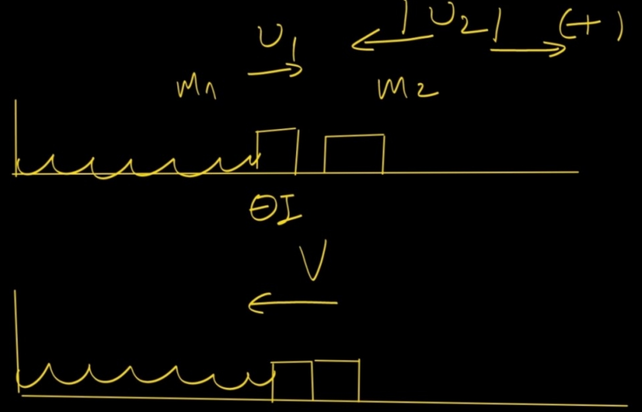
Ασκ. 2.90 σελ. 46.

α) Πριν την κρούση:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m_1}}$$

Μετά την κρούση:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}$$



$P_{\text{πριν}} = P_{\text{μετά}} \Rightarrow$

$$m_1 U_1 + m_2 \cdot (-U_2) = (m_1+m_2)\cdot(-V)$$

Η κρούση γίνεται στη ΘΙ του m_1 όταν έχει: $U_1 = +U_{1,max} = +\omega_1 A_1$

Η κρούση είναι πλαστική επειδή αυξάνεται η περίοδος

$$\frac{3T_1}{4} = 3\cdot\frac{\pi}{20} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{5}\,\text{sec}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10\,\text{r/s}$$

$$T_2 = (11-3)\cdot\frac{\pi}{20} \Rightarrow$$

$$T_2 = \frac{8\pi}{20} = \frac{2\pi}{5}\,\text{sec}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} \Rightarrow \omega_2 = 5\,\text{rad/sec}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}}{\sqrt{\frac{K}{m_1}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{10} = \sqrt{\frac{1}{1+m_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+m_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$1+m_2 = 4 \Rightarrow m_2 = 3\,kg.$$

β) Έστω ότι το m_1 ξεκινά από τη θέση $+A_1$

$x_1(0) = +A_1 \Rightarrow \Phi_0 = \frac{\pi}{2}\,rad$

Άρα: $x_1(t) = A_1 \eta\mu(\omega_1 t + \Phi_0) \Rightarrow$

$$x_1(t) = 0{,}1\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)$$

$$\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \Sigma F_1 \cdot v_1 = m_1 a_1 v_1 = -m_1 \omega_1^2 x_1 \cdot v_1$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{40}\right) = 0{,}1\,\eta\mu\left(\frac{10\pi}{40} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}1\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} =$$

$$= 0{,}1\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_1(t) = 6\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v_1\left(\frac{\pi}{40}\right) = 6\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,m/s.$$

Άρα: $\frac{\Delta K_1}{\Delta t} = -m_1 \omega_1^2 x_1 v_1 = -1 \cdot 100 \cdot 0,1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10 \cdot \frac{2}{4} = 5 J/sec.$

γ) Η κρούση γίνεται στη ΘΙ

άρα $V = v_{2,max} = \omega_2 A_2 =$

$= 5 \cdot 0,2 = 1 m/s.$

$P_1 = m_1 v_1 = m_1 v_{1,max} =$

$= m_1 \omega_1 A_1 = 1 \cdot 10 \cdot 0,1 \Rightarrow$

$P_1 = 1 kg \cdot m/s.$

δ) Μετά την κρούση το σωσωμάτιο για έχει αρνητική ταχύτητα $-V = -1 m/s$

Άρα: $m_1 v_1 + m_2 (-v_2) = (m_1 + m_2) \cdot (-V)$

$v_1 = \omega_1 A_1 = 10 \cdot 0,1 = 1 m/s$

$1 \cdot 1 + 3 \cdot (-v_2) = (1+3) \cdot (-1) \Rightarrow$

$1 - 3v_2 = -4 \Rightarrow 5 = 3v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{5}{3} m/s.$

