

Ασκ. 7.127

Το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι ίσο με τη μεταβολή της ενέργειας της ταλάντωσης.

Δηλαδή: $W_{F_{εξ}} = \Delta E =$

$$W_{F_{εξ}} = E_{τελ} - E_{αρχ}$$

Αν $E_{αρχ} = 0$

και $E_{τελ} = E$ τότε: $W_{F_{εξ}} = E$



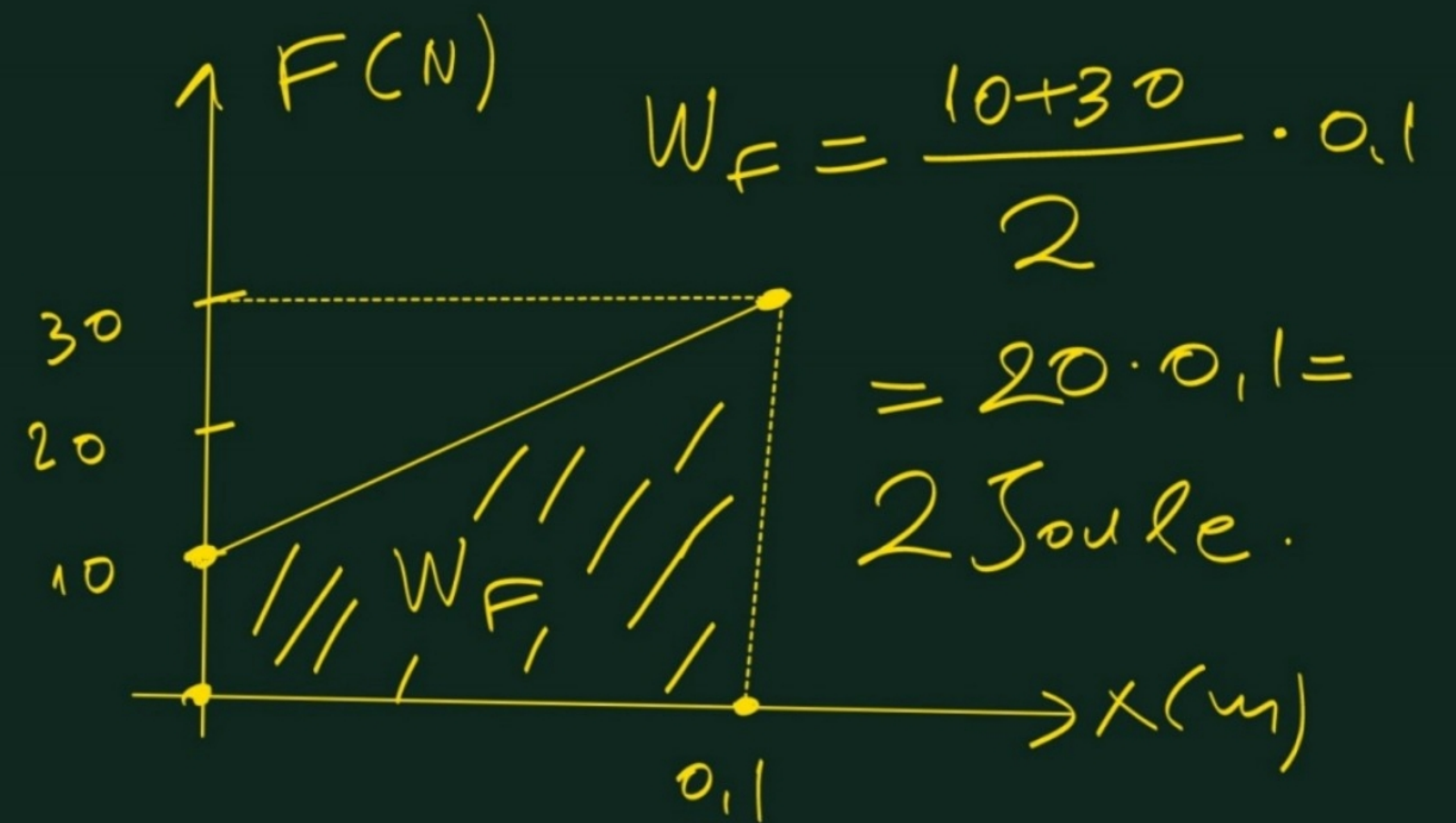
α) Αρχικά το σώμα βρίσκεται στη ΘΙ.

$$F = 10 + 200x$$

$$F(0) = 10 \text{ N}$$

$$F(0,1) = 10 + 200 \cdot 0,1 (=)$$

$$F(0,1) = 30 \text{ N}$$



$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ(αρχ)} - U_{ελ(τελ)} \Rightarrow$$

$$W_{F_{ελ}} = 0 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$W_{F_{ελ}} = -\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,01 = -1 \text{ J.}$$

Το έργο της F επιβάλλει τη μεταβολή της ενέργειας της ταλάντωσης ενώ το έργο της $F_{ελ}$ είναι: $W_{F_{ελ}} = -\Delta U$
 Δηλαδή $|W_{F_{ελ}}| = \Delta U =$ μεταβολή δυναμικής ενέργειας ελατηρίου

β) Γενικά από το ΘΜΚΕ

(απόδοξή) αυτού που είναι στο α).

γ) έχουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{F_{\varepsilon\zeta}} + W_{F_{\varepsilon\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{F_{\varepsilon\zeta}} + U_{\varepsilon\lambda}(\alpha\rho\chi) - U_{\varepsilon\lambda}(\tau\varepsilon\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{F_{\varepsilon\zeta}} + \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 = W_{F_{\varepsilon\zeta}} + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\lambda} = W_{F_{\varepsilon\zeta}} + E_{\alpha\rho\chi}$$

$$\text{Αρ.α: } W_{F_{\varepsilon\zeta}} = E \Rightarrow$$

$$W_{F_{\varepsilon\zeta}} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 200 A^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{2}{100} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ m.}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

