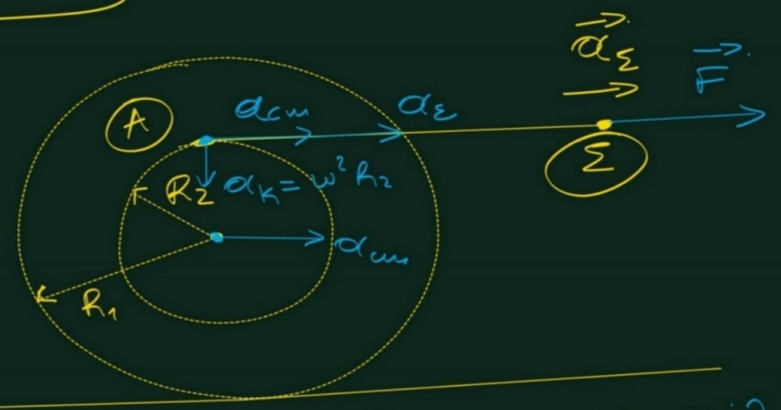
Ασκ. 3.67



Κάθε στιγμή τα σημεία Σ και A έχουν την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση, επειδή το νήμα είναι μη εκτατό.

Αν ήταν $v_\Sigma \neq v_A$ το νήμα θα συσπειρωνόταν ή θα επιμηκυνόταν, πράγμα αδύνατο

$a_A = a_{cm} + a_\varepsilon$ (χωρίς την κεντρομόλο)

$a_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_2$ (επιτρόχια επιτάχυνση)

$v_{\gamma\rho} = \omega R_2 \Rightarrow \frac{dv_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_2 \Rightarrow a_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_2$ (για το A)

$a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R_1$

Άρα: $a_A = a_\Sigma = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_1 + \alpha_{\gamma\omega\nu} R_2 \Rightarrow$

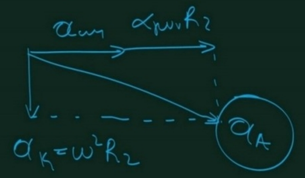
$a_\Sigma = \alpha_{\gamma\omega\nu}(R_1 + R_2)$

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\gamma\omega\nu}(R_1+R_2)$$

$$\alpha_{\sigma\mu} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R_1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{\Sigma}}{\alpha_{\sigma\mu}} = \frac{R_1+R_2}{R_1} \Rightarrow \alpha_{\sigma\mu} = \frac{\alpha_{\Sigma} R_1}{R_1+R_2}$$

(σωστό το (Β)).



$$v_{\sigma\mu} \neq \omega R_1$$

Επιτρόχια επιτάχυνση

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R_2 \text{ (για το A)}$$

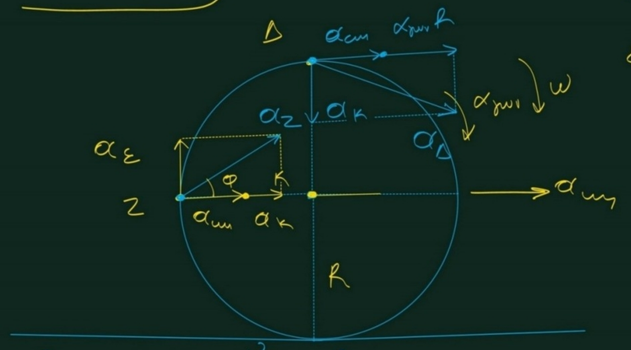
Εφαπτομενική επιτάχυνση (για το A)

$$\alpha_{\varepsilon\varphi(A)} = \alpha_{\varepsilon\pi} + \alpha_{\sigma\mu}$$

Συνολική επιτάχυνση για το A

$$\alpha_A = \sqrt{(\alpha_{\varepsilon\pi}+\alpha_{\sigma\mu})^2 + (\omega^2 R_2)^2}$$

Ασκ. 3.59.



$$a_Z^2 = a_\varepsilon^2 + (a_{cm}+a_K)^2$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a_\varepsilon}{a_{cm}+a_K} = \frac{1}{3}$$

