Ασκ. 2.54) (Στάσιμο κύμα).

$y = 8 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} \cdot \eta\mu 10\pi t$ (y, x σε cm)

$y_1 = A\,\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

$y_2 = A\,\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}$

$y_1 + y_2 = 2A\,\eta\mu\frac{2\omega t}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{-\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi x}{\lambda}}{2} = 2A\,\eta\mu\omega t \cdot \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\omega t$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu|x|$

A. $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi x}{2} \Rightarrow \lambda = 4\,cm = 0{,}04\,m$.

$\omega = 10\pi\ rad/s \Rightarrow 2\pi f = 10\pi \Rightarrow f = 5\,Hz$

$\upsilon = \lambda \cdot f = 0{,}04 \cdot 5 = 0{,}2\,m/s$.

B. $y_M = 8 \cdot 10^{-2} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi \cdot 10^2 x_M}{2}\right) \eta\mu 10\pi t$ (y, x σε m)

$y_M = 8 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu(50\pi x_M)\,\eta\mu(10\pi t)$ (SI)

$$y_M = 8\cdot 10^{-2}\,\sigma\upsilon\nu(50\pi x_M)\,\eta\mu(10\pi t)$$

$$t = \frac{1}{40}\ \text{sec.}$$

$$x_M = 0{,}5\ \text{cm.}$$

Γενικά έχουμε:

$$y(x,t) = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\,\eta\mu\omega t$$

$$\upsilon(x,t) = 2\omega A\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$y_M = 8\cdot 10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu(50\pi\cdot 0{,}5\cdot 10^{-2})\cdot\eta\mu\left(10\pi\cdot\frac{1}{40}\right)\Rightarrow$$

$$y_M = 8\cdot 10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{100}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$$

$$y_M = 8\cdot 10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$y_M = 8\cdot 10^{-2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y_M = 4\cdot 10^{-2}\,\text{m}$$

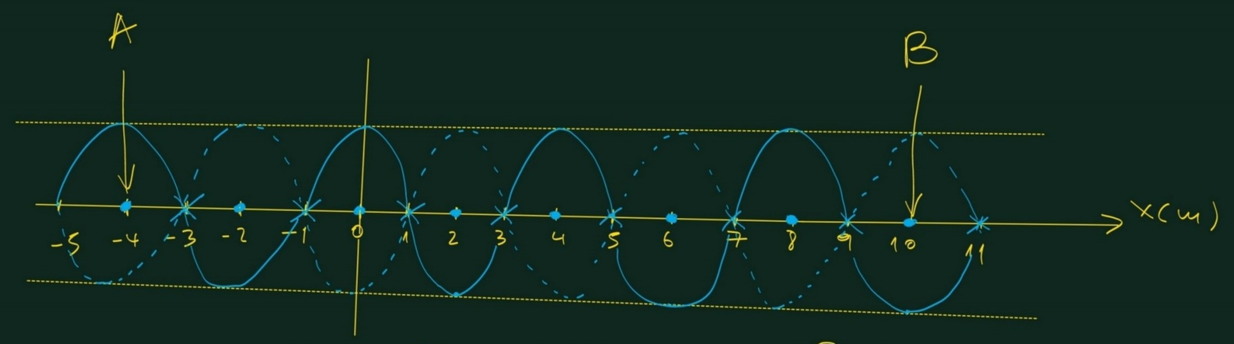
$$\upsilon_M = 10\pi\cdot 8\cdot 10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu(50\pi x_M)\cdot\sigma\upsilon\nu(10\pi t)\Rightarrow$$

$$\upsilon_M = 8\pi\cdot 10^{-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\pi\cdot 10^{-1}\Rightarrow$$

