

Ασκ. 7.127

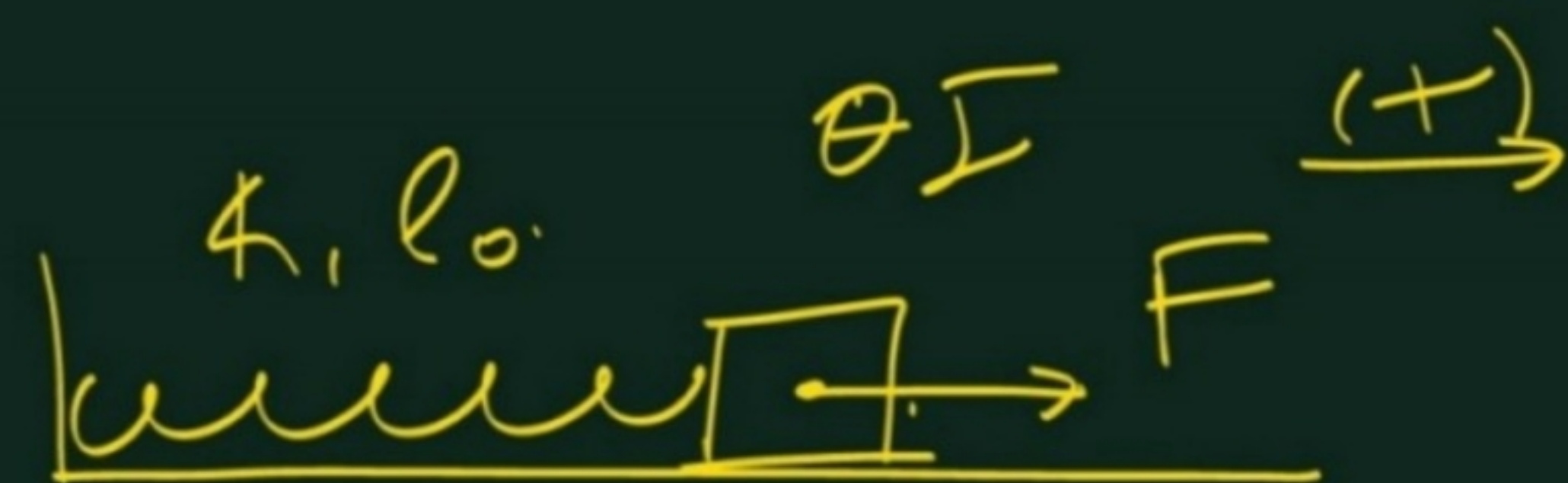
Το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι ίσο με τη μεταβολή της ενέργειας της ταλάντωσης.

Δηλαδή: $W_{F_{εξ}} = \Delta E =$

$$W_{F_{εξ}} = E_{τελ} - E_{αρχ}$$

Αν $E_{αρχ} = 0$

και $E_{τελ} = E$ τότε: $W_{F_{εξ}} = E$



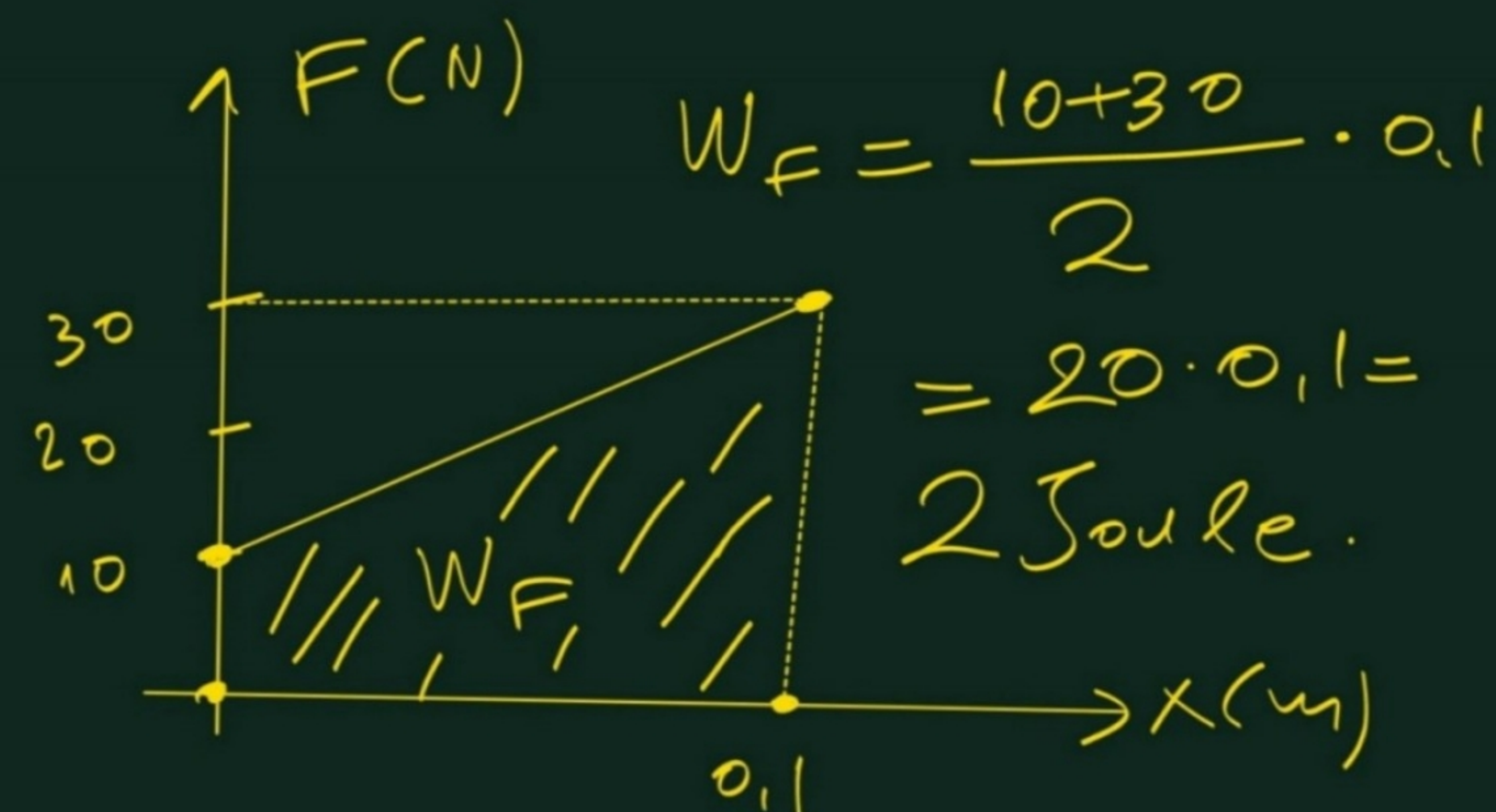
α) Αρχικά το σώμα βρίσκεται στη ΘΙ.

$$F = 10 + 200x$$

$$F(0) = 10 \text{ N}$$

$$F(0,1) = 10 + 200 \cdot 0,1 =$$

$$F(0,1) = 30 \text{ N}$$



$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)} \Rightarrow$$

$$W_{F_{ελ}} = 0 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$W_{F_{ελ}} = -\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,01 = -1 \text{ J.}$$

Το έργο της F επιφέρει τη μεταβολή της ενέργειας της ταλάντωσης ενώ το έργο της $F_{ελ}$ είναι: $W_{F_{ελ}} = -\Delta U$
 Δηλαδή $|W_{F_{ελ}}| = \Delta U =$ μεταβολή δυναμικής ενέργειας ελατηρίου

Απόδειξη ότι ένα σώμα
επιτελεί απλή αρμονική
ταλάντωση (αατ ή στατ)

Για να αποδείξουμε ότι ένα
σώμα επιτελεί αατ ακολουθούμε
για διαδικασία δύο βημάτων.