Αλλά: $a_\varepsilon = \alpha_{\mu\varepsilon\lambda}R = a_{cm}$

Άρα: $\dfrac{a_{cm}}{a_{cm}+a_K} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$$3a_{cm} = a_{cm}+a_K \Rightarrow a_K = 2a_{cm}$$

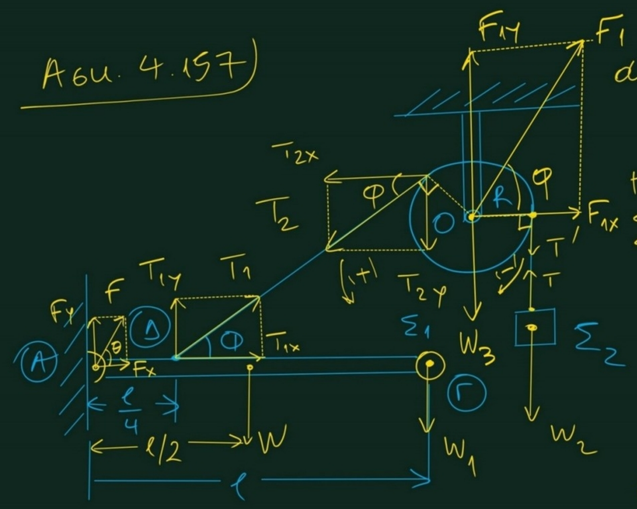
a_K = κεντρομόλος επιτάχυνση.

$$a_\Delta^2 = (a_{cm}+\alpha_{\mu\varepsilon\lambda}R)^2 + a_K^2 \Rightarrow$$

$$a_\Delta^2 = (a_{cm}+a_{cm})^2 + (2a_{cm})^2 \Rightarrow a_\Delta^2 = 2\cdot(2a_{cm})^2 \Rightarrow a_\Delta = 2\sqrt{2}\,a_{cm}$$

Σωστό το (γ)

Ασκ. 4.157



$W = 40N$

$W_1 = 20N$ $\quad W_3 = 80N$

$W_2 = ;$ $\quad \eta\mu\varphi = 0{,}8$ $\quad \sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}6$

α) Το Σ_2 ισορροπεί οπότε:

$$T = W_2$$

Η τροχαλία ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow \tau_{T_2(O)} + \tau_{T'(O)} = 0 \Rightarrow$$

$$T_2 R - T' R = 0 \Rightarrow T_2 = T'$$

$T = T'$ επειδή το νήμα είναι αβαρές και γυ εκτατό.

Άρα: $T_2 = W_2$

Επίσης: $T_1 = T_2$

Η ράβδος ισορροπεί: $\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow \tau_{T_{1Y}(A)} + \tau_{W(A)} + \tau_{W_1(A)} = 0$

$$T_{1Y} \cdot \frac{\ell}{4} - W \cdot \frac{\ell}{2} - W_1 \ell \Rightarrow T_1 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \frac{1}{4} - \frac{W}{2} - W_1 = 0 \Rightarrow$$

$$T_2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \frac{l}{4} - \frac{W}{2} - W_1 = 0 \Rightarrow$$

$$W_2 \cdot 0{,}8 \cdot \frac{l}{4} - \frac{40}{2} - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$W_2 \cdot 0{,}2 = 40 \Rightarrow$$

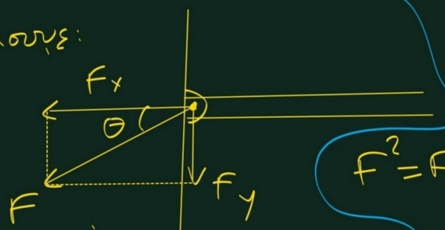
$$W_2 = \frac{400}{2} \Rightarrow W_2 = 200\,N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x + T_{1x} = 0 \Rightarrow F_x + T_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$F_x + W_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow F_x + 200 \cdot 0{,}6 = 0 \Rightarrow F_x = -120\,N$$

(υπάρχει φορά προς τα αριστερά.)

