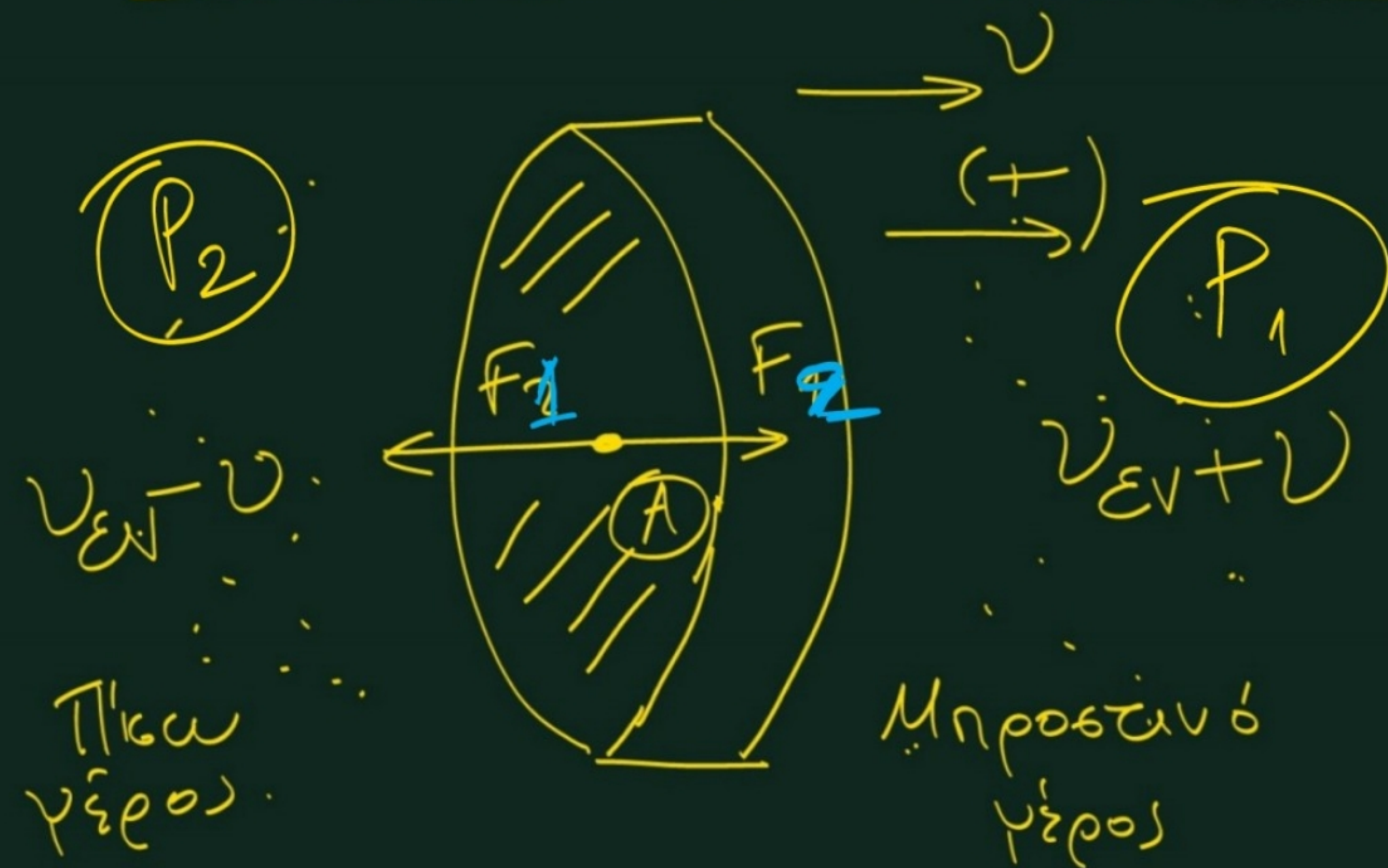


Φθίνουσες ταλαντώσεις



Η ταχύτητα των μορίων του αέρα (ενεργός) που χτυπούν την πλάκα στο μηχανικό γέρος είναι $v_{εν} + v$ ενώ στο πίσω είναι $v_{εν} - v$

$$P_1 = \frac{1}{3} \rho (v_{εν} + v)^2$$

$$P_2 = \frac{1}{3} \rho (v_{εν} - v)^2$$

$$\Sigma F = -F_1 + F_2 =$$

$$= -P_1 A + P_2 A =$$

$$= -A (P_1 - P_2) =$$

$$= -A \left(\frac{1}{3} \rho (v_{εν} + v)^2 - \frac{1}{3} \rho (v_{εν} - v)^2 \right)$$

$$= -A \cdot \frac{1}{3} \rho \left(\cancel{v_{εν}^2} + 2v_{εν}v + \cancel{v^2} - \cancel{v_{εν}^2} + 2v_{εν}v - \cancel{v^2} \right)$$

$$= -\frac{4\rho A}{3} \cdot v_{εν} \cdot v = -b \cdot v$$

$$P = \frac{1}{3} \rho v_{εν}^2$$

P = πίεση αερίου

$v_{εν}$ = ενεργός ταχύτητα μορίων αερίου

ρ = πυκνότητα αερίου

$$v_{εν} = \sqrt{\frac{3RT}{M_r}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

T = απόλυτη θερμοκρασία

k = σταθερά Boltzmann

$$k = \frac{R}{N_A}$$

N_A = αριθμός Avogadro

$$M_r = N_A \cdot m$$

Γνωστά έχουμε:

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{A_0 \cdot e^{-k\Lambda T}}{A_0 \cdot e^{-(k+1)\Lambda T}} = e^{-k\Lambda T + (k+1)\Lambda T} = e^{-k\Lambda T + k\Lambda T + \Lambda T} = e^{\Lambda T}$$

Συνεπώς:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\Lambda T}$$

Δηλαδή οι ποσότητες $A_0, A_1, A_2, \dots$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $e^{\Lambda T}$.

$\Delta A = -\Lambda A \cdot \Delta t \Rightarrow$ ↑ ποσοστό γέωσης
 $\frac{\Delta A}{A} = -\Lambda \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = -\Lambda A$ ↑ ποσοστό γέωσης

Ένας άλλος σημαντικός χρόνος είναι ο χρόνος ημιζωής, δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται να περάσει για να γεωθεί το ημί μέρος της ταλάντωσης στο γιγό.

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = A_0 \cdot e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow$$

$$\ln 1 - \ln 2 = -\Lambda T_{1/2} \cdot \ln e \Rightarrow$$

$$-\ln 2 = -\Lambda T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda} = \frac{2.303 \ln 2}{b}$$

Ασκ. 1.32 (Βιβλίου)

$$A_0 = 32 \text{ cm}$$

Τη στιγμή $t_1 = 10 \text{ sec}$

το πλάτος γίνεται $A_1 = 16 \text{ cm}$

Ποια χρονική στιγμή το

πλάτος θα γίνει 1 cm ;

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$16 = 32 \cdot e^{-\lambda \cdot 10} \Rightarrow e^{-10\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-10\lambda} = 2^{-1}$$

$$A_2 = A_0 \cdot e^{-\lambda t_2} \Rightarrow 1 = 32 \cdot e^{-\lambda t_2} \Rightarrow$$

$$e^{-\lambda t_2} = \frac{1}{32} = 2^{-5} \Rightarrow e^{-\lambda t_2} = (e^{-10\lambda})^5 \Rightarrow e^{-\lambda t_2} = e^{-10\lambda \cdot 5} \Rightarrow t_2 = 50 \text{ sec}$$

$$A_1 = \frac{A_0}{2}$$

$$A_t = 1 \text{ cm} = \frac{A_0}{32} = \frac{A_0}{2^5}$$

Αρα πρέπει να περάσουν

5 περιόδους, δηλ. 50 sec

Άσκηση

Το ηλίκτος για φθίνουσας ταλάντωσης είναι:

$$A = A_0 \cdot e^{-0,1t} \text{ (SI)}$$

Τη στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος είναι $v_1 = 2 \text{ m/s}$ και το ηλίκτος έχει μειωθεί κατά 50% σε σχέση με την αρχική του τιμή.

Την ίδια στιγμή ο ρυθμός μείωσης ενέργειας της ταλάντωσης είναι $0,08 \text{ J/s}$.

$$a) \quad \frac{\Delta E}{\Delta t} = -|F_{\text{αντ}}|v$$

$$F_{\text{αντ}} = -bv$$

$$\text{Άρα: } \frac{\Delta E}{\Delta t} = -bv^2$$

Τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$\left. \frac{\Delta E}{\Delta t} \right|_{t=t_1} = -bv_1^2 = 1$$

$$-0,08 = -b \cdot 4 = 1$$

$$b = 0,02 \text{ kg/sec}$$

$$F_{\text{αντ}} = -bv$$

$$b = -\frac{F_{\text{αντ}}}{v} = \frac{N}{\frac{m}{s}} =$$

$$= \frac{\text{kg} \cdot \frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s}} = \frac{\frac{\text{kg} \cdot m}{s^2}}{\frac{m}{s}} =$$

$$= \frac{\text{kg} \cdot m \cdot s}{m \cdot s^2} = \text{kg/sec}$$

$$b) \text{ Τη στιγμή } t_1: \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100 = -50 \Rightarrow$$

$$\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100 = -50 \Rightarrow A_1 - A_0 = -\frac{A_0}{2} \Rightarrow$$
$$A_1 = A_0/2$$

$$A = A_0 \cdot e^{-0,1t} \Rightarrow$$

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-0,1t_1} \Rightarrow$$

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-0,1t_1} \Rightarrow$$

$$-\ln 2 = -0,1t_1 \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{\ln 2}{0,1} = \frac{0,7}{0,1} = 7 \text{ sec}$$

$$\gamma) E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} D \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D A_0^2 = \frac{E_0}{4}$$

Αρα το ποσοστό μείωσης

της μηχανικής ενέργειας ταλάντωσης

είναι:

$$\frac{\Delta E}{E_0} \cdot 100 = \frac{E_1 - E_0}{E_0} \cdot 100 = \frac{\frac{E_0}{4} - E_0}{E_0} \cdot 100 =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot 100 = -75\%$$

Αρα μειώθηκε κατά 75%.

Όπως και το πλάτος, έτσι και η ενέργεια μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} D A_0^2 \cdot e^{-2\Lambda t} \Rightarrow$$

$$E = E_0 \cdot e^{-2\Lambda t}$$

Αν $t = \kappa T$ τότε:

$$E_\kappa = E_0 \cdot e^{-2\kappa \Lambda T}$$

$$E_1 = E_0 \cdot e^{-2\Lambda T} \Rightarrow \frac{E_0}{E_1} = e^{2\Lambda T}$$

$$\text{Ανάλυση: } \frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \dots = \frac{E_\kappa}{E_{\kappa+1}} = e^{2\Lambda T}$$

Άρα και οι διαδοχικές ενέργειες είναι όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $e^{2\Lambda T}$!

Αν $t = \kappa T_{1/2}$ τότε:

$$E_\kappa = E_0 \cdot e^{-2\kappa \Lambda T_{1/2}} \Rightarrow$$

$$E_\kappa = E_0 \left(e^{-\Lambda T_{1/2}} \right)^{2\kappa} = \frac{E_0}{2^{2\kappa}}$$

$$\text{Άρα: } \frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \dots = \frac{E_\kappa}{E_{\kappa+1}} = 4$$

$$\begin{aligned} \text{για το πλάτος: } A_\kappa &= A_0 \cdot e^{-\Lambda T_{1/2} \kappa} = A_0 \cdot \left(e^{-\Lambda T_{1/2}} \right)^\kappa = \\ &= A_0 \cdot (2^{-1})^\kappa \Rightarrow A_\kappa = \frac{A_0}{2^\kappa} \end{aligned}$$