1^ο βήμα: Ξεμαθαρίζουμε το σώμα
στη θέση ισορροπίας και αετολίζουμε
σε μία εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί
στο 2^ο βήμα.

2^ο βήμα: Επιτρέπουμε το σώμα από τη ΘΙ
πάρνοντας ως θετική τη φορά επιρροής
και υπολογίζουμε τη συνισταμένη, που είναι η δύναμη

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

επαναφοράς:

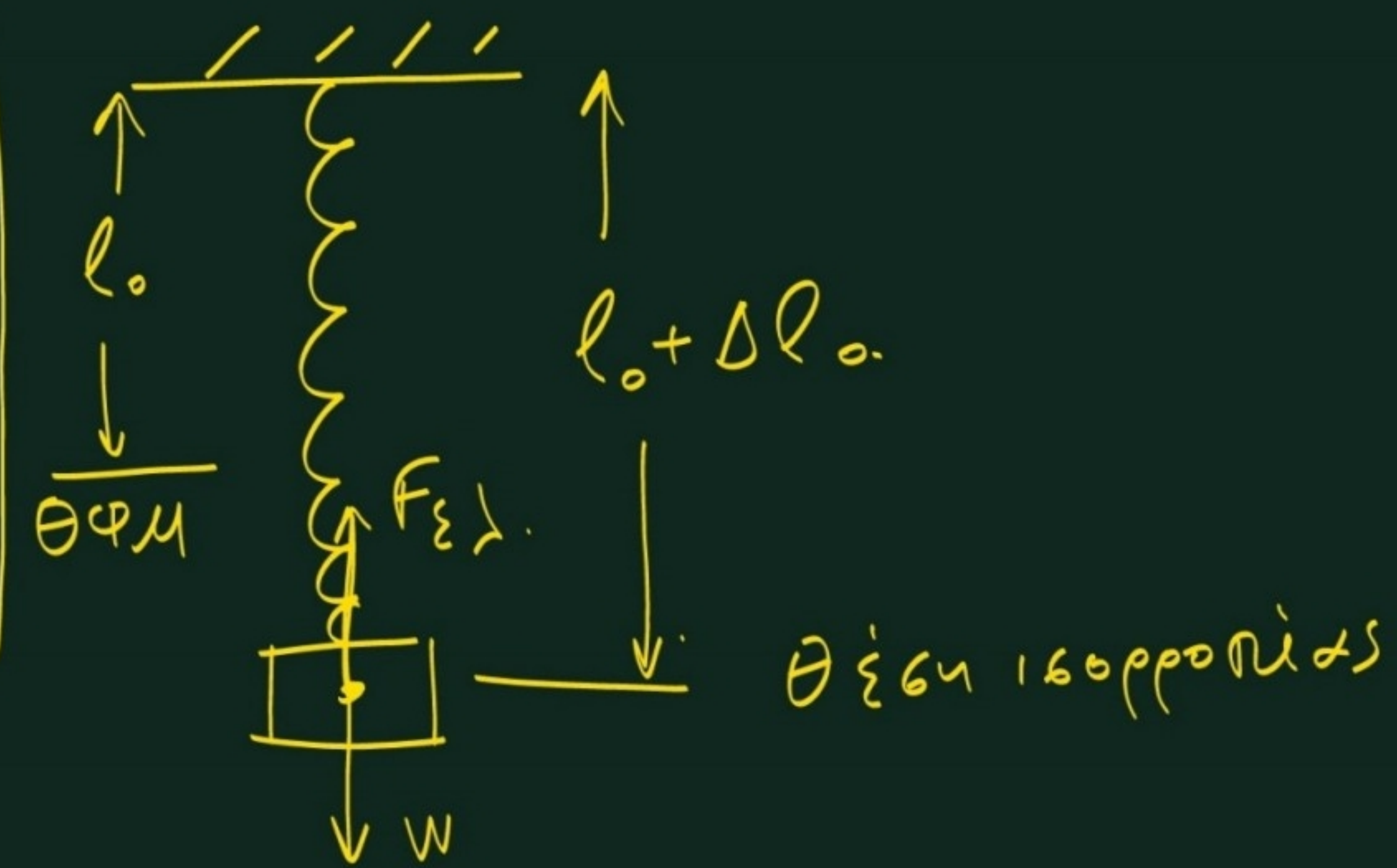
$$\Sigma F = F_{\text{επα}} = -Dx$$

και από εκεί
βρίσκουμε τη
σταθερά επαναφοράς

D

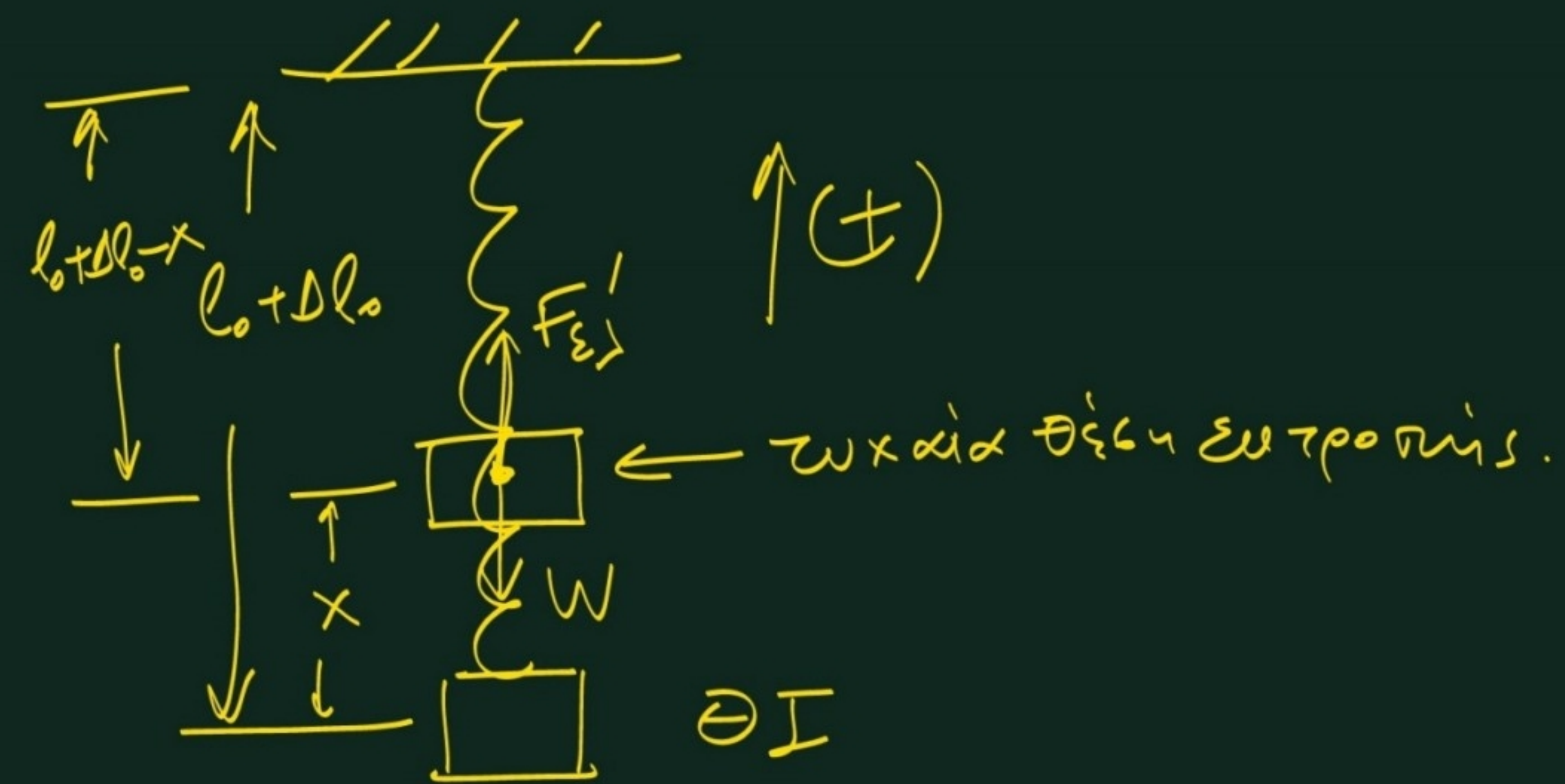
Παράδειγμα