$P_{2,πριν} = m_2 \cdot (-v_2) = 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -5 kg \cdot m/s.$

$P_{2,μετά} = m_2 \cdot (-V) = -3 kg \cdot m/s.$

$$\Delta p_2 = p_{2,\text{μετά}} - p_{2,\text{πριν}} = -3-(-5) = +2\ \text{kg}\cdot\text{m/s}.$$

ε) $$K_{\text{πριν}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{3} = \frac{3+25}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}\ \text{J}.$$

$$K_{\text{μετά}} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1^2 = 2\ \text{J}.$$

Άρα $$|\Delta K| = K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}} = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}\ \text{Joule}.$$

$$E_{\text{πριν}} = \frac{1}{2}K A_1^2 = E_1$$

$$E_{\text{μετά}} = \frac{1}{2}K A_2^2 = \frac{1}{2}K\cdot(2A_1)^2 = 4E_1$$

$$\Pi\% = \frac{\Delta E}{E_{\text{πριν}}}\cdot 100 = \frac{4E_1 - E_1}{E_1}\cdot 100 =$$

$$= 300\ \%\ \text{αύξηση}.$$

Αν έχουμε πολλά ελατήρια ακολουθούμε τη μεθοδολογία του ισοδύναμου ελατηρίου.

1) Ελατήρια σε σειρά.



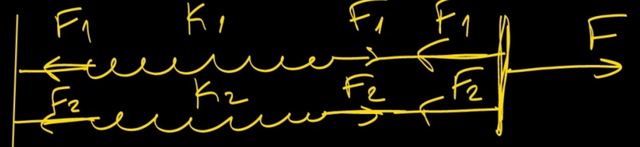
ℓ_2+x_2 $\quad$ ℓ_1+x_1

Στην περίπτωση αυτή τα ελατήρια είναι επιμηκυνθεία από τις F_1 και F_2

Από τον 3ο ΝΝ έχουμε: $F_1=F_2=F$

$$x_1+x_2=x \Rightarrow \frac{F}{K_2}+\frac{F}{K_1}=\frac{F}{K_{o\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{K_{o\lambda}}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} \Rightarrow K_{o\lambda}=\frac{K_1 \cdot K_2}{K_1+K_2}$$

2) Ελατήρια παράλληλα.



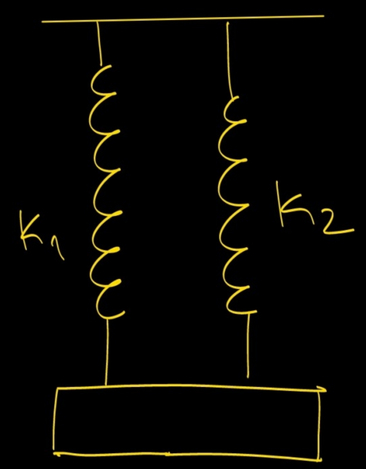
ℓ_0+x

Στην περίπτωση αυτή (υποθέτοντας χωρίς καμία γενικότητα ότι έχουν το ίδιο φυσικό μήκος) τα ελατήρια έχουν την ίδια επιμήκυνση.

$$F=F_1+F_2 \Rightarrow K_{o\lambda} \cdot x=K_1 x+K_2 x \Rightarrow$$

$$K_{o\lambda}=K_1+K_2$$

Ασκ. 6.125.