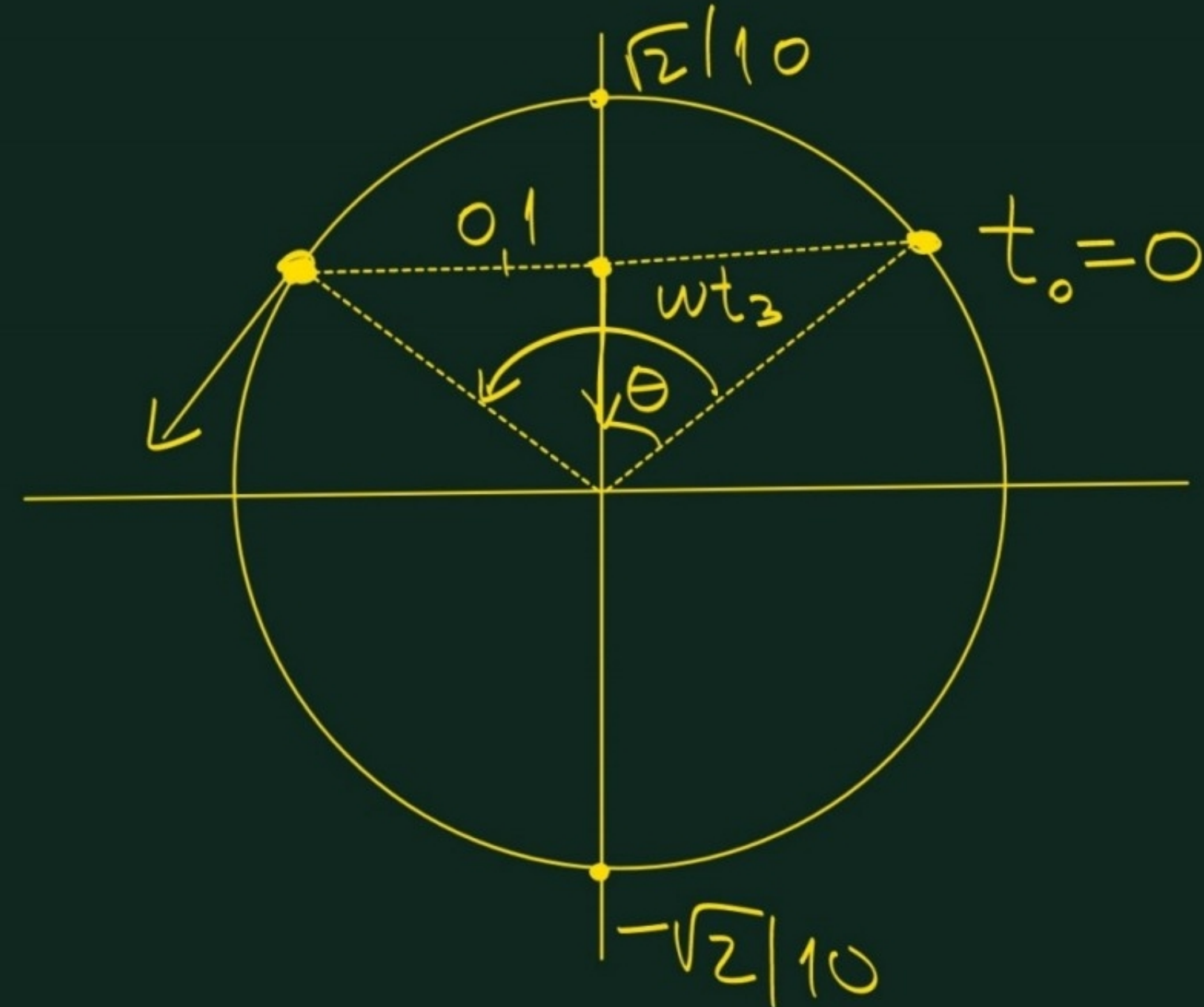
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,01 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot \frac{2}{100} \Rightarrow$$

$$v_1^2 + 1 = 2 \Rightarrow v_1^2 = 1 \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s.}$$

ii) Για τη στιγμή t_3 έχουμε:

$$\omega t_3 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_3 = \sqrt{\frac{200}{2}} \cdot \frac{\pi}{20} =$$

$$= 10 \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



$$\omega t_3 = \frac{\pi}{2}$$

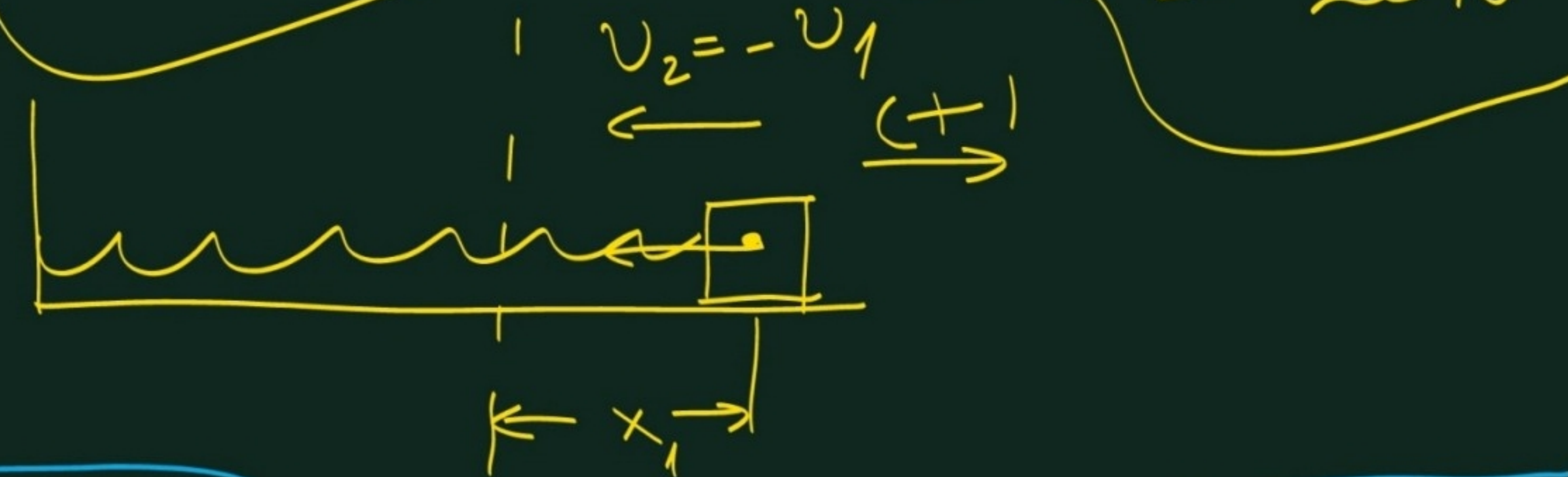
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Άρα θα ξαναβρούμε
στη θέση $x_1 = +0,1 \text{ m}$
με ταχύτητα

$$v_2 = -1 \text{ m/s}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \sum F = F_{\text{ελ}} = -kx_1 = -200 \cdot 0,1 =$$

$$= -20 \text{ N}$$



$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \sum F \cdot v = (-kx_1) \cdot (-v_1) =$$

$$= kx_1 v_1 = 200 \cdot 0,1 \cdot 1 =$$

$$= 20 \text{ Watt}$$

Απόδειξη ότι ένα σώμα
επιτελεί απλή αρμονική
ταλάντωση (αατ ή στα)

Για να αποδείξεις ότι ένα
σώμα επιτελεί αατ ακολουθούμε
για διαδικασία δύο βημάτων.

1^ο βήμα: Ξεκαθαρίζουμε τη συθάνεια
στη θέση ισορροπίας και υπολογίζουμε
σε μία εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί
στο 2^ο βήμα.