$$\upsilon_M = 0{,}4\pi\ \text{m/s.}$$

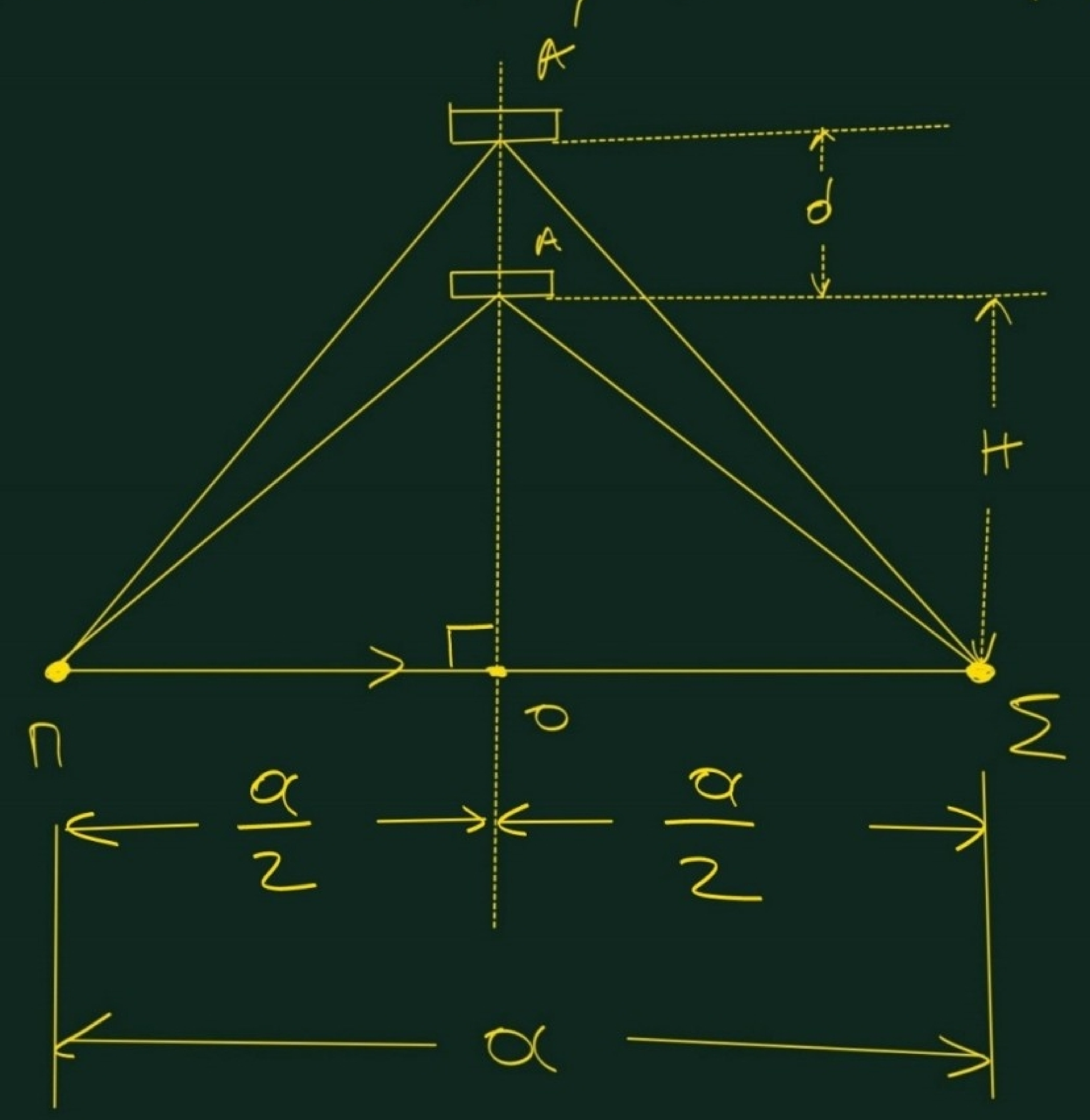
γ) $\lambda = 4\,\text{cm} \Rightarrow \frac{\lambda}{4} = 1\,\text{cm.}$

Για $x = 0$ έχουμε κοιλία.



Μεταξύ των A και B έχουμε 7 δεσμούς και 6 κοιλίες.

Ασκ. 2.47 (Συμβολή με ανακλαστήρα)



Τα κύματα βρίσκονται στην επιφάνεια ενός υγρού, οπότε έχουμε ανάκλαση σε ελεύθερο άκρο, οπότε η ανακλώμενη «ακτίνα» <u>δεν</u> έχει διαφορά φάσης 180°, άρα ισχύουν τα γνωστά περί συμβολής.

Όταν ο ανακλαστήρας είναι στο Α το Σ παραμένει ακίνητο, ενώ αν μετακινηθεί στο Α' θα εκτελέσει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος.

