,kg$.

$K = 400\,N/m$

$A = 0{,}32\,m$

$F = 16\,\eta\mu\omega t\,(SI)$

$F' = -2v\,(SI)$

$f' = 2f$ τότε $\dfrac{\Delta W_F}{\Delta t} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$

α) $ma = -Dx - bv + F$

$a = -\omega^2 x$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{m}} \Rightarrow D = m\omega_0^2$.

Άρα: $-m\omega^2 x = -m\omega_0^2 \cdot x - b \cdot v + F$.

Παραπηρούμε ότι αν $\omega = \omega_0$ (συντονισμός)

τότε $0 = -bv + F \Rightarrow F + F' = 0 \Rightarrow F = -F' \Rightarrow$

$$\frac{\Delta W_F}{\Delta t} = -\frac{\Delta W_{F'}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Άρα η συχνότητα $f' = 2f$ είναι η f_0 του συντονισμού.

$$\frac{\Delta W_F}{\Delta t} = F \cdot v$$

$$\frac{\Delta W_{F'}}{\Delta t} = -F' \cdot v$$

$$\omega' = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 20 \text{ rad/sec}.$$

$$2\pi f' = 20 \Rightarrow f' = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

$$f' = 2f \Rightarrow f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz} \quad (\text{αριστερά του συντονισμού})$$

$$\Sigma F = -Dx - bv + F \Rightarrow$$

$$-m\omega'^2 x = -m\omega_0^2 x + \cancel{F' + F}^{\,0} \Rightarrow$$

$$\omega'^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega' = \omega_0 \text{ άρα}$$

η συχνότητα f' είναι η f_0

Β' τρόπος:

Στη συχνότητα f' ισχύει:

$$\frac{\Delta E_{\text{προσφ}}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = -\frac{\Delta W_{F'}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$F \cdot v = -F' \cdot v \Rightarrow F + F' = 0.$$

β) $K_{max} = \frac{1}{2} m \cdot U_{max}^2$

$x = A \eta\mu \omega t \Longrightarrow v = \omega A \sigma\upsilon\nu \omega t$

ω = συχνότητα διεγέρτη.

Άρα: $K_{max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

$U_{max} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$

Άρα $K_{max} \neq U_{max}$

(αφού υπάρχει εξωτερικού διεγέρτης)

$\omega = 2\pi f$

$\omega_0 = 2\pi f' = 2\pi \cdot 2f = 2\omega$

$\frac{K_{max}}{U_{max}} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega^2}{4\omega^2} = \frac{1}{4}$