2^ο βήμα: Επιτρέπουμε το σώμα από τη ΘΙ
πάρνοντας ως θετική τη φορά επιράνης
και υπολογίζουμε τη συνισταμένη, που είναι η δύναμη

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

ελασφοράς:

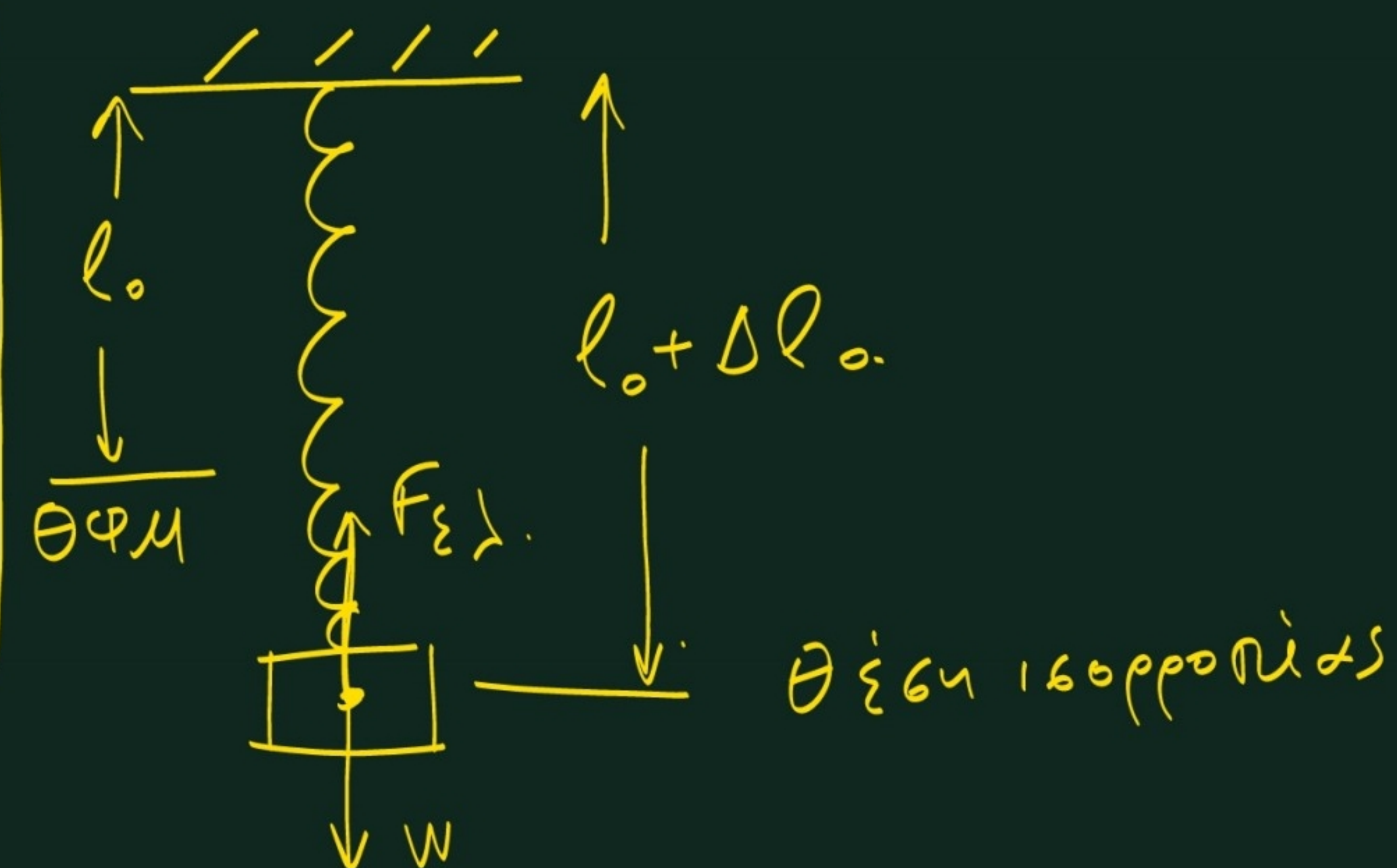
$$\Sigma F = F_{\text{ελα}} = -Dx$$

και από εκεί
βρίσκουμε τη
σταθερά ελασφοράς

D

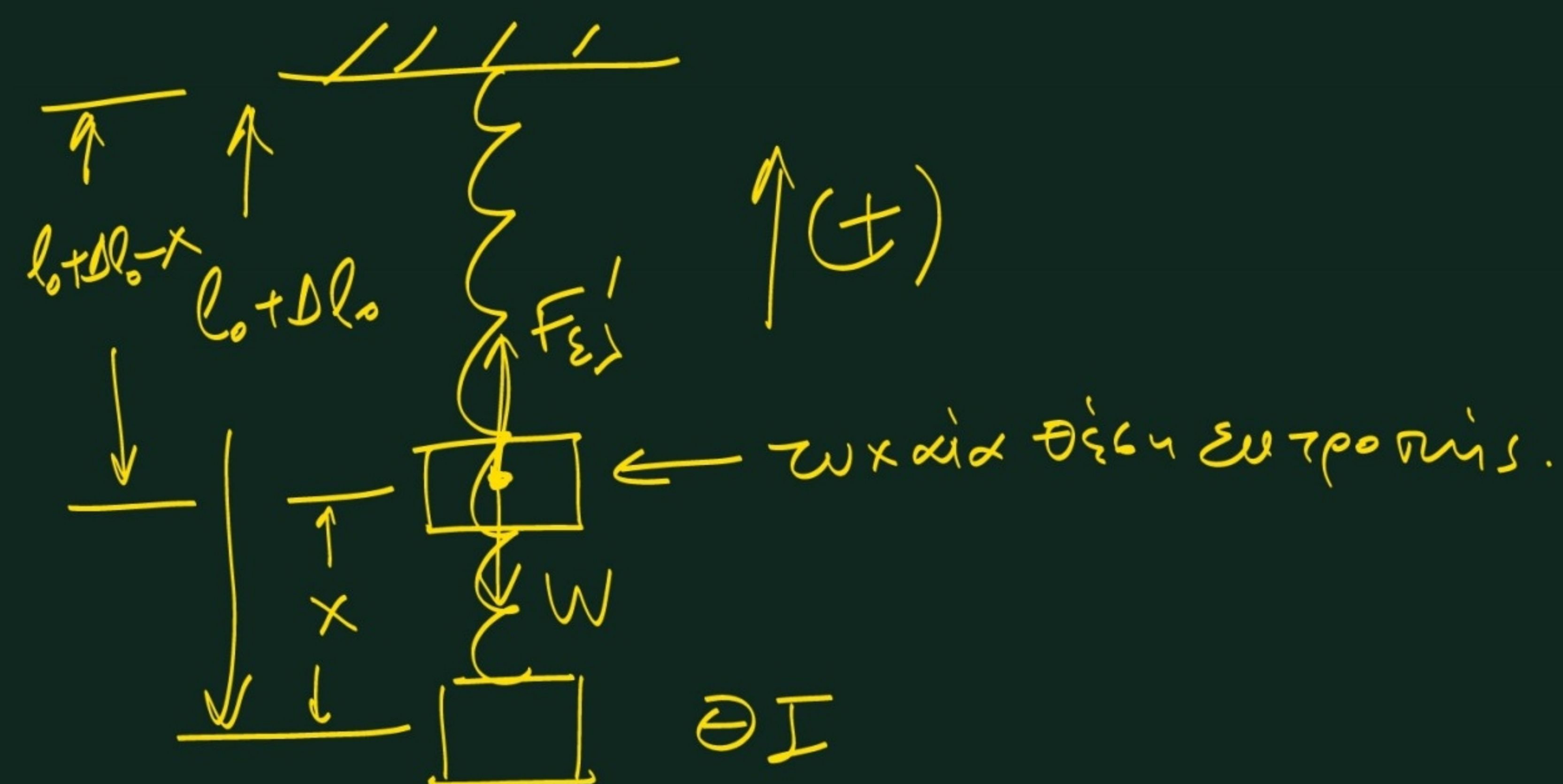
Παράδειγμα

Σώμα σε κατακόρυφο ελατήριο.