Άρα: $r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ (απόσβεση)

και $r_2 - r_1 = 2N \cdot \frac{\lambda}{2}$ (ενίσχυση)

Όταν ο ανακλαστήρας είναι στο Α έχουμε απόσβεση στο Σ ενώ όταν μετακινηθεί στο Α' έχουμε την αμέσως επόμενη ενίσχυση.

Το $r_1 = ΠΣ = α$.

Αν ο ανακλαστήρας βρεθεί στο Α έχουμε:

$$r_2 = ΠΑ + ΑΣ = 2ΠΑ = 2\sqrt{H^2 + \left(\frac{α}{2}\right)^2} = \sqrt{4H^2 + α^2}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε απόσβεση οπότε:

$$r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{λ}{2} \quad (1)$$ N= θετικός ακέραιος.

Αν ο ανακλαστήρας βρεθεί στο Α' έχουμε:

$$r_2' = ΠΑ' + Α'Σ = 2ΠΑ' = 2\sqrt{(H+d)^2 + \left(\frac{α}{2}\right)^2} = \sqrt{4(H+d)^2 + α^2}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε την αμέσως επόμενη ενίσχυση, οπότε:

$$r_2' - r_1 = (2N+2)\frac{λ}{2} \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$(r_2' - r_1) - (r_2 - r_1) = (2N+2)\frac{λ}{2} - (2N+1)\frac{λ}{2} \Rightarrow$$

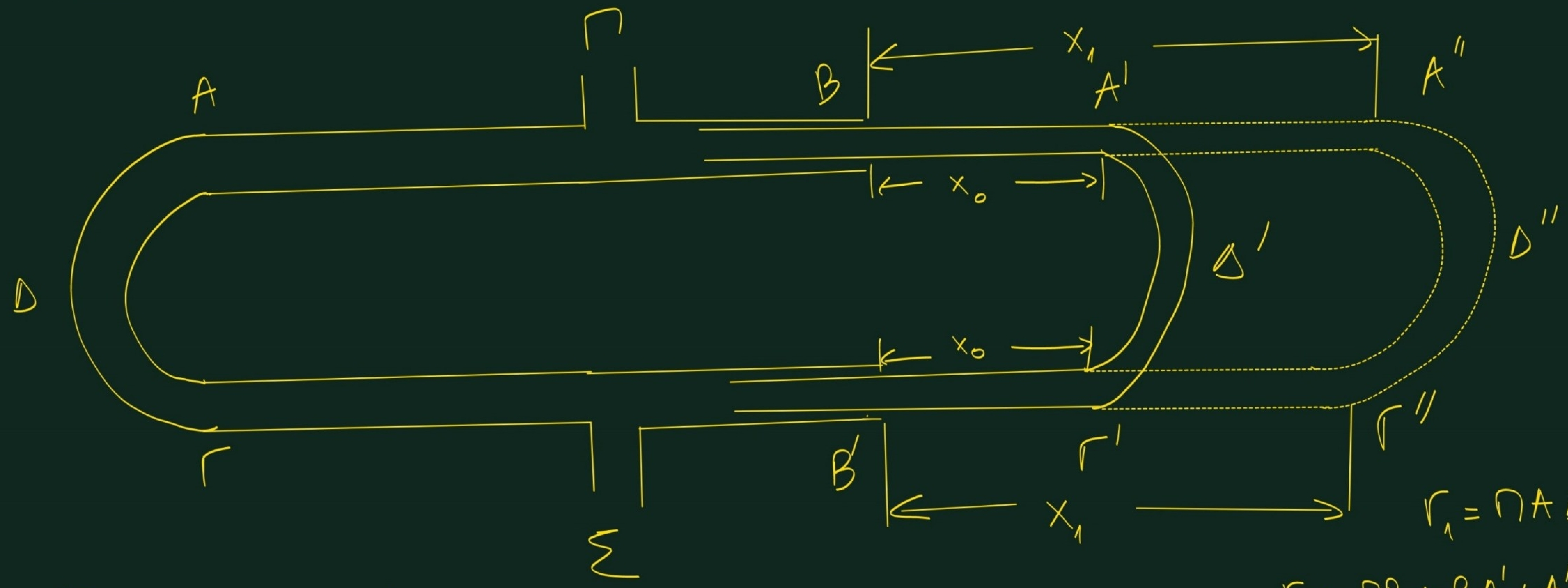
$$r_2' - r_1 - r_2 + r_1 = Nλ + λ - Nλ - \frac{λ}{2} \Rightarrow$$