Άρα έχουμε:



αυτή είναι η κατεύθυνση της F

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = 120^2 + 60^2 = 60^2 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$F = 60\sqrt{5}\,N$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{2}$$

β) $\Sigma F_y = 0$ (για τη ράβδο)

$$T_{1y} + F_y = W + W_1 \Rightarrow T_1 \cdot \eta\mu\varphi + F_y = W + W_1 \Rightarrow$$

$$W_2\,\eta\mu\varphi + F_y = W + W_1 \Rightarrow 200 \cdot 0{,}8 + F_y = 40 + 20 \Rightarrow$$

$$(T_1 = T_2 = W_2)$$

$$160 + F_y = 60 \Rightarrow$$

$$F_y = -60\,N$$ (άρα έχει φορά προς τα κάτω)

γ) Η τροχαλία ισορροπεί:

$(1+x)^{\nu} \simeq 1+\nu x$

αν $x \ll 1$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{1x} - T_{2x} = 0 \Rightarrow F_{1x} - T_2 \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow$

$F_{1x} - W_2 \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow F_{1x} - 200 \cdot 0{,}6 = 0 \Rightarrow F_{1x} = 120N$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{1y} - T_{2y} - W_3 - T' = 0 \Rightarrow F_{1y} - T_2 \eta\mu\varphi - W_3 - W_2 = 0 \Rightarrow$

$(T' = T = T_1 = T_2 = W_2)$

$F_{1y} - W_2 \eta\mu\varphi - W_3 - W_2 = 0 \Rightarrow$

$F_{1y} - 200 \cdot 0{,}8 - 80 - 200 = 0 \Rightarrow$

$F_{1y} = 160 + 280 = 440N$

$F^2 = F_{1x}^2 + F_{1y}^2 = 120^2 + 440^2 =$

$= 4^2 \cdot 30^2 + 4^2 \cdot 110^2$

$= 1600 \cdot 9 + 1600 \cdot 121$

$\Rightarrow F = 40\sqrt{130}\ N \simeq 40 \cdot 11{,}5 = 460N$

$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{440}{160} = \frac{11}{4}$

$\nu = \frac{1}{2}$

$\sqrt{130} = \sqrt{100+30} =$

$= \sqrt{100\left(1+\frac{30}{100}\right)} \simeq$

$10\left(1+\frac{30}{200}\right) = 10(1+0{,}15) = 11{,}5$

Προσέγγιση

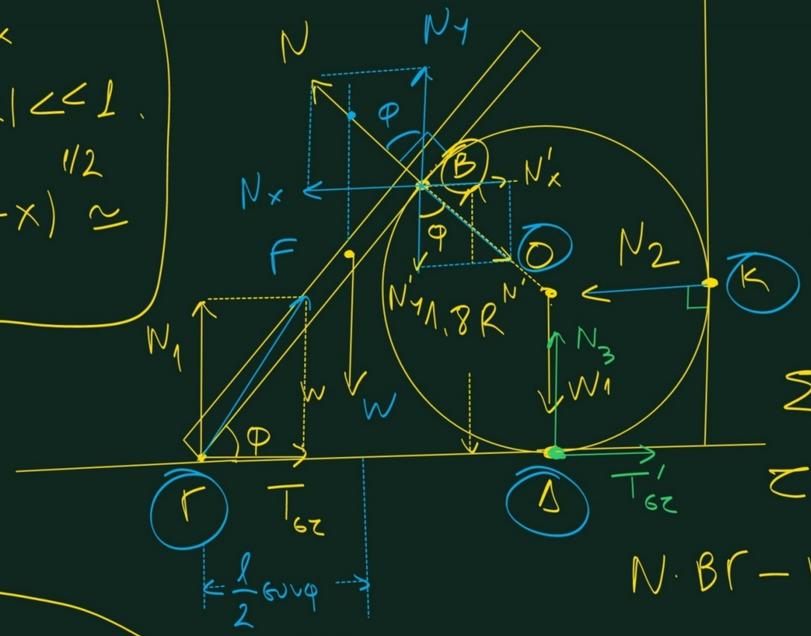
$(1+x)^{\alpha} \simeq 1+\alpha x$

$\alpha \in \mathbb{R}$ και $|x| \ll 1$.