1^ο βήμα: Στη ΘΙ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = W \Rightarrow k \cdot \Delta l_0 = mg$$



2^ο Θύρα:

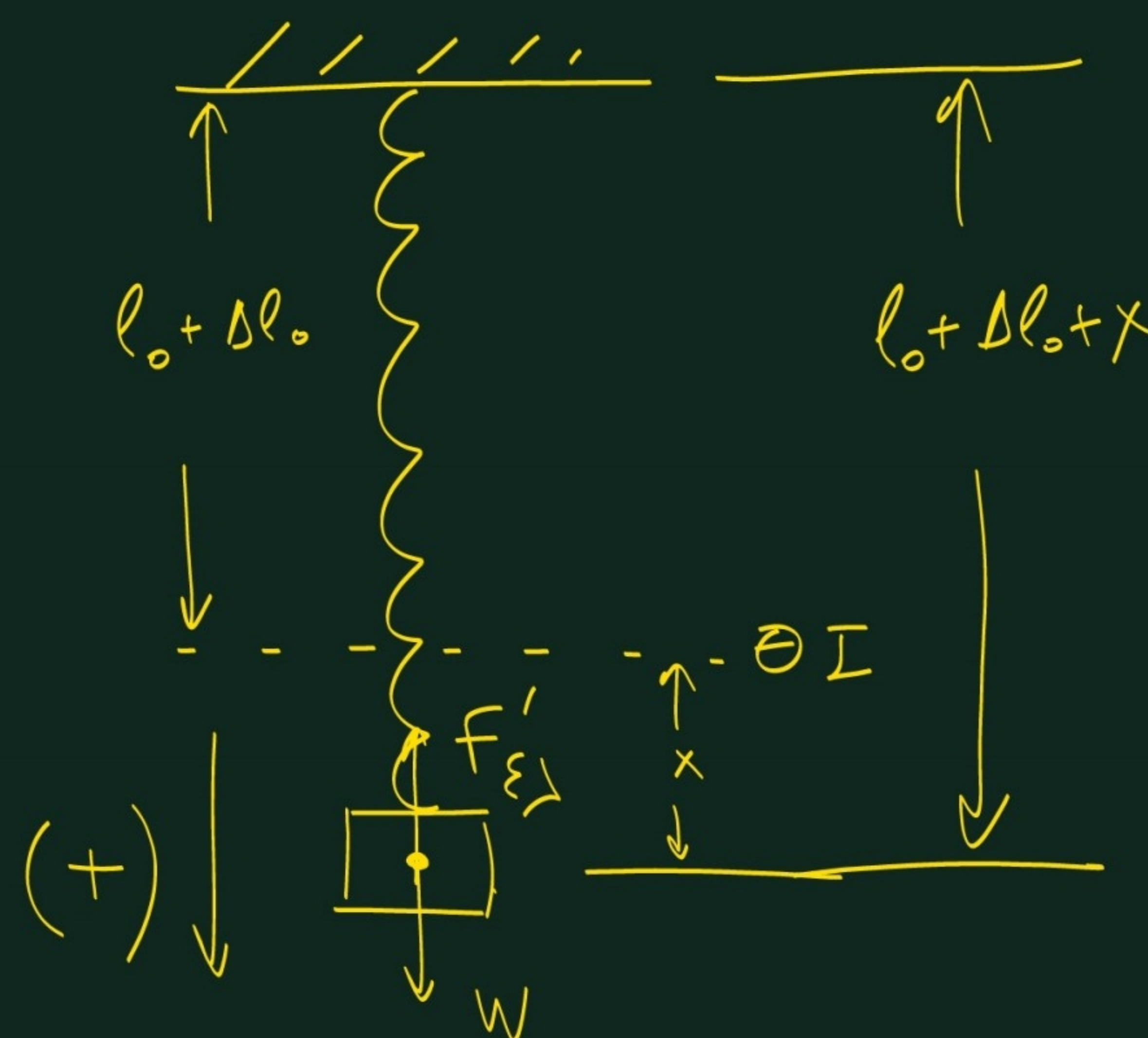
Συνωστία θέση ευτροπής έχουμε:

$$\Sigma F = F_{ελ}' - W \Rightarrow$$

$$\Sigma F = K(\Delta l_0 - x) - mg =$$

$$\Sigma F = K \cdot \cancel{\Delta l_0} - Kx - \cancel{mg} \Rightarrow \Sigma F = -Kx$$

Αρα η συνωστία είναι α.α.ζ με $D = K$.



Συνωστία θέση:

$$\Sigma F = W - F_{ελ}' \Rightarrow$$

$$\Sigma F = mg - K(\Delta l_0 + x) \Rightarrow$$

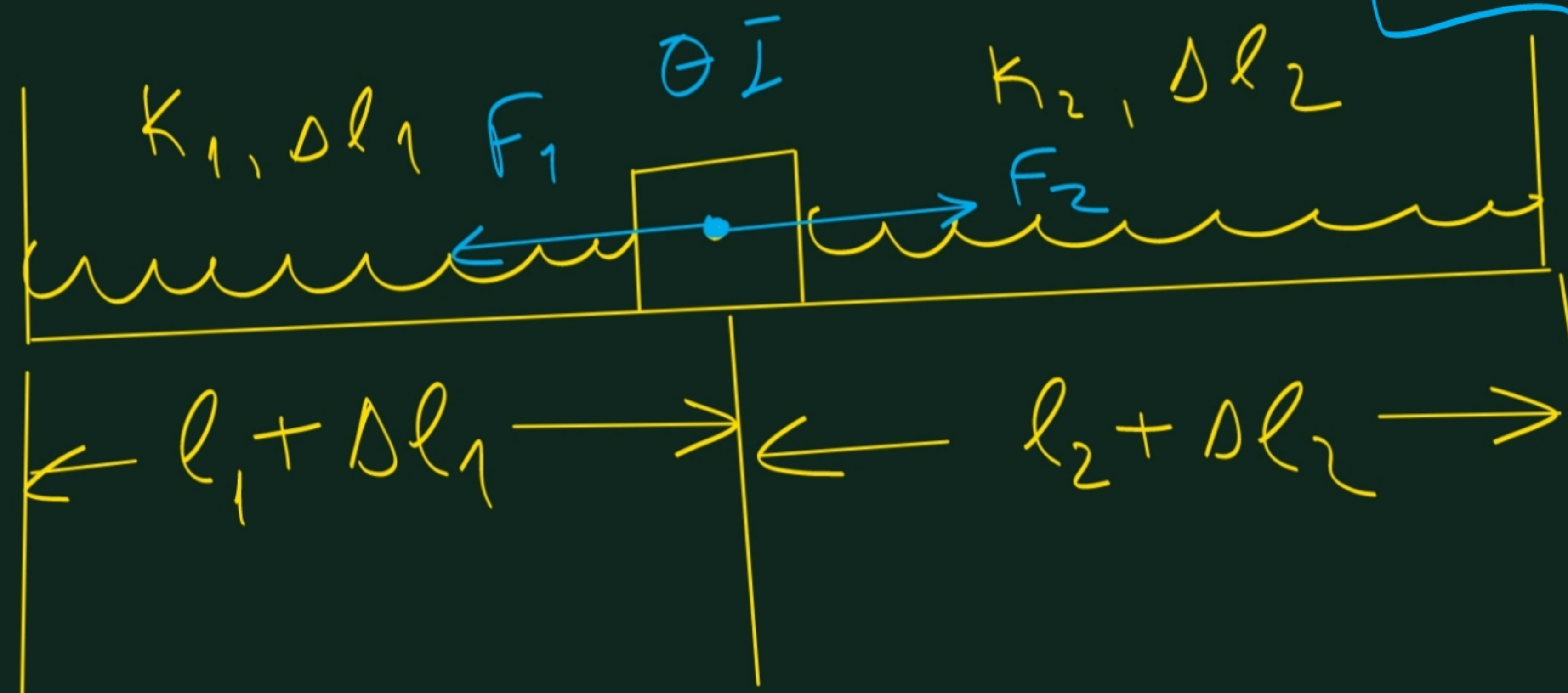
$$\Sigma F = \cancel{mg} - \cancel{K \cdot \Delta l_0} - Kx \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -Kx$$