Αποδεικνύουμε πρώτα ότι τα δύο ελατήρια μπορούν να αντικατασταθούν από ένα ισοδύναμο $K = K_1 + K_2$

Άρα $5T = \pi \Rightarrow$

$T = \frac{\pi}{5}$ sec

$\omega = \frac{2\pi}{T} =$

$= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} =$

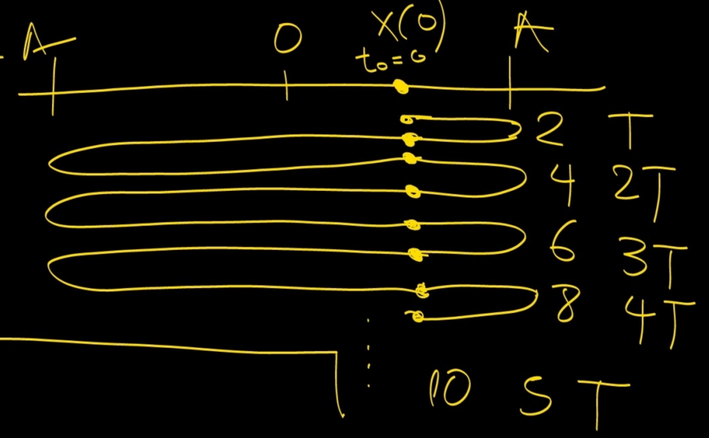
$= 10$ rad/s.

$A = 0{,}2$ m

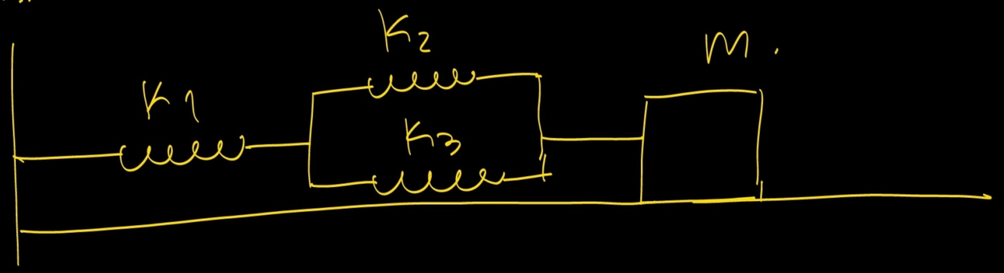
Άρα $v_{max} = 2$ m/s

Τη στιγμή $\tau = \pi$ sec περνά για $10^η$ φορά από την αρχική του θέση μετά τη στιγμή $t_0 = 0$.

Από όποια θέση μου να ξεκινά τη στιγμή $t_0 = 0$ για $1^η$ φορά περνά από αυτή τη στιγμή T



Π.χ.



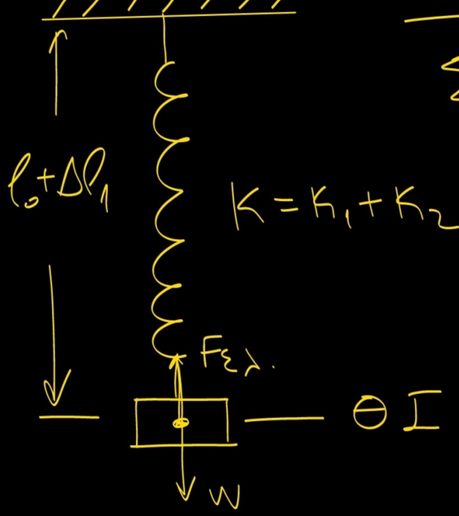
$$K_{2,3} = K_2 + K_3$$

$$K_{o\lambda} = \frac{K_1 \cdot K_{2,3}}{K_1 + K_{2,3}} = \frac{K_1(K_2+K_3)}{K_1+K_2+K_3}$$



Ασκ. 6.125 συνέχεια.

Άρα έχουμε ένα σώμα σε κατακόρυφο ελατήριο με $K = K_1 + K_2$



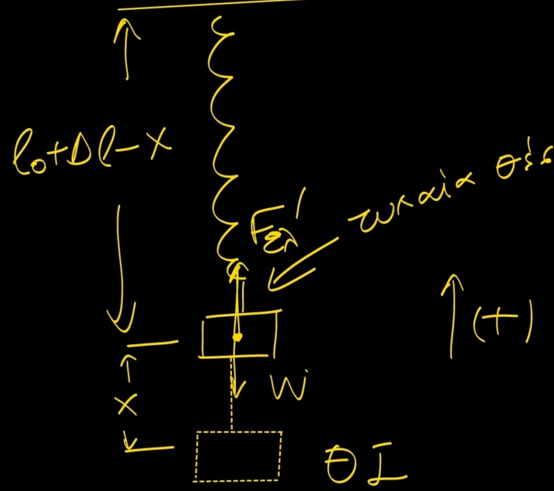
1° βήμα

Στη ΘΙ έχουμε:

$$F_{\epsilon\lambda} = W \Rightarrow$$

$$K \cdot \Delta l = mg.$$

2ο βήμα:



Στην ωραία θέση έχουμε:

$$\Sigma F = F_{\epsilon\lambda}' - W \Rightarrow$$

$$\Sigma F = K(\Delta l - x) - mg \Rightarrow$$

$$\Sigma F = K\cdot\Delta l - K\cdot x - mg \Rightarrow \Sigma F = -Kx = -(K_1+K_2)x$$

Άρα το σώμα εκτελεί Γ.Α.Τ με $D = K_1 + K_2$

β) Στην αρχική θέση τα ελατήρια ήταν επιμηκυσμένα κατά Δl.

$$mg = (K_1+K_2)\cdot\Delta l \Rightarrow 10 = 100\cdot\Delta l \Rightarrow \Delta l = 0,1\,m.$$

Απομακρύνουμε το σώμα μέχρι τα ελατήρια να συμπιεστούν κατά $\Delta l_1 = 0,1\,m$ και το αφήνουμε

Άρα $A = \Delta l + \Delta l_1 = 0,2\,m$.

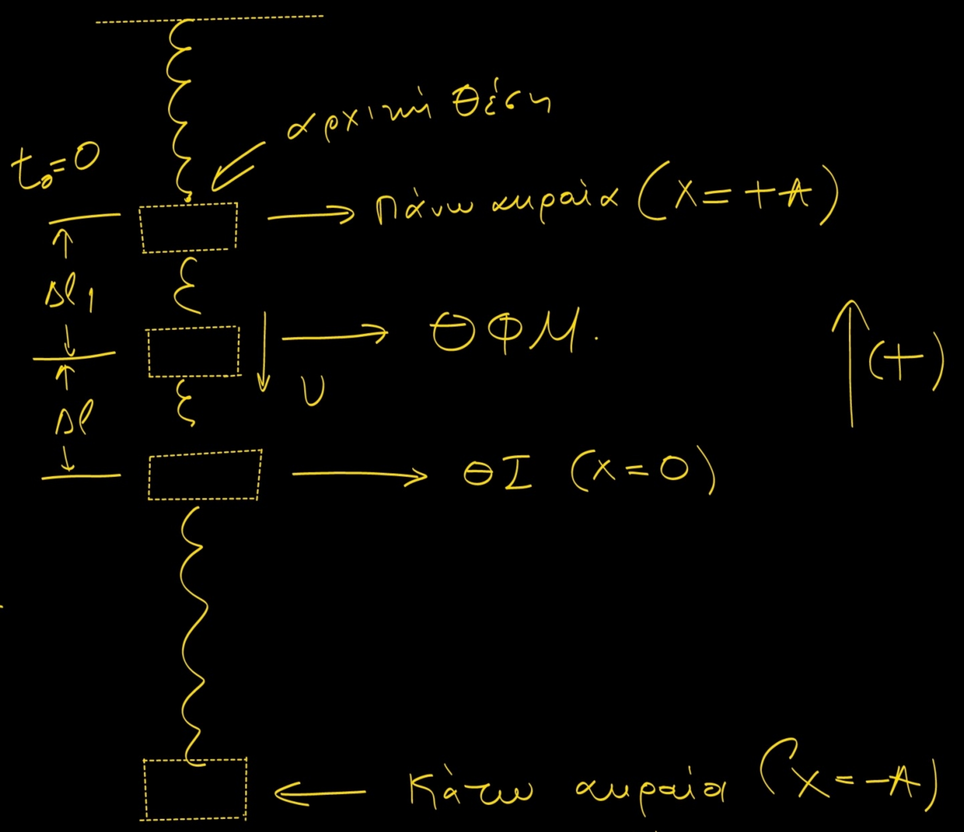
και $\Delta l_{max} = \Delta l + A = 0,3\,m$.