Π.χ. $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \simeq 1+\frac{x}{2}$

όπου $\alpha = \frac{1}{2}$

Ασκ. 4.154



$W_1 = 30N$

$W = 45N$

$L = 4m$

$\eta\mu\varphi = 0,6$

$\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$

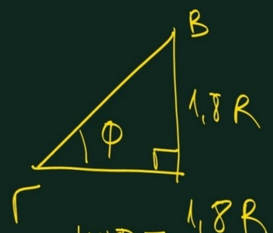
α) Η σφαίρα είναι λεία, οπότε η δύναμη N είναι κάθετη στη ράβδο.

$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow$

$\tau_{N(\Gamma)} + \tau_{W(\Gamma)} = 0 \Rightarrow$

$N \cdot B\Gamma - W \cdot \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow$

$N \cdot 3R - 45 \cdot \frac{4}{2} \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$



$\eta\mu\varphi = \frac{1,8R}{B\Gamma} \Rightarrow 0,6 = \frac{1,8R}{B\Gamma} \Rightarrow B\Gamma = \frac{1,8R}{0,6} \Rightarrow B\Gamma = 3R$

$$N \cdot 3R - 45 \cdot \frac{4}{2} \cdot 0{,}8 = 0 \Rightarrow$$

$$3 \cdot 0{,}96N - 45 \cdot 1{,}6 = 0 \Rightarrow$$

$$N = \frac{45 \cdot 1{,}6}{3 \cdot 6 \cdot 0{,}16} = \frac{450}{3 \cdot 6} = \frac{150}{6} \Rightarrow$$

$$N = 25N$$

Άρα ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και δαπέδου είναι:

$$T_{\sigma\tau} = \mu_{\sigma\tau} \cdot N_1 \Rightarrow 15 = \mu_{\sigma\tau} \cdot 25 \Rightarrow$$

$$\mu_{\sigma\tau} = 0{,}6$$

β) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} - N_x = 0 \Rightarrow$

$$T_{\sigma\tau} - N \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow T_{\sigma\tau} = N \cdot \eta\mu\varphi = 25 \cdot 0{,}6 = 15N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_y - W = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = W - N_y = W - N \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 45 - 25 \cdot 0{,}8 = 45 - 20 = 25N$$

γ) Παίρνουμε ισορροπία δυνάμεων για τη σφαίρα.

$N = N' = 25\,N$ (δράση - αντίδραση) ή 3ος ΝΝ

Το δάπεδο είναι τραχύ αλλά η σφαίρα είναι λεία οπότε $T'_{\sigma\tau} = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N'_x - N_2 = 0 \Rightarrow$

$N' \, \text{συν}\varphi - N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = 25 \cdot 0{,}6 \Rightarrow$