Αβυ. 1.27)

Σώμα κρέμεται σε δύο οριζόντια ελατήρια.

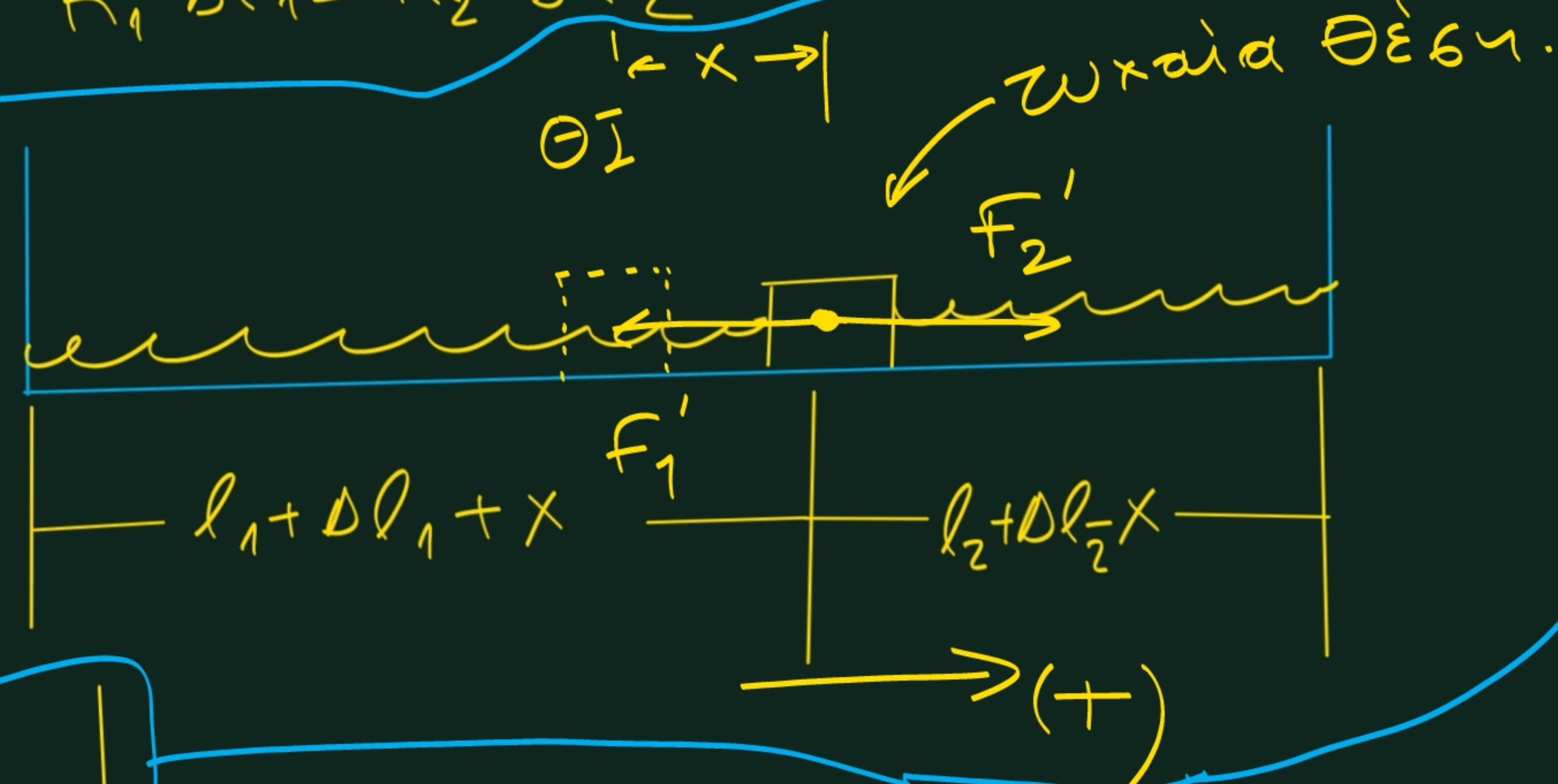
Για να ισορροπεί το σώμα, θα πρέπει τα ελατήρια να είναι και τα δύο επενδυμένα ή και τα δύο συσπειρωμένα. Έστω ότι είναι επενδυμένα.



1° βήμα: Στμ ΘΙ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow$$

$$K_1 \cdot \Delta l_1 = K_2 \cdot \Delta l_2$$



2° βήμα: Στμ ω και θέση έχουμε:

$$\Sigma F = F_2' - F_1' = K_2(\Delta l_2 - x) - K_1(\Delta l_1 + x) =$$

$$= K_2 \cancel{\Delta l_2} - K_2 x - K_1 \cancel{\Delta l_1} - K_1 x \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -(K_1 + K_2)x$$

Άρα η κίνηση είναι α.α.τ
με σταθερά επαναφοράς

$$D = K_1 + K_2 = 120 + 80 = 200 \text{ N/m}$$

$$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{200}} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow$$