↑ κάτω ακραία θέση.

$t_1 = \frac{T}{2}$ (από πάνω κυραία θέση σε κάτω κυραία).

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{2\pi}{10}$ sec.

$t_1 = \frac{\pi}{10}$ sec.



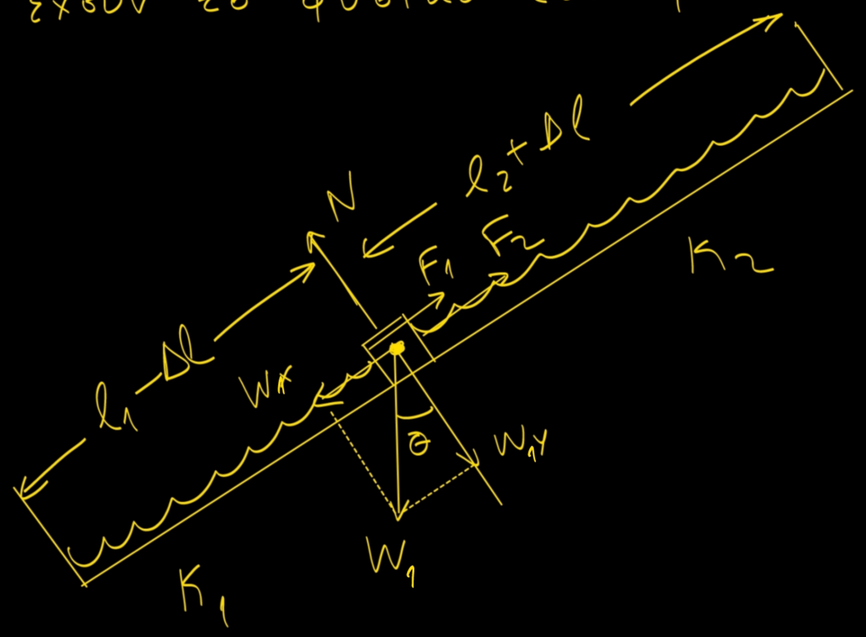
γ) $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = -DX = -(k_1+k_2)\cdot\Delta l =$

$= -100\cdot 0,1 = -10$ N

Η ορμή κατά μέτρο αυξάνεται αλλά αλγεβρικά μειώνεται. Άρα ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ορμής είναι θετικός $\frac{\Delta|\vec{p}|}{\Delta t} = +10$ N

Ασκ. 6.124.)

α) Στην αρχική θέση τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος.



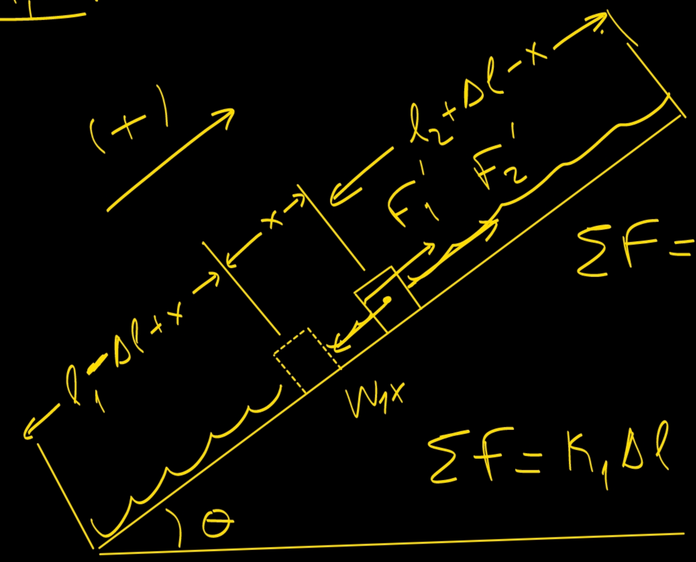
Άρα στην αρχική θέση ισορροπίας το κάτω ελατήριο είναι συσπειρωμένο και το πάνω επιμηκυσμένο.