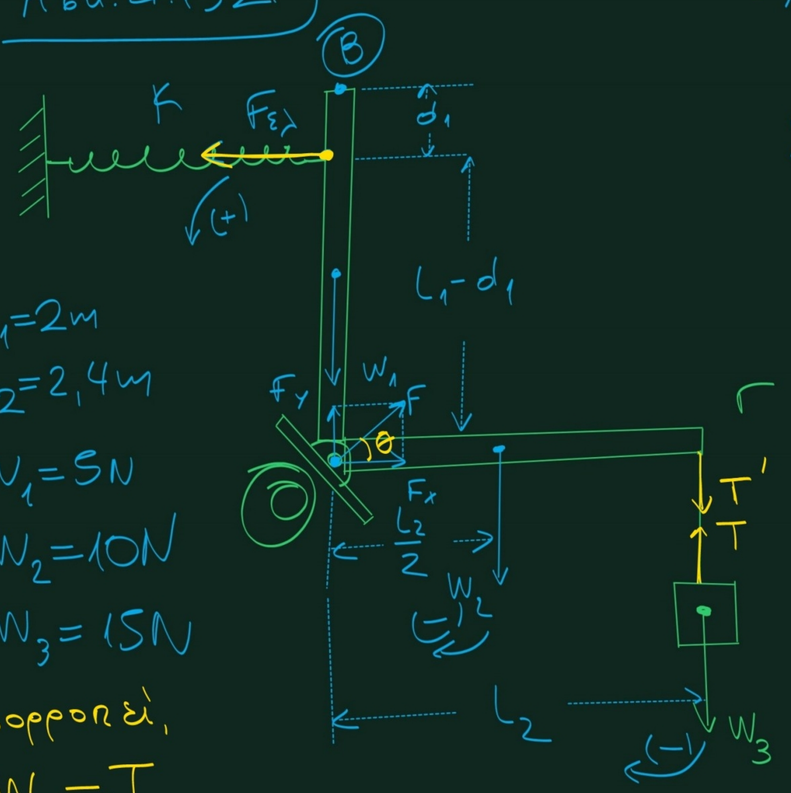
$N_2 = \cancel{20\,N}\ 15\,N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_3 - W_1 - N'_y = 0 \Rightarrow$

$N_3 = W_1 + N' \cdot \text{συν}\varphi \Rightarrow$

$N_3 = 30 + 25 \cdot 0{,}8 \Rightarrow N_3 = \cancel{45}\ 50\,N$

Ασκ. 4.152



$L_1 = 2m$

$L_2 = 2,4m$

$W_1 = 5N$

$W_2 = 10N$

$W_3 = 15N$

Το W_3 ισορροπεί, οπότε $W_3 = T$

και $T = T'$ επειδή το νήμα είναι γνωστά και αβαρές.

α) Παίρνουμε ισορροπία ροπών ως προς O για το σύστημα των δύο ράβδων.

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow \tau_{F_{\varepsilon\lambda}(O)} + \cancel{\tau_{W_1(O)}}^{\,0} + \tau_{W_2(O)} + \tau_{W_3(O)} + \cancel{\tau_{F(O)}}^{\,0} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda}(L_1 - d_1) - W_2 \cdot \frac{L_2}{2} - W_3 \cdot L_2 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda}(2 - 0,8) - 10 \cdot 1,2 - 15 \cdot 2,4 = 0 \Rightarrow$$

$$1,2F_{\varepsilon\lambda} - 12 - 36 = 0 \Rightarrow 1,2F_{\varepsilon\lambda} = 48 \Rightarrow$$

$$1,2 \cdot K \cdot \Delta l = 48 \Rightarrow \Delta l = \frac{48}{1,2 \cdot 200} \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{40}{200} = \frac{1}{5} = \cancel{0,125m}\ 0,2m$$

6) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow$

$F_x - k \cdot \Delta l = 0 \Rightarrow$

$F_x - 200 \cdot 0{,}2 = 0 \Rightarrow F_x = 40N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y - W_1 - W_2 - T' = 0 \Rightarrow$