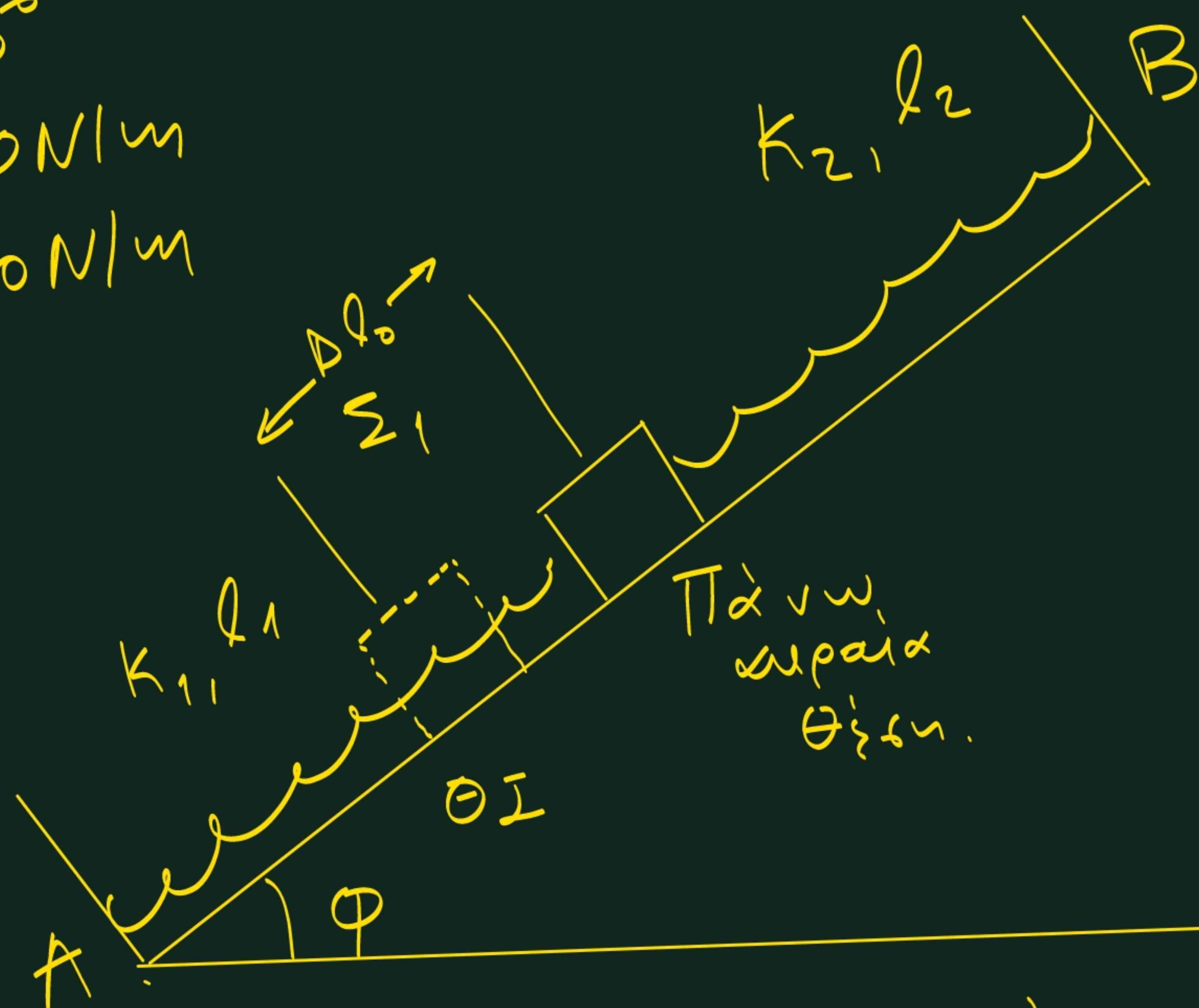
$$T = 0,2\pi \text{ sec}$$

Θέμα Δ | 2012

$$\varphi = 30^\circ$$

$$K_1 = 60 \text{ N/m}$$

$$K_2 = 140 \text{ N/m}$$



Δ1) Ανάλυση ταλαντώσεως.
1ο βήμα (θέση ισορροπίας)

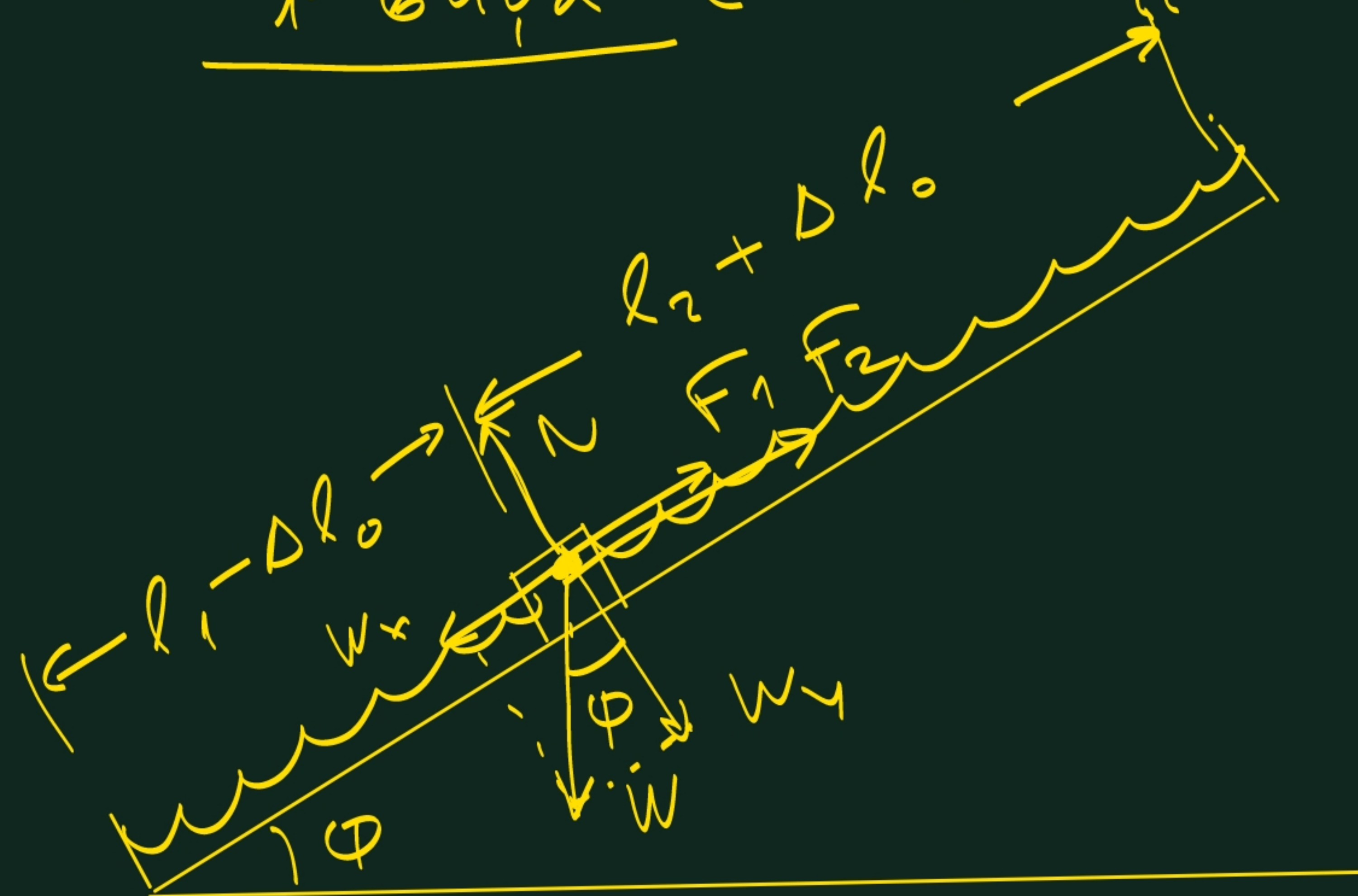
Στη ΘΙ έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$W_x - F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow$$

$$W_x = F_1 + F_2 \Rightarrow$$

$$W_x = K_1 \Delta l_0 + K_2 \Delta l_0.$$



2ο βήμα.