Σώμα σε κατακόρυφο ελατήριο.



1^ο βήμα: Στη ΘΙ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = W \Rightarrow k \cdot \Delta l_0 = mg$$



2^ο Θύρα:

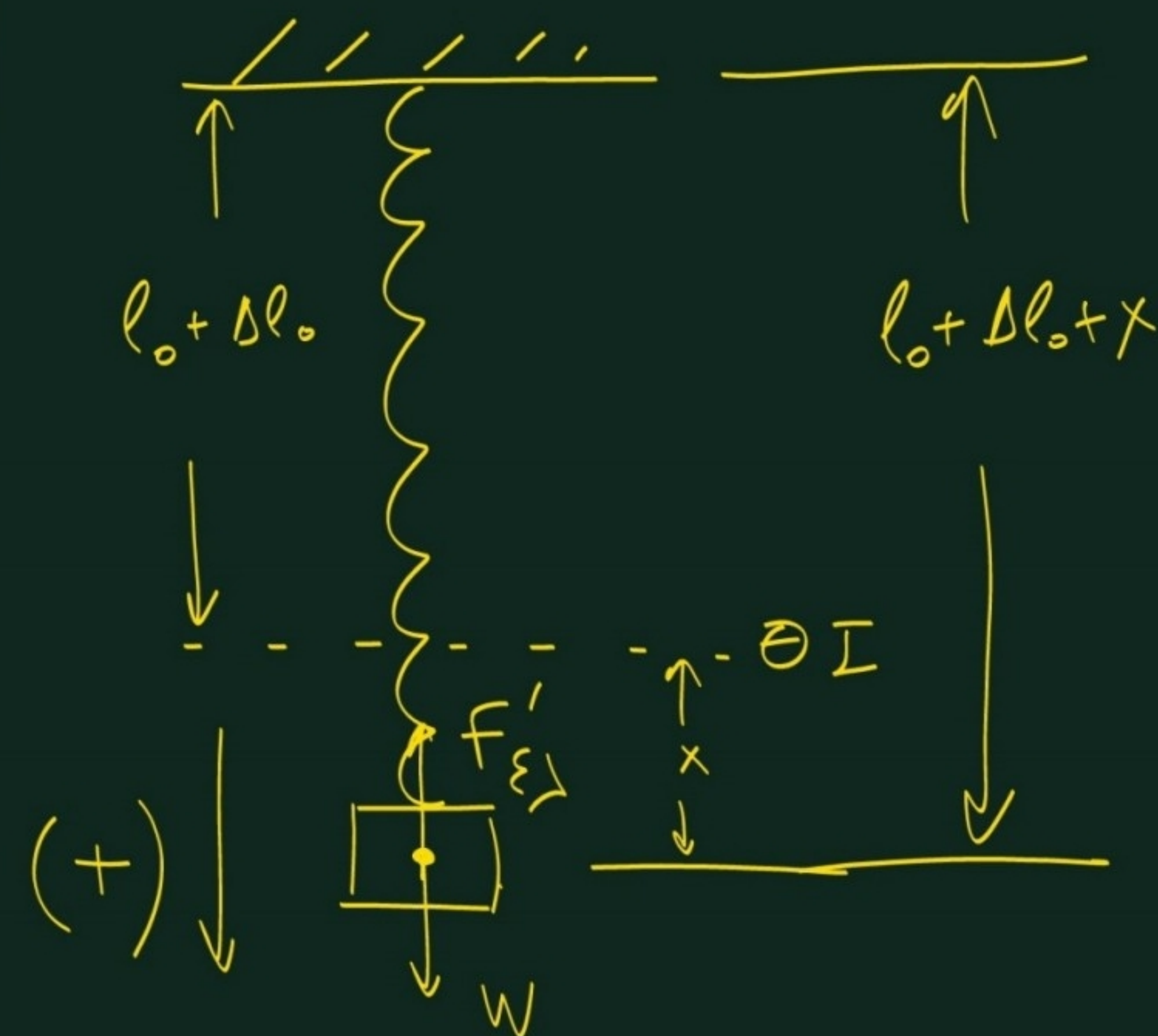
Συνω και α θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = F_{ελ}' - W \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k(\Delta l_0 - x) - mg \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k \cdot \Delta l_0 - kx - mg \Rightarrow \Sigma F = -kx$$

Αρα η συνω και α θέση ισορροπίας είναι α.α.ζ με $D = k$.



Συνω και α θέση:

$$\Sigma F = W - F_{ελ}' \Rightarrow$$

$$\Sigma F = mg - k(\Delta l_0 + x) \Rightarrow$$

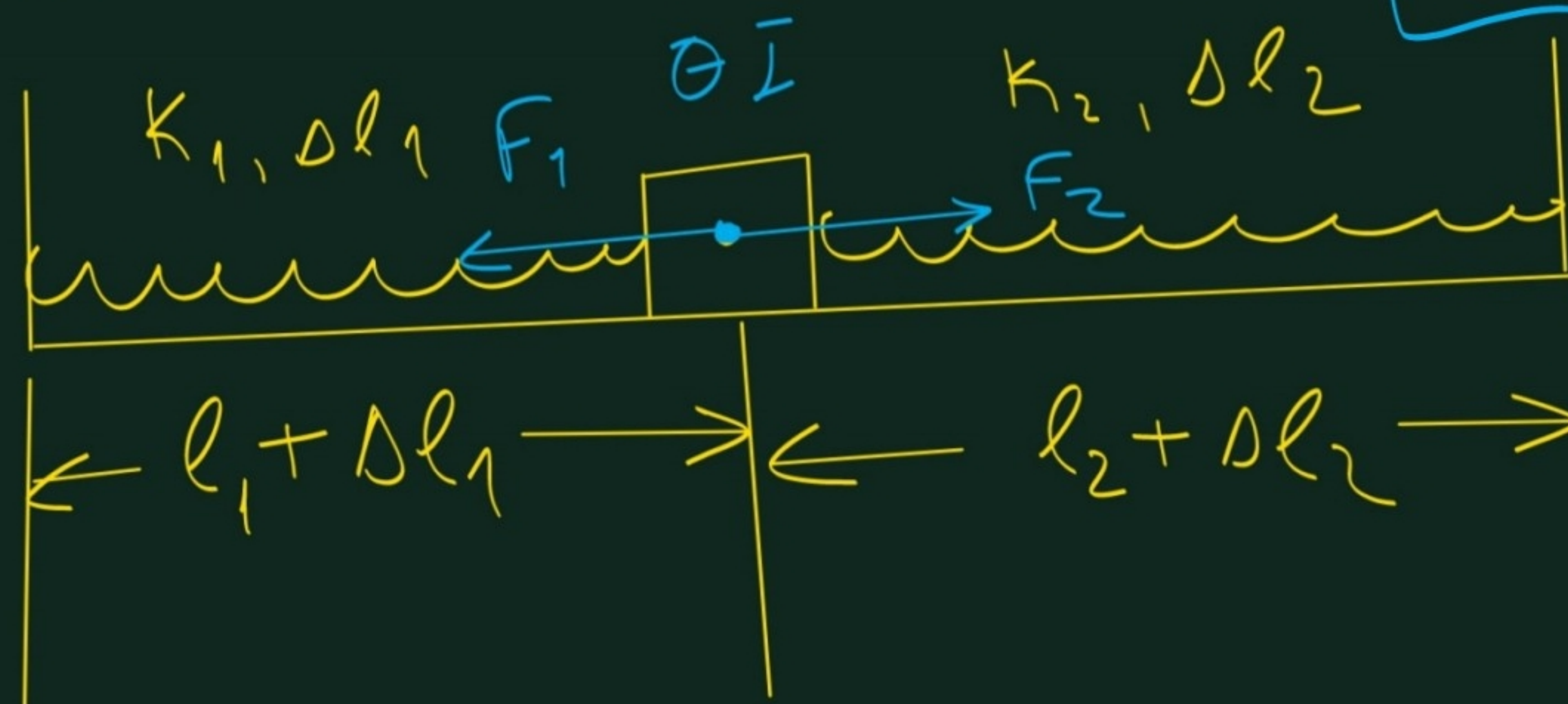
$$\Sigma F = \cancel{mg} - \cancel{k \cdot \Delta l_0} - kx \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -kx$$

Αβυ. 1.27)

Σώμα ανάγεια σε δύο οριζόντια ελατήρια.

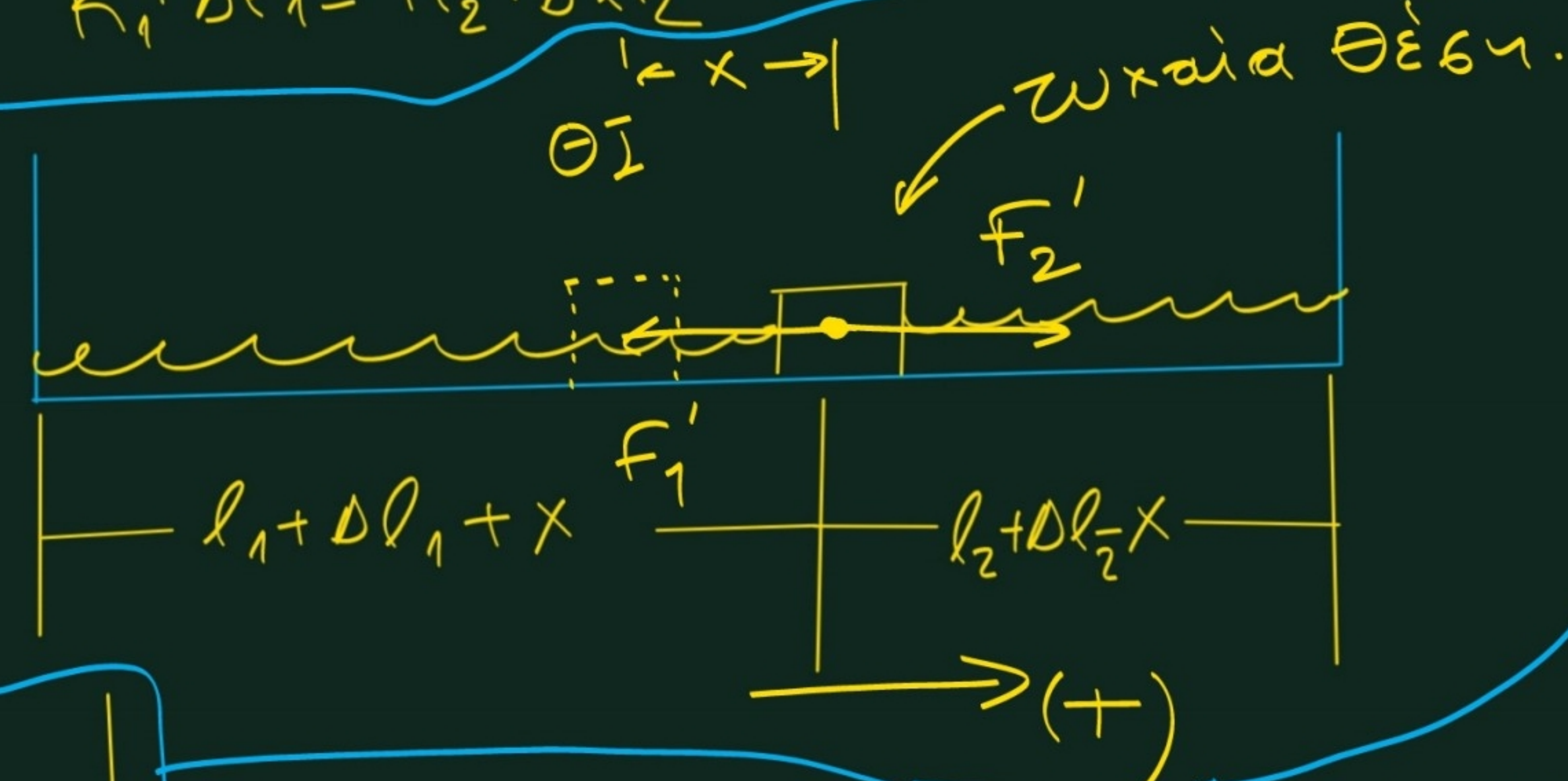
Για να ισορροπεί το σώμα, θα πρέπει τα ελατήρια να είναι και τα δύο επενυπυγμένα ή και τα δύο συσπειρωμένα. Έστω ότι είναι επενυπυγμένα.