$F_y - W_1 - W_2 - W_3 = 0 \Rightarrow$

$F_y = 5 + 10 + 15 \Rightarrow$

$F_y = 30N.$

$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow$

$F^2 = 40^2 + 30^2 \Rightarrow$

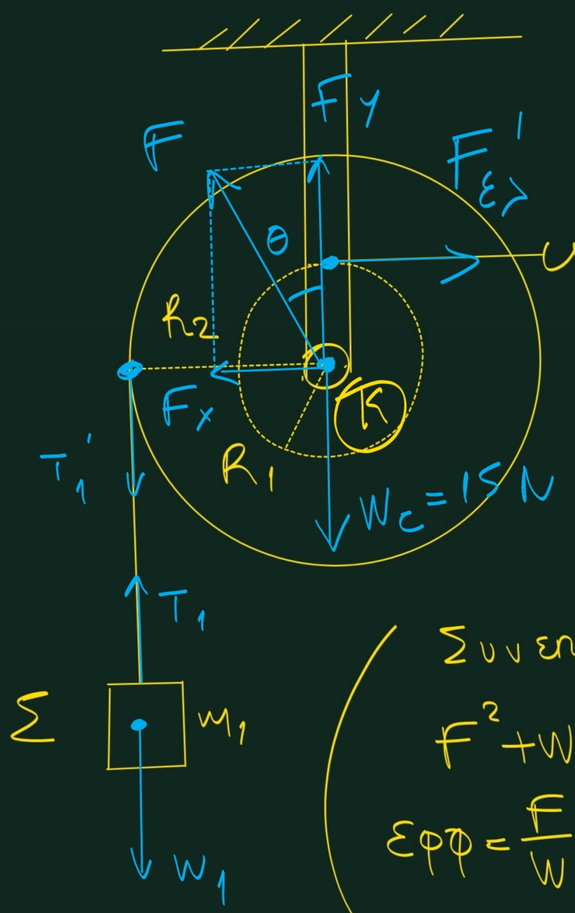
$F^2 = 1600 + 900 = 2500 \Rightarrow$

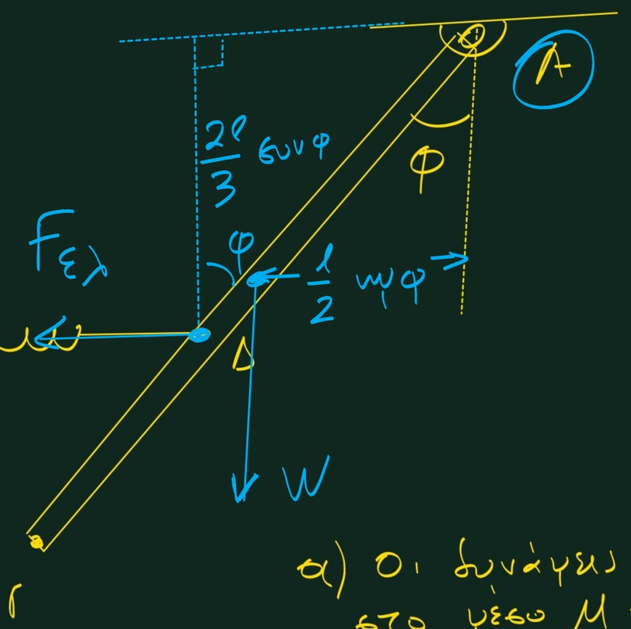
$F = 50N$

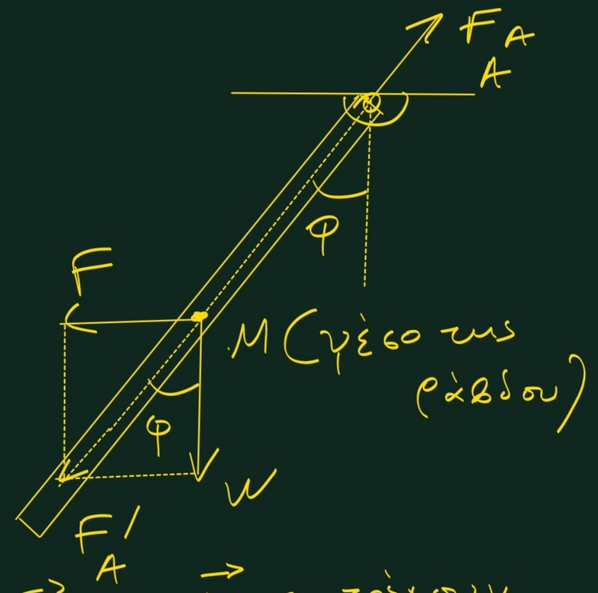
και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{30}{40} \Rightarrow$

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$

Ασκ 4.164







Συνεπώς:

$$F^2 + W^2 = F_A^2$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F}{W} \Rightarrow F = W \cdot \varepsilon\varphi\varphi$$

α) Οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{W}$ συντρέχουν στο γέφο Μ της ράβδου, οπότε και η $\vec{F_A}$ έχει φορέα που διέρχεται από το Μ, όπως στο σχήμα.

$$\vec{F} + \vec{W} = \vec{F_A}' \quad \text{αλλά} \quad \vec{F_A}' = -\vec{F_A}$$

$$F_A' = F_A = 50N$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{W}{F_A'} = \frac{W}{F_A} \Rightarrow$$

$$0{,}6 = \frac{W}{50} \Rightarrow W = 30N \Rightarrow$$

$$mg = 30 \Rightarrow m = 3kg.$$

β) i) Βάρος τροχαλίας

$W = 15N$

$R_1 = R$ $\qquad \Delta l = 0{,}3m$

$R_2 = 2R$

$$A\Delta = \frac{2l}{3}$$

Το σώμα Σ ισορροπεί άρα: $W_1 = T_1$

Επίσης $T_1 = T_1'$ (αβαρές και μη εκτατό)

$F_{\varepsilon\lambda} = K \cdot \Delta l = F_{\varepsilon\lambda}'$ (το ελατήριο είναι τεντωμένο με την ίδια δύναμη και από τα δύο μέρη).

Η τροχαλία ισορροπεί άρα:

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow \tau_{T_1'(K)} + \tau_{F_{\varepsilon\lambda}'(K)} = 0 \Rightarrow$$

$$T_1' \cdot R_2 - F_{\varepsilon\lambda}' \cdot R_1 = 0 \Rightarrow$$

$$W_1 \cdot 2R - K \cdot \Delta l \cdot R = 0 \Rightarrow K \cdot \Delta l = 2W_1 \Rightarrow$$

$$K \cdot \Delta l = 2m_1 g.$$

Την επιμήκυνση του ελατηρίου θα τη βρούμε από την ισορροπία ροπών για τη ράβδο.

$$\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow \tau_{w(A)}+\tau_{F_{\varepsilon\lambda}(A)}=0 \Rightarrow$$

$$W\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu\varphi - F_{\varepsilon\lambda}\cdot\frac{2\ell}{3}\sigma\upsilon\nu\varphi=0 \Rightarrow$$

$$\frac{W\cdot\eta\mu\varphi}{2}=K\cdot\Delta\ell\cdot\frac{2\sigma\upsilon\nu\varphi}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{30\cdot 0{,}8}{2}=F_{\varepsilon\lambda}\cdot\frac{2\cdot 0{,}6}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{3\cdot 30\cdot 0{,}8}{4\cdot 0{,}6}=F_{\varepsilon\lambda}\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=\frac{90\cdot 0{,}2}{0{,}6}=\frac{90}{3}=30N$$

$$U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}K\cdot\Delta\ell^2=\frac{1}{2}K\cdot\Delta\ell\cdot\Delta\ell\Rightarrow$$

$$U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}F_{\varepsilon\lambda}\cdot\Delta\ell\Rightarrow$$

$$U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 0{,}3\Rightarrow U_{\varepsilon\lambda}=4{,}5\,\text{Joule}.$$

ii) $K\cdot\Delta\ell=2m_1g\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=2m_1g\Rightarrow$

$30=m_1\cdot 20\Rightarrow m_1=1{,}5\,kg.$

iii) Για την τροχαλία:

$\Sigma F_x=0\Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda}=F_x\Rightarrow F_x=30N$

$\Sigma F_y=0\Rightarrow F_y=W_\tau+T'_1\Rightarrow$

$F_y=W_\tau+m_1g\Rightarrow$

$F_y=15+15\Rightarrow F_y=30N$

Αρα: $F^2=F_x^2+F_y^2\Rightarrow$

$F^2=2\cdot 30^2\Rightarrow$

$F=30\sqrt{2}\,N$ και

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{F_x}{F_y}=1\Rightarrow\theta=45^\circ$