2ο βήμα. Στην τυχούσα θέση έχουμε:

$$\sum F = F_1' + F_2' - W_x =$$

$$\sum F = K_1(\Delta l_0 - x) + K_2(\Delta l_0 - x) - W_x \Rightarrow$$

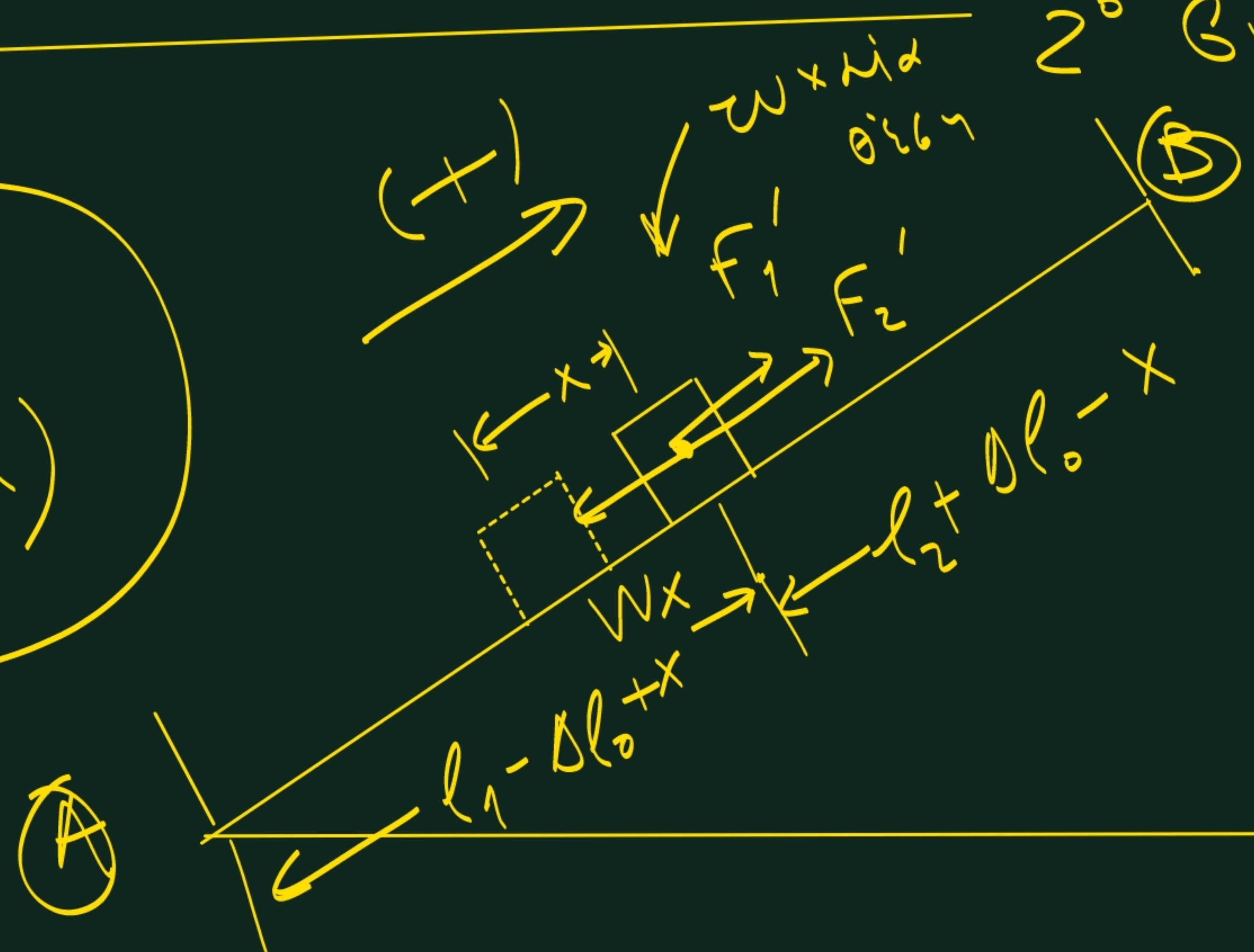
$$\sum F = \cancel{K_1 \Delta l_0} - K_1 x + \cancel{K_2 \Delta l_0} - K_2 x - \cancel{W_x} \Rightarrow$$

$$\sum F = -(K_1 + K_2)x$$

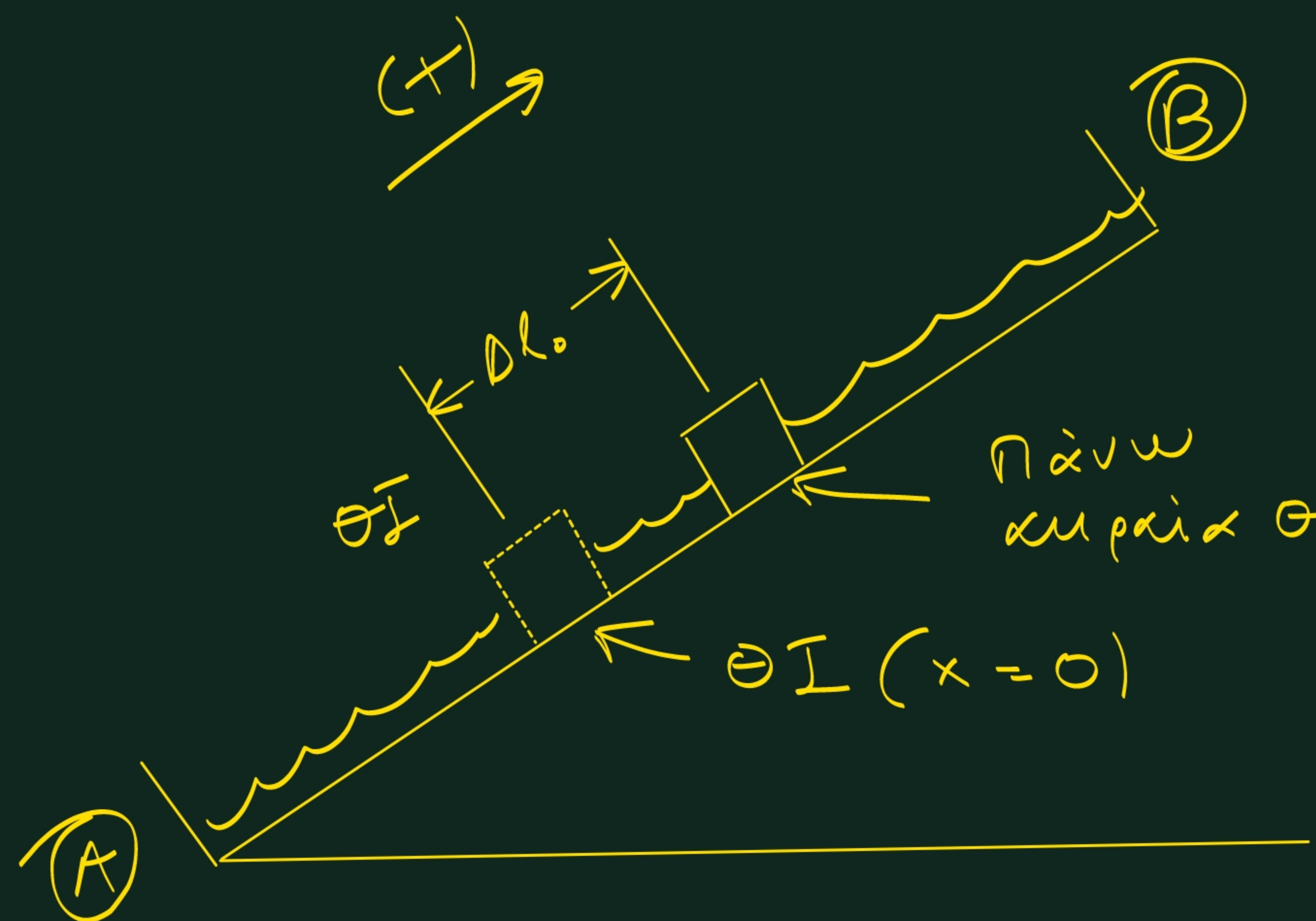
Αρα συνίσταται είναι αατ υε
 $D = K_1 + K_2$