1^ο βήμα: Στις ΘΙ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow$$

$$K_1 \cdot \Delta l_1 = K_2 \cdot \Delta l_2$$



2^ο βήμα: Στις ωκεία θέση έχουμε:

$$\Sigma F = F_2' - F_1' = K_2(\Delta l_2 - x) - K_1(\Delta l_1 + x) =$$

$$= K_2 \Delta l_2 - K_2 x - K_1 \Delta l_1 - K_1 x \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -(K_1 + K_2)x$$

Άρα η κίνηση είναι α.α.τ
με σταθερά επαναφοράς

$$D = K_1 + K_2 = 120 + 80 = 200 \text{ N/m}$$

$$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{200}} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow$$

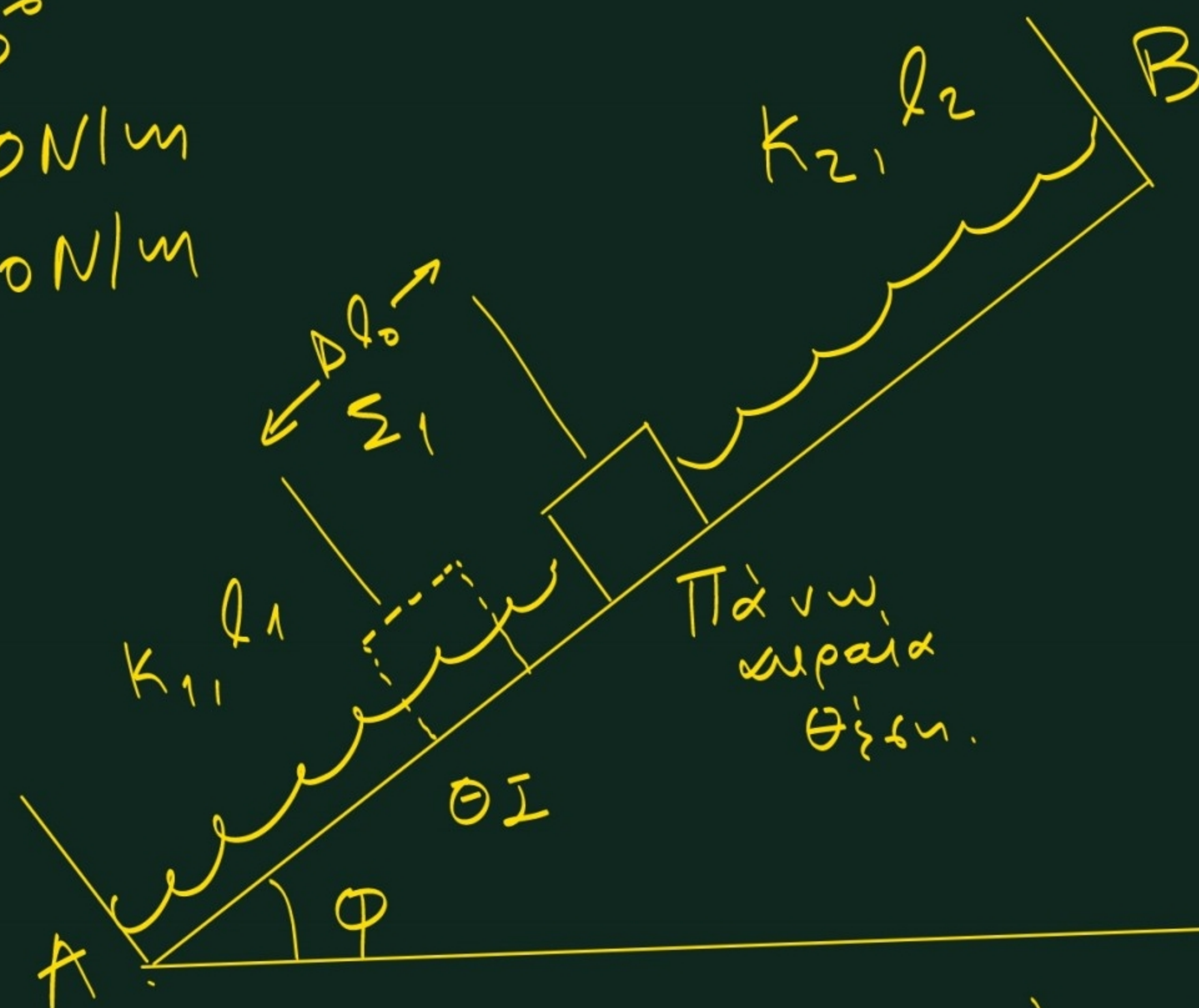
$$T = 0,2\pi \text{ sec}$$

Θέμα Δ | 2012

$$\varphi = 30^\circ$$

$$K_1 = 60 \text{ N/m}$$

$$K_2 = 140 \text{ N/m}$$



Δ1] Ανάλυση ταλάντωσης.

1ο βήμα (θέση ισορροπίας)

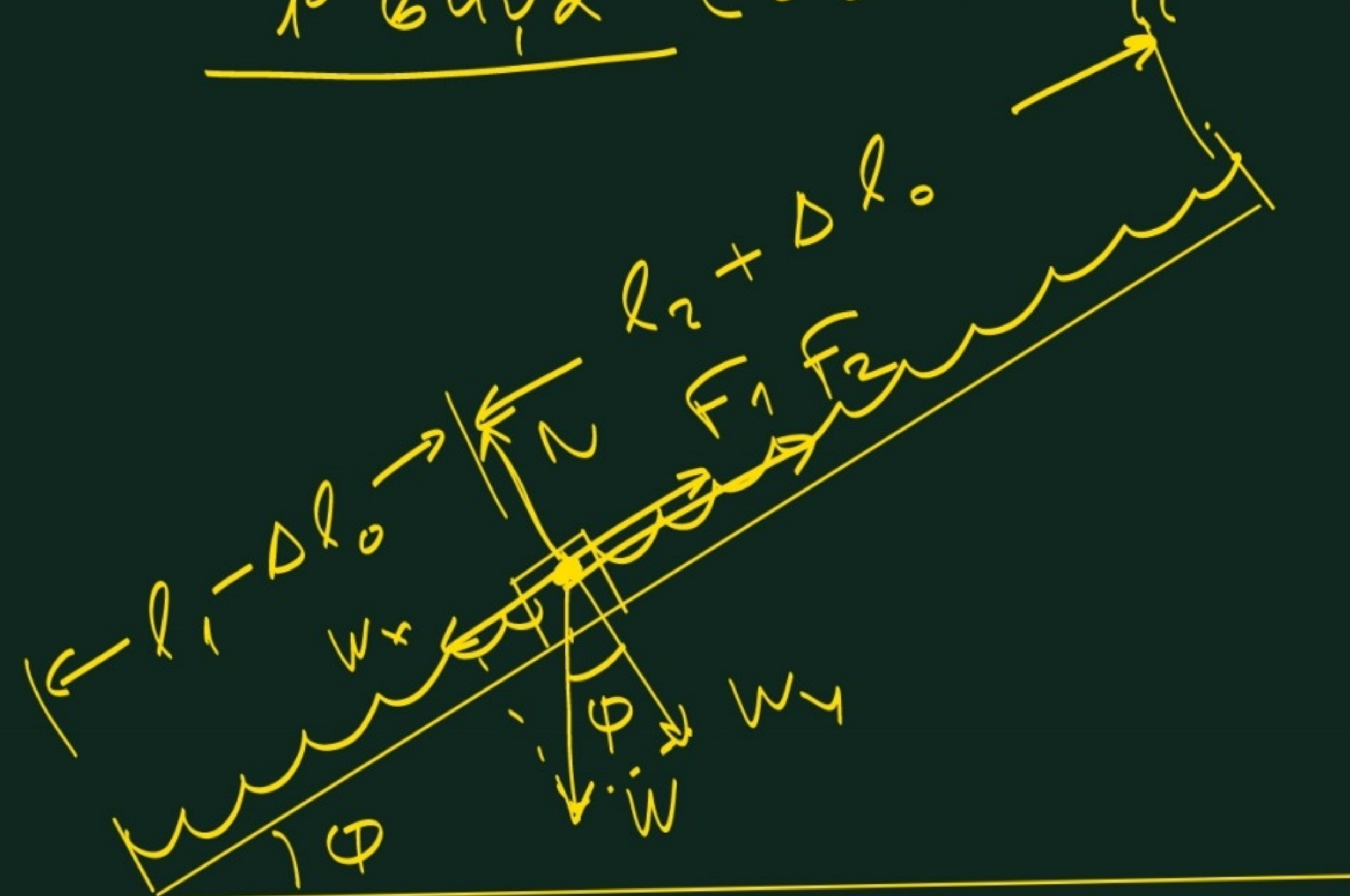
Στη ΘΙ έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$W_x - F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow$$