1ο Βήμα: Στη ΘΙ έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = W_x \Rightarrow$$

$$K_1 \cdot \Delta l + K_2 \cdot \Delta l = mg\eta\mu\theta$$

2ο βήμα: Στη τυχαία θέση εισορροπίας έχουμε:



$$\Sigma F = F_1' + F_2' - W_x \Rightarrow$$

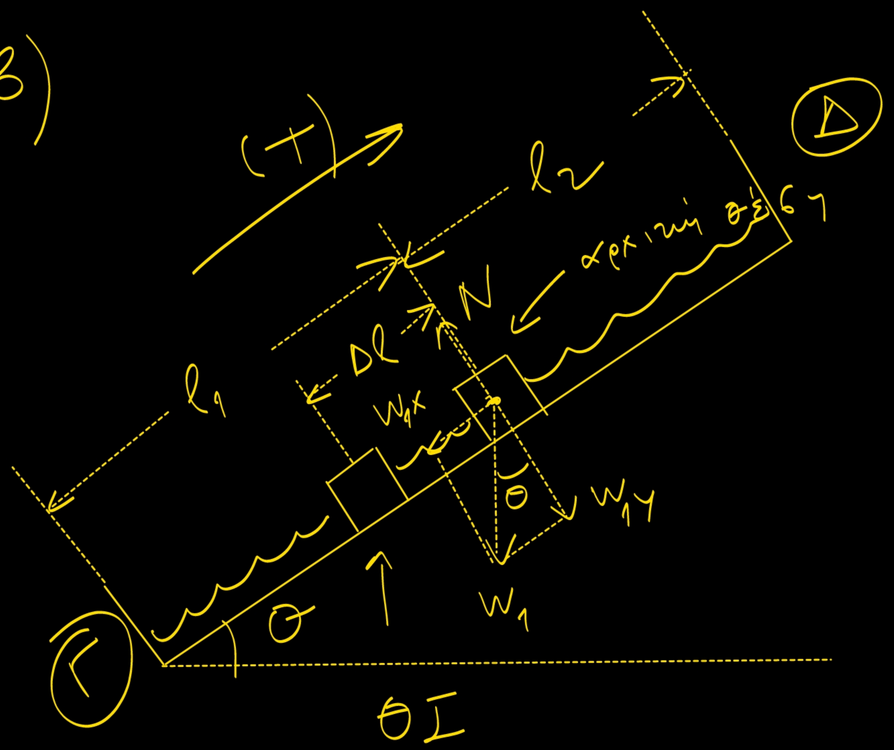
$$\Sigma F = K_1(\Delta l - x) + K_2(\Delta l - x) - W_x \Rightarrow$$

$$\Sigma F = K_1\Delta l - K_1 x + K_2\Delta l - K_2 x - mg\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$\Sigma F = (K_1\Delta l + K_2\Delta l - mg\eta\mu\theta) - K_1 x - K_2 x \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -(K_1 + K_2)x = -Dx$$ άρα τοσώγα εκτελεί απλή με $D = K$.

β)



Το σώμα το αφήνουμε από την αρχική θέση χωρίς ταχύτητα άρα: $A = \Delta l$ και:

$x(0) = +A$

$v(0) = 0$

$$(K_1 + K_2)\cdot \Delta l = m_1 g \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$200 \cdot \Delta l = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta l = 0{,}05\ m$$

$$D = K_1 + K_2 = 200\ N/m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10\ rad/sec.$$

$$x(t) = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x(0) = A\,\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow A = A\,\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ rad$$

$(\varphi_0 \in [0, 2\pi))$

Άρα: $\boxed{x = 0{,}05\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (SI)}$

γ) Αλλάξει η ΘΙ και η περίοδος της ταλάντωσης.