$$l_1 - \Delta l_0 + x = l_1 - (\Delta l_0 - x)$$

$$l_2 + \Delta l_0 - x = l_2 + (\Delta l_0 - x)$$



D2.



Το αβάνσυρε χωρίς αρχική ταχύτητα
από την πάνω κυρία θέση

$$D = k_1 + k_2 = 200 \text{ N/m}$$

$$x = A \sin(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{t=0}$$

$$+A = A \sin \phi_0 \Rightarrow \sin \phi_0 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ rad/s.}$$

$$A = \Delta l_0.$$

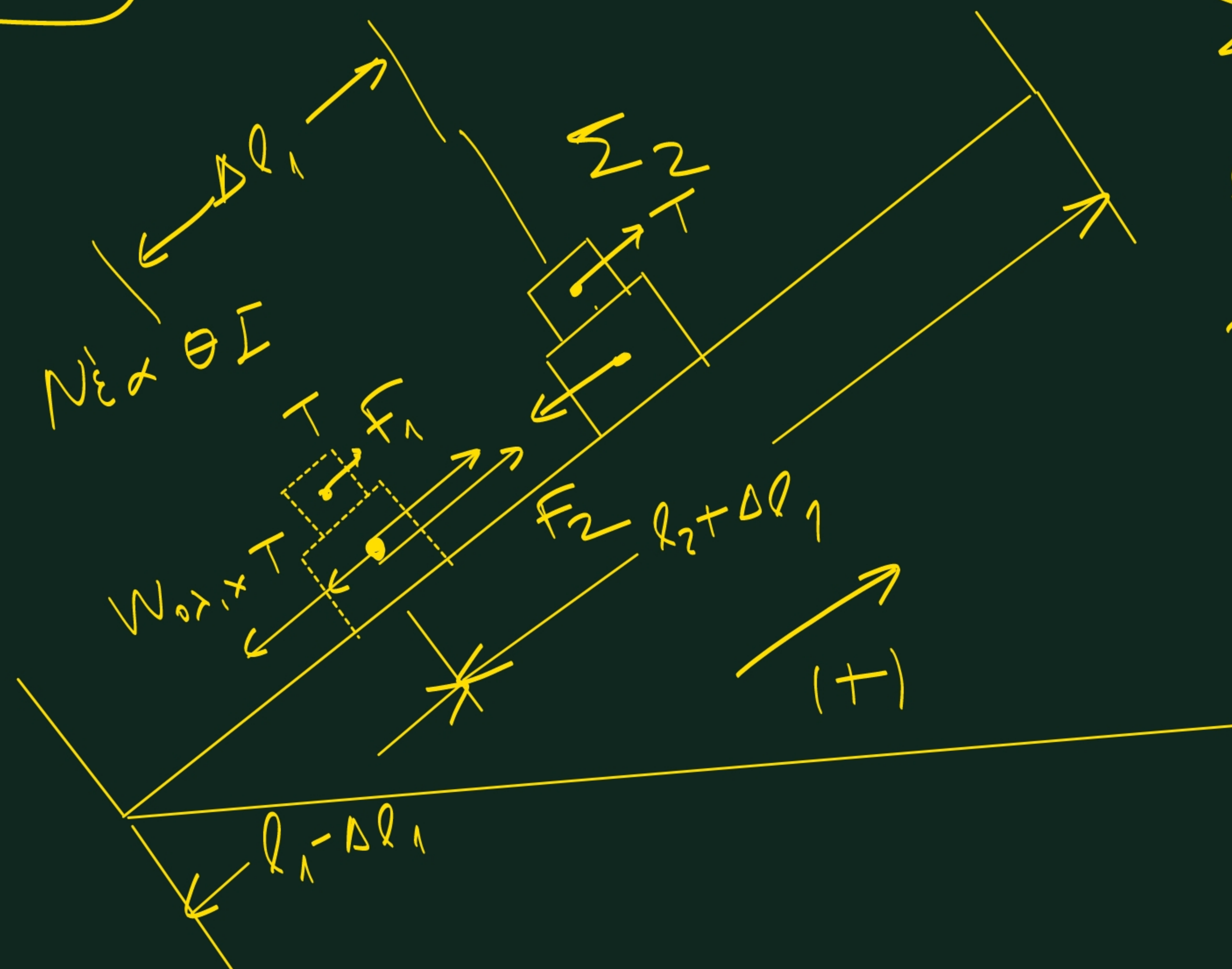
$$mg \sin \phi = (k_1 + k_2) \Delta l_0 =$$

$$\Delta l_0 = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{200} = 0,05 \text{ m} = A$$

$$\text{Άρα: } x = A \sin(\omega t + \phi_0) =$$

$$x = 0,05 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

Δ3.)



$$\Sigma F_2 = -D_2 x \Rightarrow T = -D_2 x \quad (1)$$

$$\Sigma F_1 = -D_1 x \Rightarrow$$

$$F_1 + F_2 - T - W_{02} \propto x = -D_1 x \quad (2)$$

$$\text{Προσθέτουμε τις (1)}$$

$$D_1 = m_1 \omega^2$$

$$D_2 = m_2 \omega^2$$

$$D_1 + D_2 = K.$$