$$W_x = F_1 + F_2 \Rightarrow$$

$$W_x = K_1 \cdot \Delta l_0 + K_2 \cdot \Delta l_0.$$



2ο βήμα. Στην τυχούσα θέση

έχουμε:

$$\Sigma F = F_1' + F_2' - W_x =$$

$$\Sigma F = K_1(\Delta l_0 - x) + K_2(\Delta l_0 - x) - W_x \Rightarrow$$

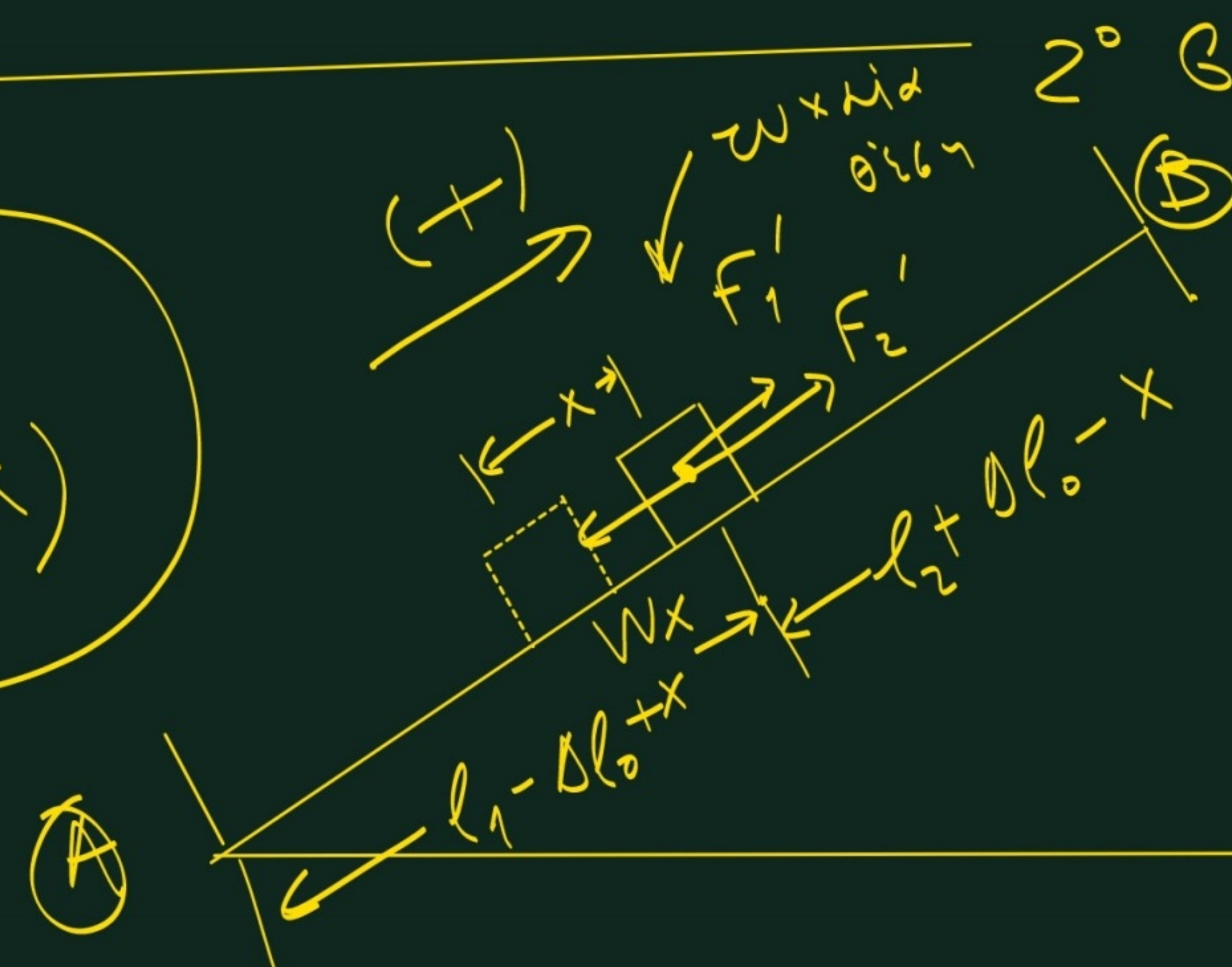
$$\Sigma F = \cancel{K_1 \Delta l_0} - K_1 x + \cancel{K_2 \Delta l_0} - K_2 x - \cancel{W_x} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -(K_1 + K_2)x$$

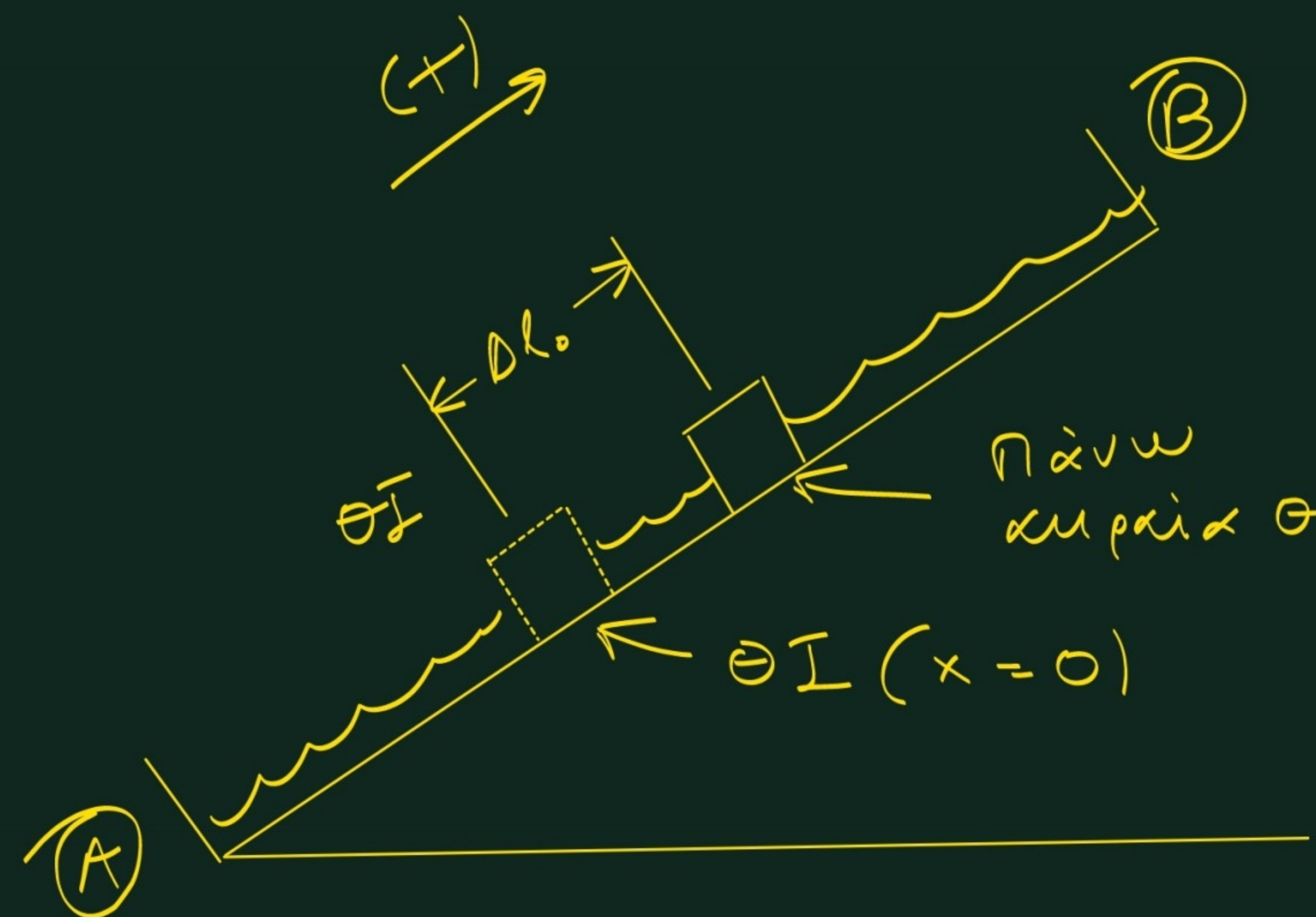
Άρα συνολικά είναι αατ με
D = K₁ + K₂

$$l_1 - \Delta l_0 + x = l_1 - (\Delta l_0 - x)$$

$$l_2 + \Delta l_0 - x = l_2 + (\Delta l_0 - x)$$



D2.)



Το αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα
από την πάνω κυρία θέση

$$D = k_1 + k_2 = 200 \text{ N/m}$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0}$$

$$+A = A \sin \varphi_0 \Rightarrow \sin \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$A = \Delta l_0$$

$$mg \sin \varphi = (k_1 + k_2) \Delta l_0 \Rightarrow$$

$$\Delta l_0 = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{200} = 0,05 \text{ m} = A$$

$$\text{Άρα: } x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x = 0,05 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

Δ4) Το Σ_2 εκτελεί ταλάντωση λόγω της στατικής τριβής T μεταξύ των δύο σωμάτων.

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \Rightarrow T = -D_2 x \Rightarrow$$

$$T = -m_2 \omega'^2 x + m_2 g \mu \varphi$$

Το νέο πλάτος ταλάντωσης είναι

$$A' = \Delta l_1 \text{ για το οποίο:}$$

$$F_1 + F_2 = W_{\text{ολ},x} \Rightarrow K_1 \Delta l_1 + K_2 \Delta l_1 = (m_1 + m_2) g \mu \varphi =$$

$$\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) g \mu \varphi}{K_1 + K_2} = \frac{8 \cdot 10^{\frac{1}{2}}}{200} = 0,2 \text{ m} \Rightarrow$$

$$A' = 0,2 \text{ m}$$

$$D_2 = m_2 \omega'^2$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{200}{8}} = \sqrt{25} \Rightarrow$$

$$\omega' = 5 \text{ rad/sec}$$

~~$$\text{Αρα: } T = -D_2 A' \cdot \mu \varphi \left(\omega' t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$~~

~~$$T = -6 \cdot 25 \cdot 0,2 \mu \varphi \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$~~

~~$$\Rightarrow T = -30 \mu \varphi \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$~~

~~$$|T|_{\text{max}} = 30 \text{ N}$$~~

$$m_2 g \sin \theta = N_2 =$$

$$6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = N_2 \Rightarrow N_2 = 30\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\Sigma F_2 = T - m_2 g \sin \theta =$$

$$- D_2 X = T - m_2 g \sin \theta =$$

$$T = m_2 g \sin \theta - m_2 \omega'^2 A \sin\left(\omega' t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$T = 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 25 \cdot 0,2 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$T = 30 - 30 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow T_{\max} = 30 - 30(-1) = 60 \text{ N (μάκρως ασφαλά)}$$

Εν αλλ' εκταύτ, υπορούγε να γράψουγεόει:

$$T = m_2 g \sin \theta - D x, \quad x \in [-A', A']$$

οπότε

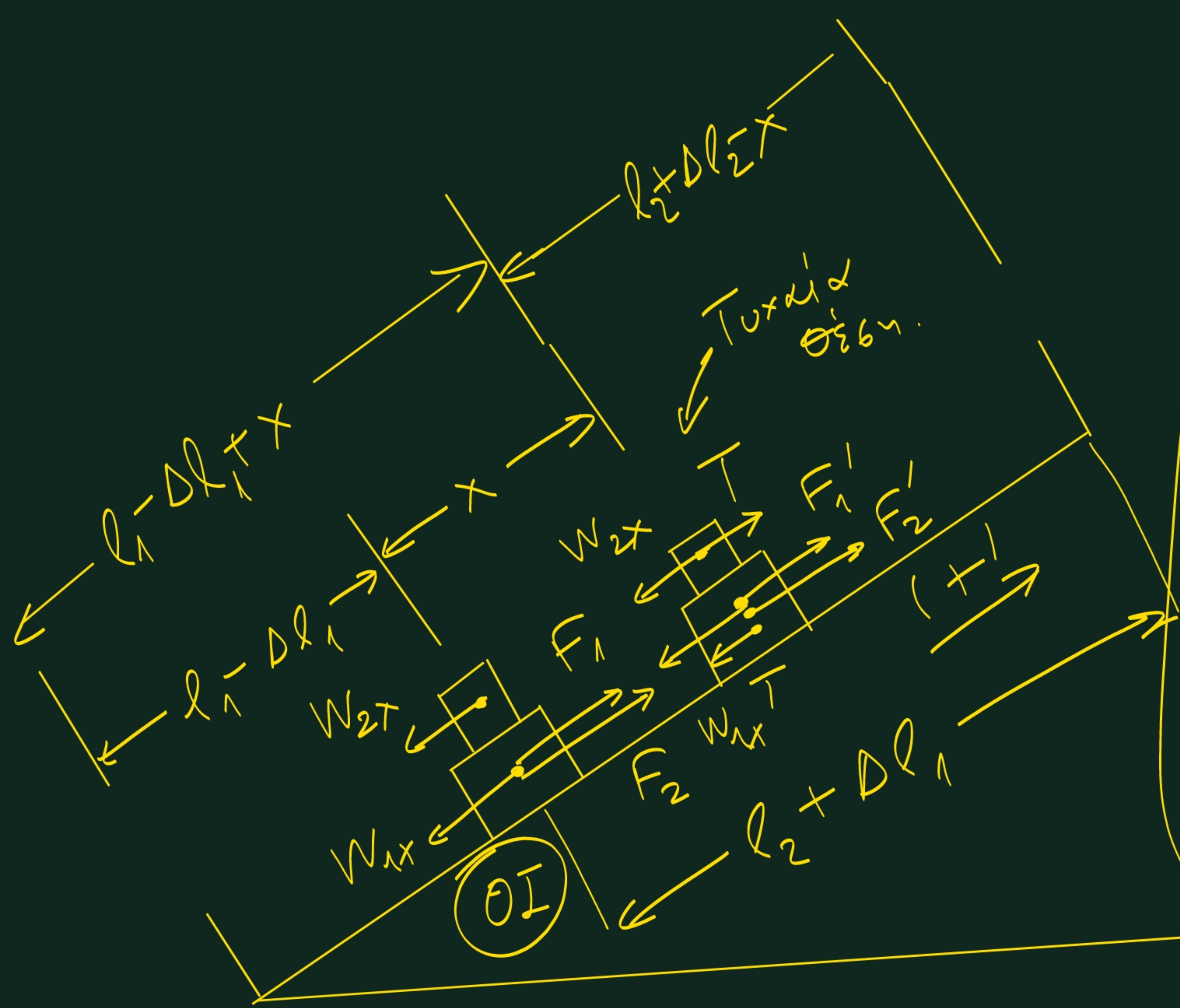
$$T_{\max} = m_2 g \sin \theta + D A' \quad (\gamma\iota\alpha \quad x = -A')$$

Σηλ' αλλ' σενυ μάκρως
αμπαία θ'έγει)

$$T_{\max} \leq \mu N_2 \Rightarrow 60 \leq \mu m_2 g \sin \theta \Rightarrow$$

$$60 \leq \mu \cdot 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu \geq \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Άρα: } \mu_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



Στη ΘI έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W_{1x} + W_{2x} = F_1 + F_2 = K_1 \Delta l_1 + K_2 \Delta l_1$$

Στις μηχανές έχουμε επίσης:

$$\Sigma F_1 = F_1' + F_2' - T - W_{1x} = 0$$

$$-D_1 x = K_1(\Delta l_1 - x) + K_2(\Delta l_2 - x) - T - W_{1x} \quad (1)$$

$$\Sigma F_2 = T - W_{2x} = 0$$

$$-D_2 x = T - W_{2x} \quad (2)$$

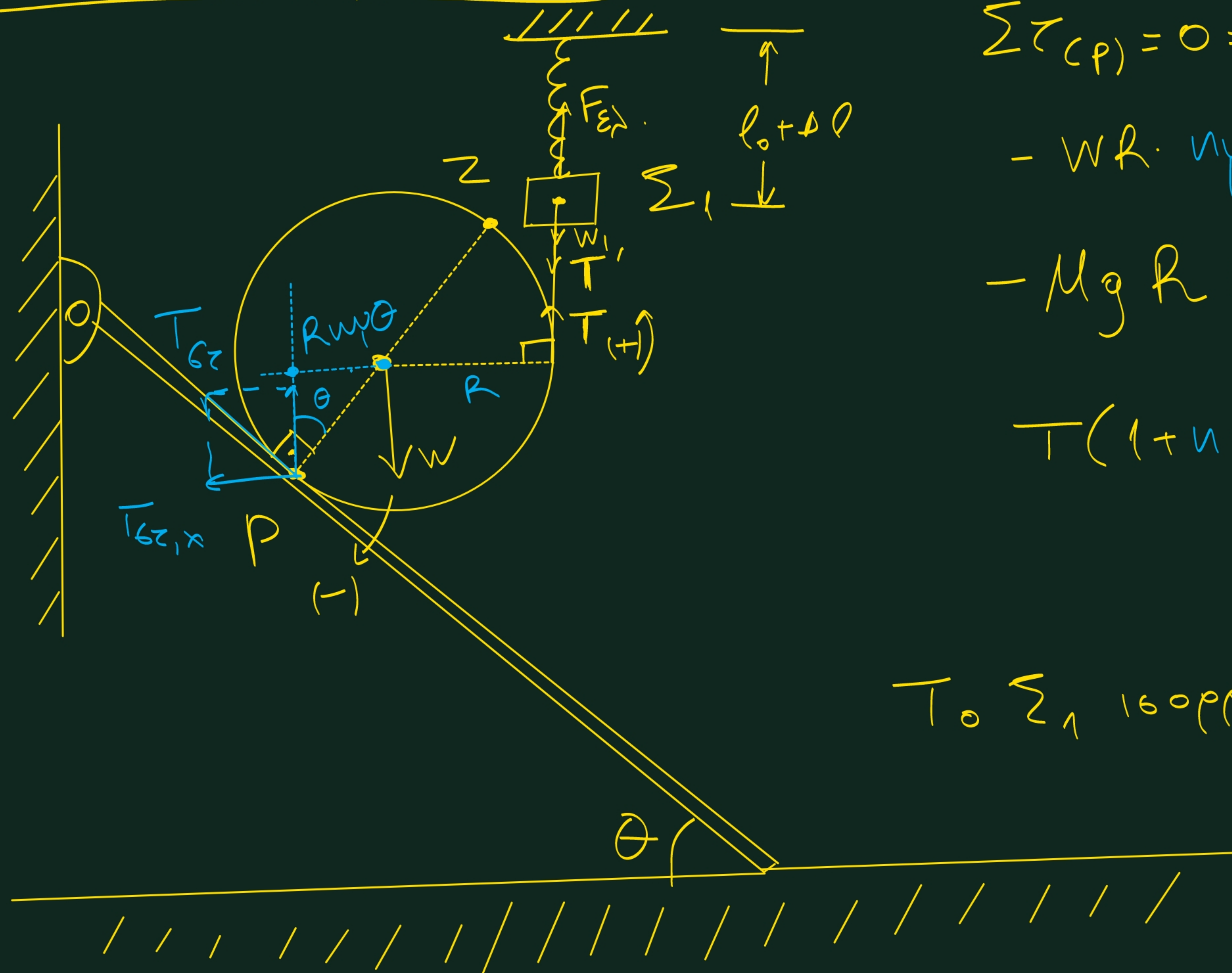
Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$-D_1 x - D_2 x = K_1 \Delta l_1 - K_1 x + K_2 \Delta l_2 - K_2 x - W_{1x} - W_{2x} \Rightarrow$$

$$-(D_1 + D_2)x = -(K_1 + K_2)x + K_1 \Delta l_1 + K_2 \Delta l_2 - W_{1x} - W_{2x} \Rightarrow$$

$$D_1 + D_2 = K_1 + K_2$$

ΘΕΜΑ Δ | 2025



Δ1.) Ο δίσκος ισορροπεί, οπότε:

$$\sum \tau_{(P)} = 0 \Rightarrow \tau_W(P) + \tau_T(P) = 0 \Rightarrow$$

$$-WR \cdot \sin \theta + T \cdot (R + R \sin \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$-MgR \sin \theta + TR(1 + \sin \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$T(1 + \sin \theta) = Mg \quad \theta \Rightarrow T \cdot 1,6 = 4 \cdot 10 \cdot 0,8 \Rightarrow$$

$$T = \frac{40 \cdot 0,8}{1,6} = \frac{24}{1,6} = \frac{6}{0,4} = 15 \text{ N}$$

Το Σ_1 ισορροπεί, οπότε:

$$T' + W_1 = F_{el} \Rightarrow T + m_1 g = k \cdot \Delta \ell \Rightarrow$$

$$15 + 15 = 60 \cdot \Delta \ell \Rightarrow 30 = 60 \Delta \ell \Rightarrow \Delta \ell = 0,5 \text{ m}$$