Γενικά έχουμε $D' = K_1 + K_2 =$

$D_1' + D_2' = K_1 + K_2$

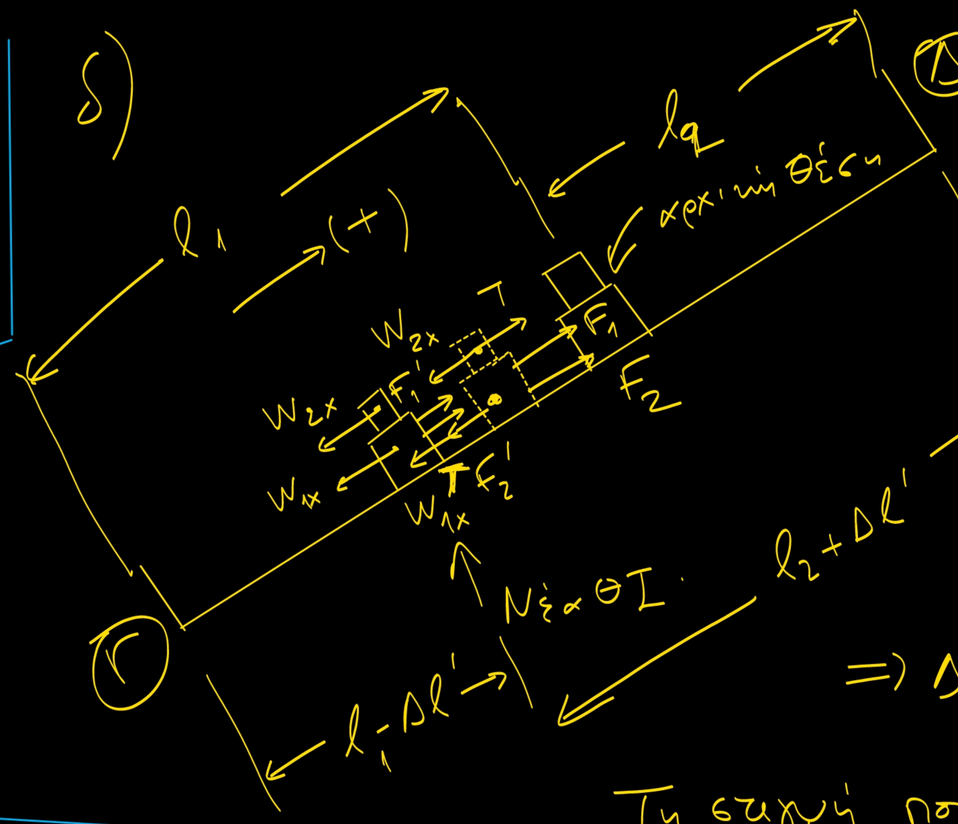
$D_1 = m_1 \omega'^2$

$D_2 = m_2 \omega'^2$

$\omega' = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{200}{2+6}} = \sqrt{25} = 5 rad/sec$

Άρα: $D_2 = m_2 \omega'^2 = 6 \cdot 25 \Rightarrow$ $\boxed{D_2 = 150 N/m}$

δ)