$$r_2' - r_2 = \frac{λ}{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{4(H+d)^2 + α^2} - \sqrt{4H^2 + α^2} = \frac{λ}{2} \Rightarrow$$

$$λ = 2\left(\sqrt{4(H+d)^2 + α^2} - \sqrt{4H^2 + α^2}\right)$$

Άσκ. 2.51



Όταν ο μετακινούμενος σωλήνας απέχει απόσταση x_0 από το άκρο έχουμε απόσβεση.

Θέλουμε να βρούμε το x_1 ώστε να έχουμε την αμέσως επόμενη απόσβεση.

$r_1 = ΠΑΔΓΣ$

$r_2 = ΠΒ + ΒΑ' + Α'Δ'Γ' + Γ'Β' + ΣΒ'$

$\Rightarrow r_2 = 2ΠΒ + 2x_0 + Α'Δ'Γ'$

ενώ: $r_2' = ΠΒ + ΒΑ'' + Α'Δ'Γ' + Γ''Β' + Β'Σ =$

$= 2ΠΒ + 2x_1 + Α'Δ'Γ'$

$r_2 - r_1 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}$ (απόσβεση)

$r_2' - r_1 = (2N+3)\frac{\lambda}{2}$ (αυξήσεις επόμενη απόσβεση)

Αφαιρώντας έχουμε:

$r_2' - r_1 - (r_2 - r_1) = (2N+3)\frac{\lambda}{2} - (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$r_2' - \cancel{r_1} - r_2 + \cancel{r_1} = N\lambda + \frac{3\lambda}{2} - N\lambda - \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$r_2' - r_2 = \lambda \Rightarrow 2\Pi B + 2x_1 + A'\Delta'r' - (2\Pi B + 2x_0 + A'\Delta'r') = \lambda \Rightarrow$

$\lambda = 2x_1 - 2x_0 \Rightarrow$

$0{,}272 = 2x_1 - 2 \cdot 0{,}408 \Rightarrow$

$0{,}136 = x_1 - 0{,}408 \Rightarrow x_1 = 0{,}544\,m.$

$U = \lambda f \Rightarrow$

$340 = \lambda \cdot 1250 \Rightarrow$

$8 \cdot 340 = \lambda \cdot 10.000 \Rightarrow$

$\lambda = \frac{2400 + 320}{10.000} \Rightarrow$

$\lambda = \frac{2720}{10.000} = 0{,}272\,m.$

$x_0 = 0{,}408\,m$

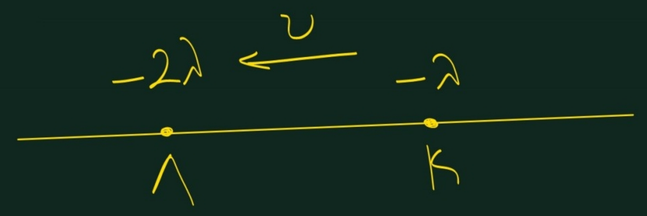
Ασκ. 5.65.

$y = 0{,}2\,\eta\mu\omega t$ (ταλάντωση πηγής)

$x_K = -\lambda$ και x_Λ

$\Delta t = 0{,}2\,sec$

α) Σε μία περίοδο έχουμε απόσταση $4A = 0{,}8\,m$.



Άρα το Κ έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση και η απόστασή τους είναι λ.

στασή τ

Άρα $x_K = -\lambda$ και $x_\Lambda = -2\lambda$

$\Delta t = T = 0{,}2\,sec$.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi\ rad/sec$.

και $d = \lambda = 0{,}4\,m$.

Άρα: $y(x,t) = A\,\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow$

$y = 0{,}2\,\eta\mu\left(10\pi t + \frac{2\pi x}{0{,}4}\right) \Rightarrow$

$y = 0{,}2\,\eta\mu(10\pi t + 5\pi x)$ (SI)

β) $\upsilon_{max} = \omega A = 10\pi \cdot 0{,}2 = 2\pi$ m/s.

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{d}{T} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2 \text{ m/s}.$$

Άρα: $\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

γ) Τη στιγμή t_2 το κύμα βρίσκεται στο Λ.

$$\Phi(x_\Lambda, t_2) = 0 \Rightarrow \omega t_2 + \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} = 0 \Rightarrow$$

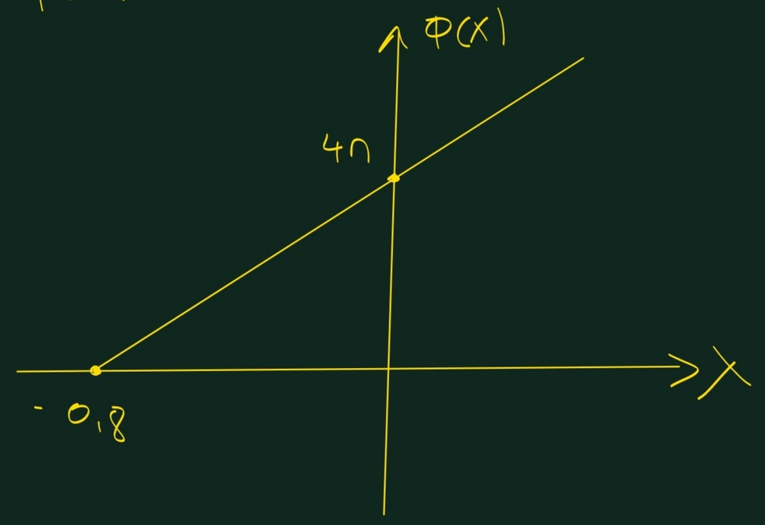
$$\omega t_2 + \frac{2\pi(-2\lambda)}{\lambda} = 0 \Rightarrow \omega t_2 = 4\pi \text{ rad}.$$

Άρα: $\Phi(x, t_2) = \omega t_2 + \frac{2\pi x}{\lambda} = 4\pi + \frac{2\pi x}{0{,}4} \Rightarrow \Phi(x) = 4\pi + 5\pi x$.

$\Phi(x) = 0 \Rightarrow 5\pi x = -4\pi \Rightarrow x = -0{,}8$ m

(δηλαδή $x = x_\Lambda = -2\lambda$)

$\Phi(0) = 4\pi$ rad



δ) $\lambda = 0,4\,m$.

$$y = A\,\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

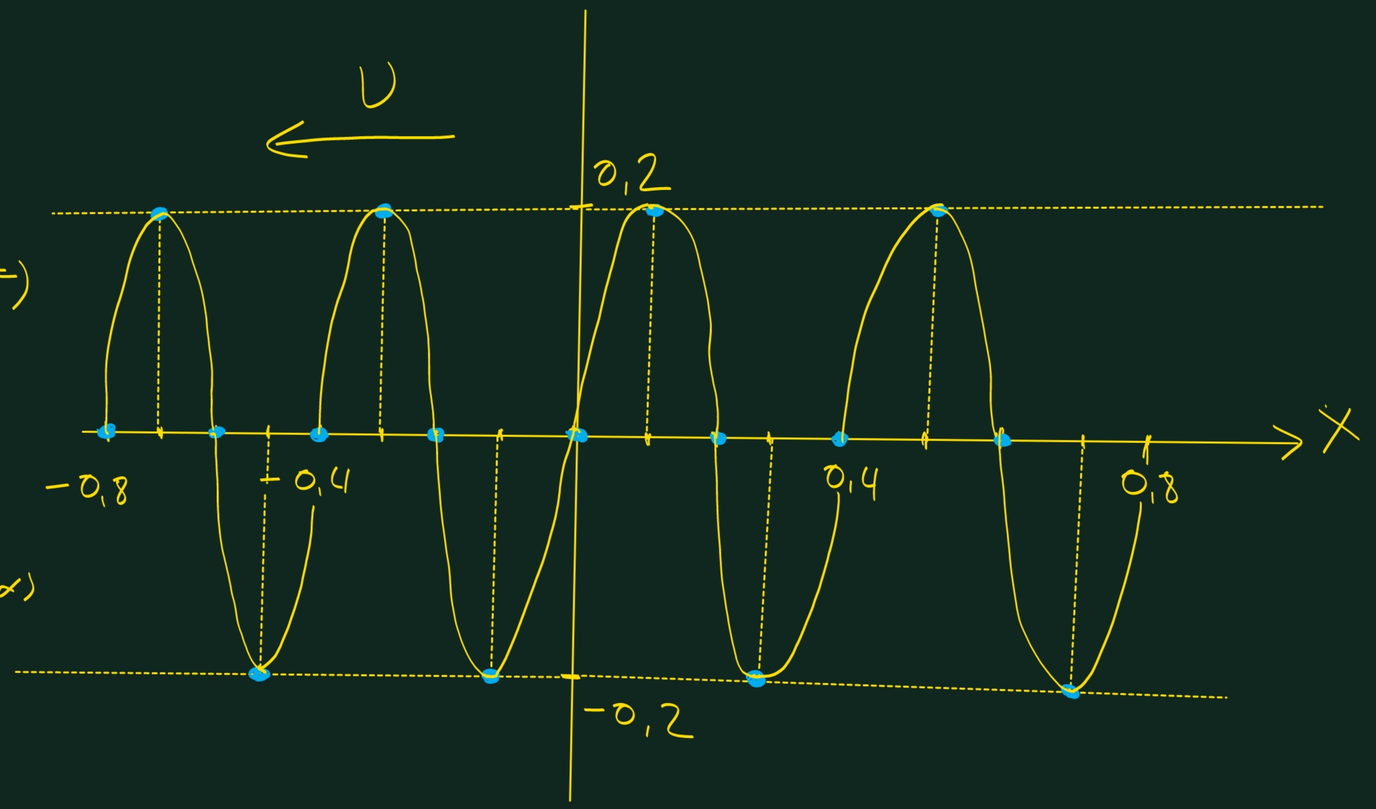
$$y(x,t_2) = 0,2\,\eta\mu\left(\omega t_2 + \frac{2\pi x}{0,4}\right) \Rightarrow$$

$$y(x,t_2) = 0,2\,\eta\mu\left(4\pi + 5\pi x\right)$$

Τη στιγμή t_2 βρίσκουμε γέκρι που έφτασε το κύμα, μηδενίζοντας τη φάση.

$$4\pi + 5\pi x_\Lambda = 0 \Rightarrow x_\Lambda = -0,8\,m.$$

$$\frac{\lambda}{4} = 0,1\,m.$$



Ασκ. 5.65.

$y = 0{,}1\,\eta\mu\,10\pi t$ (SI) (πηγής)

$r_1 = 0{,}6\,m$

$t_1 = 0{,}3\,sec$

πλάτος $0{,}1\,m$.

$t_2 = 0{,}7\,sec$.

$r_2 - r_1 = 0{,}8\,m = 2\lambda$.

Άρα έχουμε ενισχυτική συμβολή στο Ζ.

α) $U = \frac{r_1}{t_1} = \frac{0{,}6}{0{,}3} = 2\,m/s$.

$\omega = 10\pi \Rightarrow 2\pi f = 10\pi \Rightarrow$

$f = 5\,Hz$

$U = \lambda f \Rightarrow 2 = 5\lambda \Rightarrow \lambda = 0{,}4\,m$.

$U = \frac{r_2}{t_2} \Rightarrow 2 = \frac{r_2}{0{,}7} \Rightarrow r_2 = 1{,}4\,m$.

Άρα: $r_1 = 0{,}6\,m$, $r_2 = 1{,}4\,m$.

$y_2 = A\,\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow$

$y_2 = 0{,}1\,\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi \cdot 0{,}6}{0{,}4}\right) =$

$= 0{,}1\,\eta\mu(10\pi t - 3\pi)$

$y_2 = 0$ αν $0 \le t < t_1$

$y_2 = A\,\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) = 0{,}1\,\eta\mu(10\pi t - 3\pi)$ αν $t_1 \le t < t_2$

$y_2 = 2A\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} \cdot \eta\mu\left(\omega t - \frac{\pi(r_1 + r_2)}{\lambda}\right)$, αν $t \ge t_2$

$y_2 = 0{,}2\,\sigma\upsilon\nu 2\pi\,\eta\mu\left(10\pi t - \frac{\pi \cdot 2}{0{,}4}\right) \Rightarrow y_2 = 0{,}2\,\eta\mu(10\pi t - 5\pi)$

Συνολικά.

$$y_2 = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le t < 0{,}3\,\text{sec} \\ 0{,}1\,\eta\mu(10\pi t - 3\pi) & \text{αν } 0{,}3 \le t < 0{,}7 \\ 0{,}2\,\eta\mu(10\pi t - 5\pi) & \text{αν } t \ge 0{,}7\,\text{sec} \end{cases}$$

$f = 5\,\text{Hz}$ και $T = 0{,}2\,\text{sec}$.

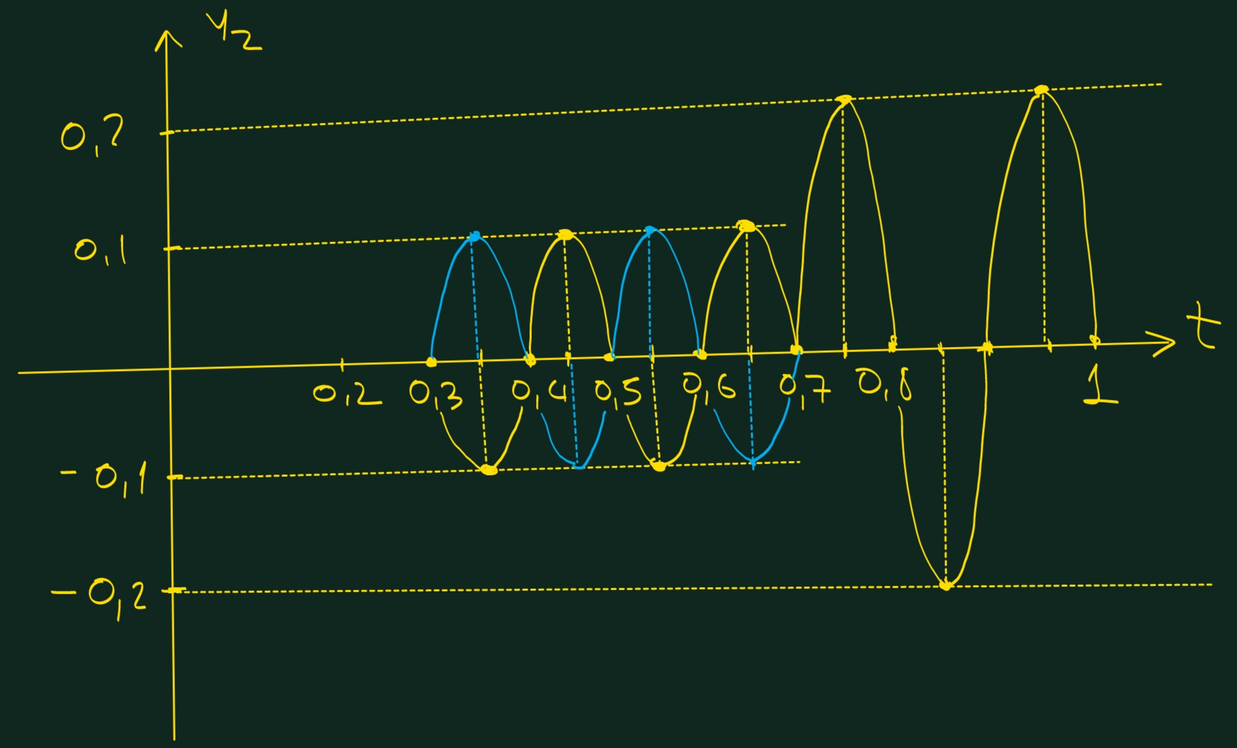
$y_2(0{,}3) = 0{,}1\,\eta\mu 3\pi = 0.$

$y_2(0{,}7) = 0{,}2\,\eta\mu(7\pi - 5\pi) = 0.$

$y_2(0{,}35) = 0{,}1\,\eta\mu 3{,}5\pi =$

$= 0{,}1\,\eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1\,\text{m}$

$y_2(0{,}75) = 0{,}2\,\eta\mu(7{,}5\pi - 5\pi) =$

$= 0{,}2\,\eta\mu(2{,}5\pi) = 0{,}2\,\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$= 0{,}2\,\eta\mu\frac{\pi}{2} = 0{,}2.$