Αλλάξει και η ΘΙ

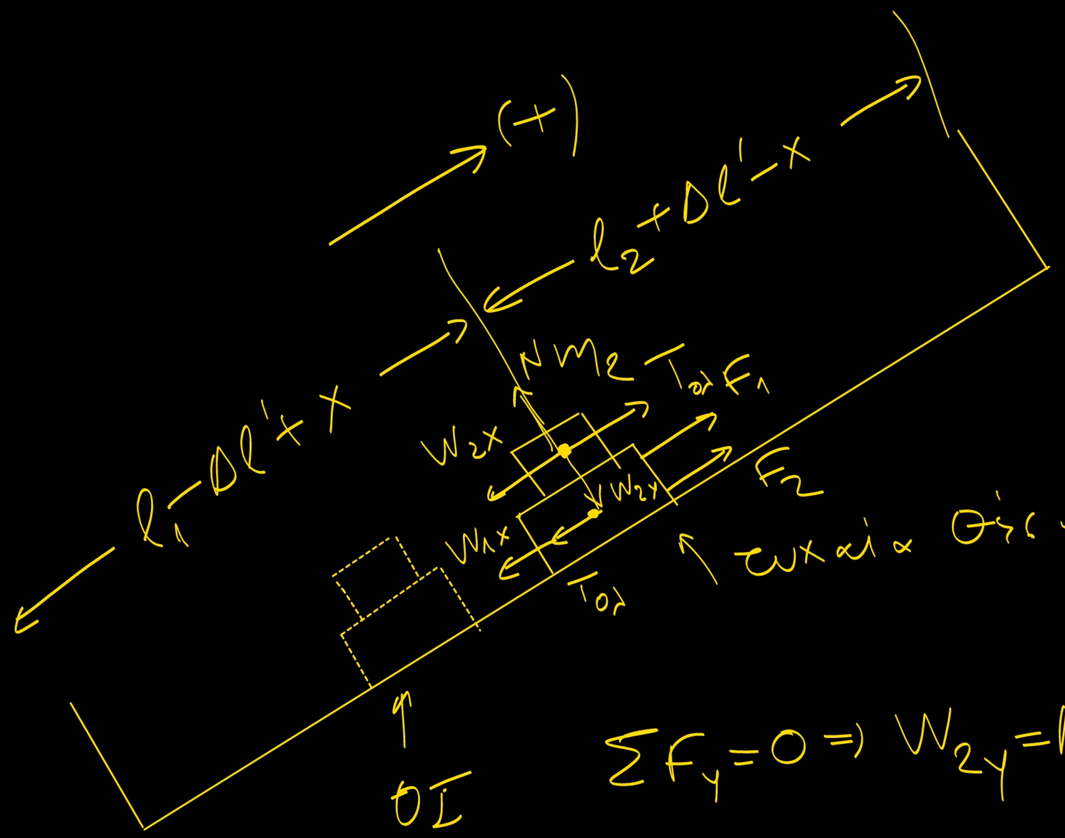
Στη Νέα ΘΙ έχουμε:

$W_{1x} + W_{2x} = F_1' + F_2' \Rightarrow$

$(m_1+m_2) g \eta\mu\theta = (K_1+K_2)\Delta l'$

$\Rightarrow \Delta l' = \frac{8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{200} = 0,2 m.$

Τη στιγμή που τοποθετούμε το m_2, το m_1 δεν έχει ταχύτητα άρα η ταλάντωση ξεκινά από την πάνω ακραία θέση.



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow W_{2y} = N$

$T_{ol} = \gamma N = \gamma m_2 g \sigma\upsilon\nu\theta$

Στην ωχαία θέση για το m_2 έχουμε:

$\Sigma F_2 = -D_2 x \Rightarrow \quad T_{ol} - W_{2x} = -D_2 x \Rightarrow$

$T_{ol} = m_2 g \eta\mu\theta - m_2 \omega'^2 \cdot x$

T_{ol} = τριβή ολίσθησης.

$A' = \Delta l' = 0{,}2\,m$ και $-A' \le x \le A'$

Άρα $T_{ol,max} = m g \eta\mu\theta + m\omega'^2 A'$ (στη θέση $x = -A'$)

$T_{ol,max} \le \gamma N \Rightarrow$

$m_2 g \eta\mu\theta + m_2 \omega'^2 A' \le \gamma \cdot m_2 g \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$

$$\gamma \ge \frac{g\eta\mu\theta + \omega'^2 A'}{g\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{10\cdot\frac{1}{2} + 25\cdot 0{,}2}{10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5+5}{10\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\gamma \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\gamma \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Άρα $\gamma_{min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ο ζητούμενος ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής.