Στροφομηχανικό ανάλογο.

Μεταφορική	Περιστροφική
Δx	$\Delta\theta$ (γωνιακή μετατόπιση ή συνολική γωνία στροφής)

$$\Delta x = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta\theta = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + a t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$$

$$\upsilon \longrightarrow \omega$$

$$a \longrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$p \longrightarrow L$$

ορμή στροφορμή

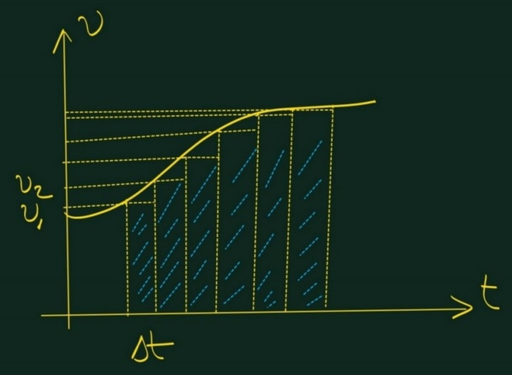
$$F \longrightarrow \tau \text{ (ροπή)}$$

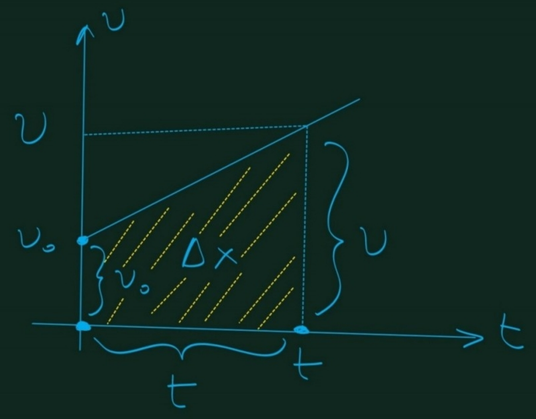
δύναμη

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega \Rightarrow \Delta\theta = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \sum \Delta\theta = \sum \omega \cdot \Delta t$$

Άρα το εμβαδό σε διάγραμμα ω-t δίνει τη γωνία στροφής $\Delta\theta$, ακριβώς όπως το εμβαδό σε διάγραμμα υ-t δίνει τη μετατόπιση Δx

$$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \upsilon \cdot \Delta t \Rightarrow \sum \Delta x = \sum \upsilon \cdot \Delta t$$



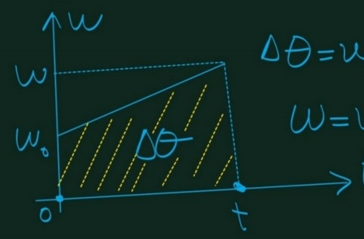


$$\Delta x_{o2} = v_1 \cdot \Delta t + v_2 \cdot \Delta t + \ldots + v_v \Delta t$$

$$v = v_0 + at$$

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \cdot t = \frac{v_0 + at + v_0}{2} t \Rightarrow$$

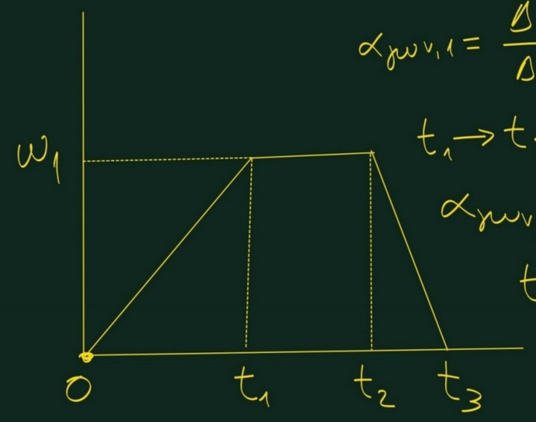
$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



$$\Delta\theta = w_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\text{ravn}} t^2$$

$$w = w_0 + \alpha_{\text{ravn}} t$$

Esp. 4.1



$0 \to t_1$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{\omega_1}{t_1}$$

$t_1 \to t_2$

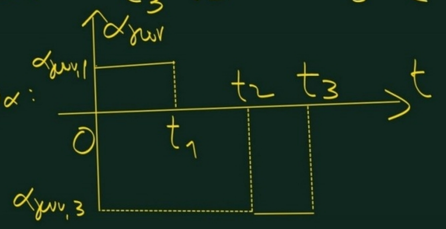
$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 0$$

$t_2 \to t_3$

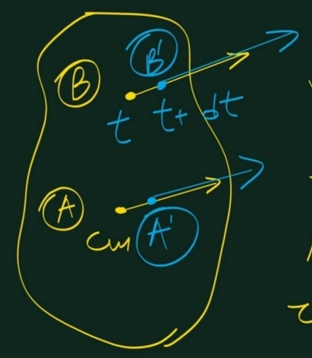
$$\alpha_{\gamma\omega\nu,3} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - \omega_1}{t_3 - t_2} = -\frac{\omega_1}{t_3 - t_2}$$

$$t_1 > t_3 - t_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{t_1} < \frac{\omega_1}{t_3 - t_2}$$

Apa:



Εφ. 4.6



Δεν υπάρχει, επειδή αν υπήρχε η κίνηση θα ήταν μεταφορική.

Έστω B ένα σημείο που έχει την ίδια ταχύτητα με το A που είναι το κέντρο μάζας.

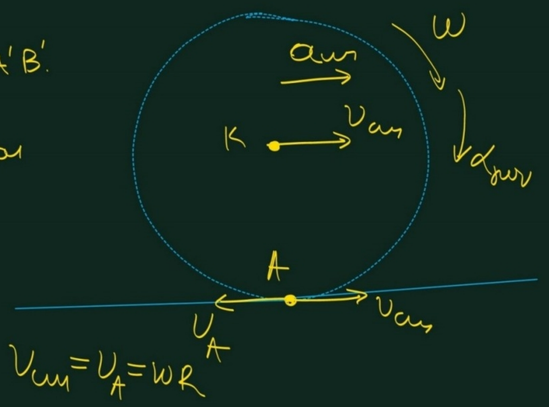
Μετά από χρόνο dt το τμήμα AB μεταφέρεται στο A'B'.

Επειδή AB // A'B' η κίνηση είναι μεταφορική, πράγμα άτοπο.

$$a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = \frac{R\,d\theta}{dt} =$$

$$R \cdot \frac{d\theta}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$



$$v_{cm} = v_A = \omega R$$

Ασκ. 4.36.)

$v_0 = 8\ m/s = v_{cm}$

$R = 20\ cm = 0{,}2\ m$

$x = v_0 t - \frac{1}{2} a_{cm} t^2$

$v = v_0 - a_{cm} t \Rightarrow$

$0 = v_0 - a_{cm} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{a_{cm}}$

$\left.\begin{array}{l} \alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta \\ a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \sigma\tau\alpha\theta \end{array}\right\}$ επιβράδυνση

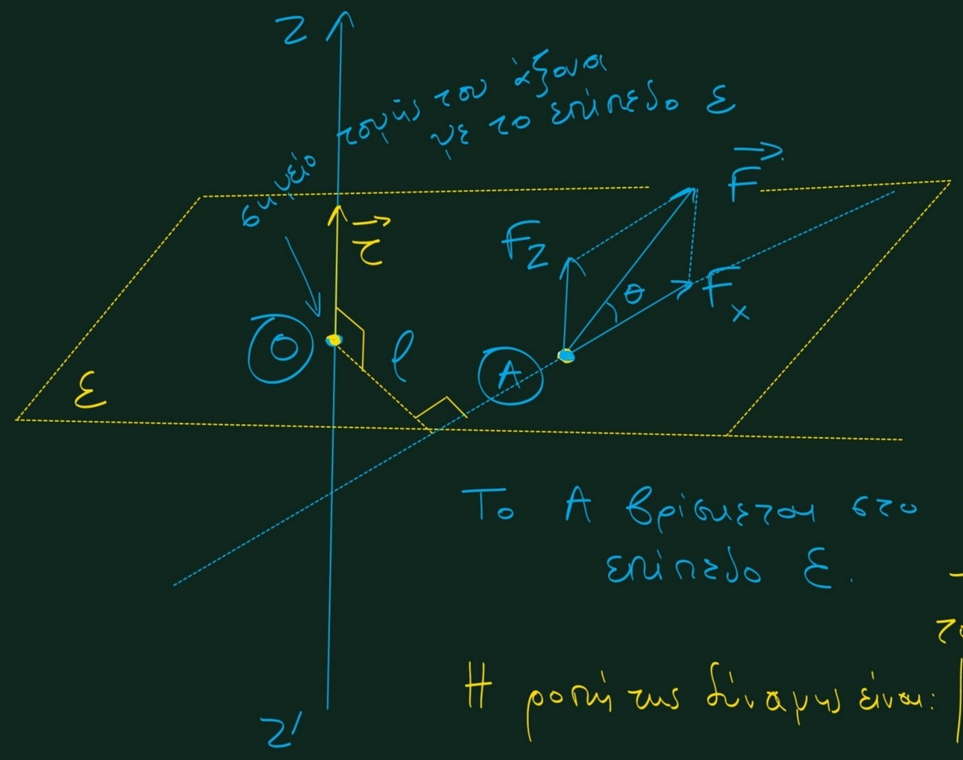
Άρα: $x = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a_{cm} t_1^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a_{cm}} - \frac{1}{2} a_{cm} \left(\frac{v_0}{a_{cm}}\right)^2$

$\Rightarrow x = \frac{v_0^2}{2 a_{cm}} \Rightarrow a_{cm} = \frac{v_0^2}{2x} = \frac{8^2}{2 \cdot 20} \Rightarrow$

$a_{cm} = \frac{64}{40}\ m/s^2$

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{64}{40 \cdot 0{,}2} = \frac{64}{8} = 8\ r/s^2$

Ροπή δύναμης ως προς άξονα.



Το Α βρίσκεται στο επίπεδο ε.

Η ροπή της δύναμης είναι: $|\vec{\tau}_{(z'z)}| = F_x \cdot l$ κατά μέτρο και η φορά του ίδιως στο σχήμα.

Για να βρούμε τη ροπή αυτή θεωρούμε επίπεδο κάθετο στον άξονα, που περνά από το σημείο εφαρμογής της δύναμης.

Αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες μία κάθετη στο επίπεδο και μία παράλληλη σ' αυτό.

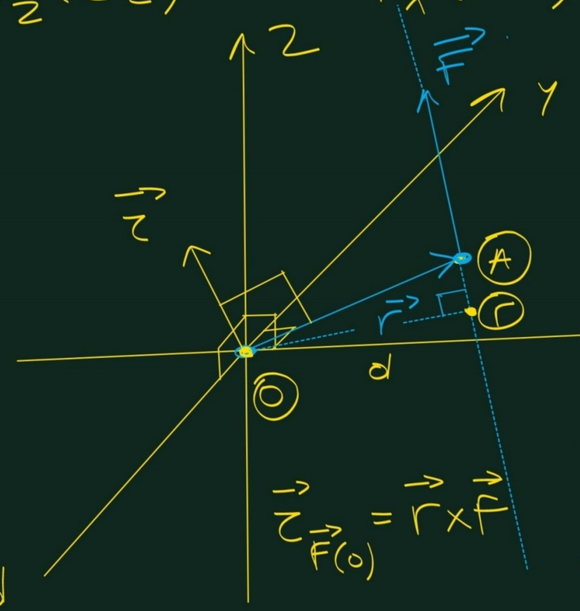
Άρα: $\vec{F_z} \parallel z'z$

Υπολογίζουμε την απόσταση του φορέα της F_x από το O (που είναι το σημείο τομής του άξονα z'z με το επίπεδο ε).

Αναλυτικότερα:

$$\vec{\tau}_{\vec{F}(z'z)} = \vec{\tau}_{\vec{F}_x(z'z)} + \cancel{\vec{\tau}_{\vec{F}_z(z'z)}}^{\,0} = \vec{\tau}_{\vec{F}_x(z'z)}$$

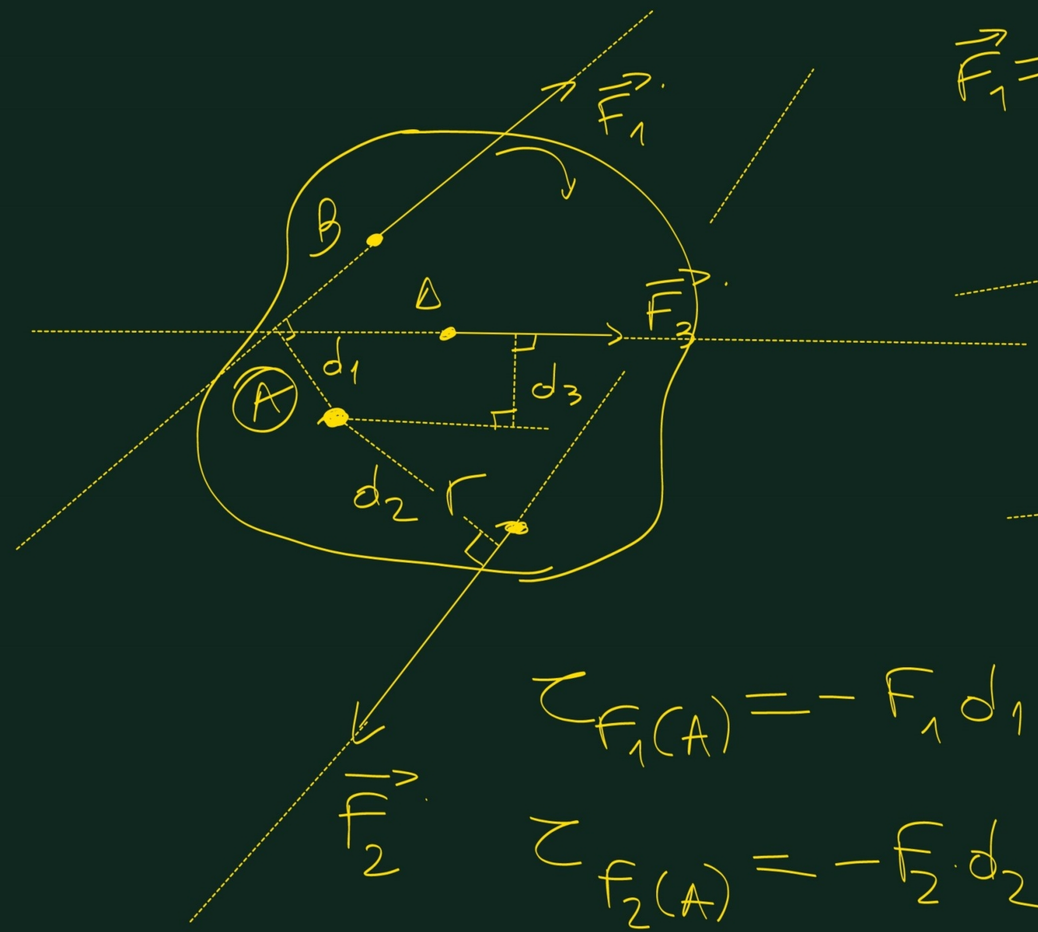
και $\left|\vec{\tau}_{\vec{F}_x(z'z)}\right| = F_x \cdot \ell$



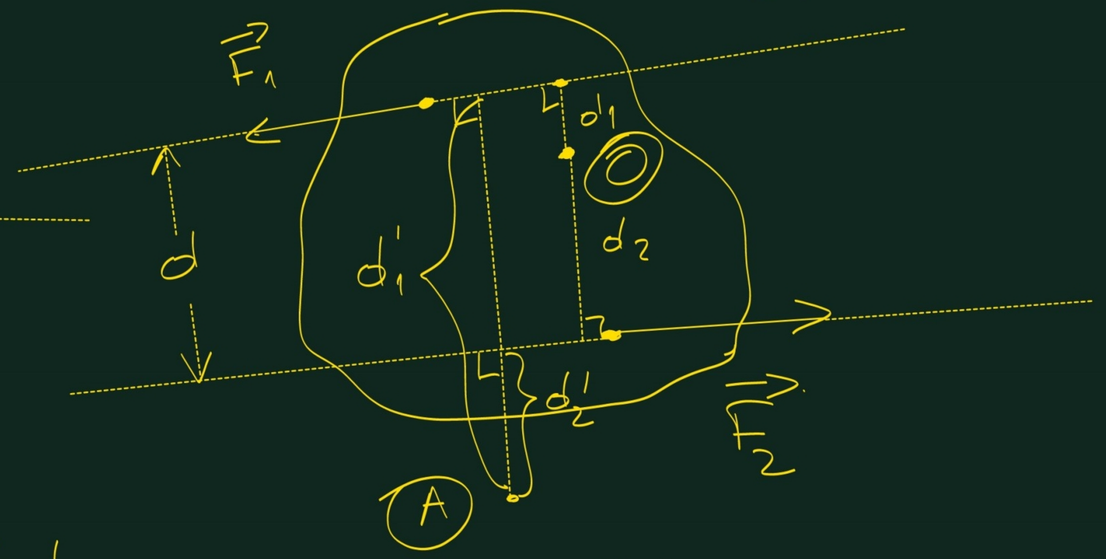
Η ροπή $\vec{\tau}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζει ο φορέας της $\vec{F}$ και το σημείο O και η φορά της βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού

Ροπή δύναμης ως προς σημείο.

Για να βρούμε τη ροπή αυτή υπολογίζουμε την απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο O, έστω d, και είναι: $\left|\vec{\tau}_{\vec{F}(O)}\right| = F \cdot d$



$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ Ροπή ζεύγους $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$



$$\tau_{F_1(A)} = -F_1 d_1$$

$$\tau_{F_2(A)} = -F_2 \cdot d_2$$

$$\tau_{F_3(A)} = -F_3 \cdot d_3$$

$$\tau_{F_1(O)} = +F_1 \cdot d_1$$

$$\tau_{F_2(O)} = +F_2 \cdot d_2$$

$$\Sigma\tau_{(O)} = F_1 d_1 + F_2 d_2 = F_1(d_1 + d_2) = F_1 \cdot d$$

αφού $F_1 = F_2 = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

$$\tau_{F_1(A)} = F_1 \cdot d_1'$$

$$\tau_{F_2(A)} = -F_2 \cdot d_2'$$

$$\Sigma\tau_{(A)} = F_1 d_1' - F_2 d_2' =$$

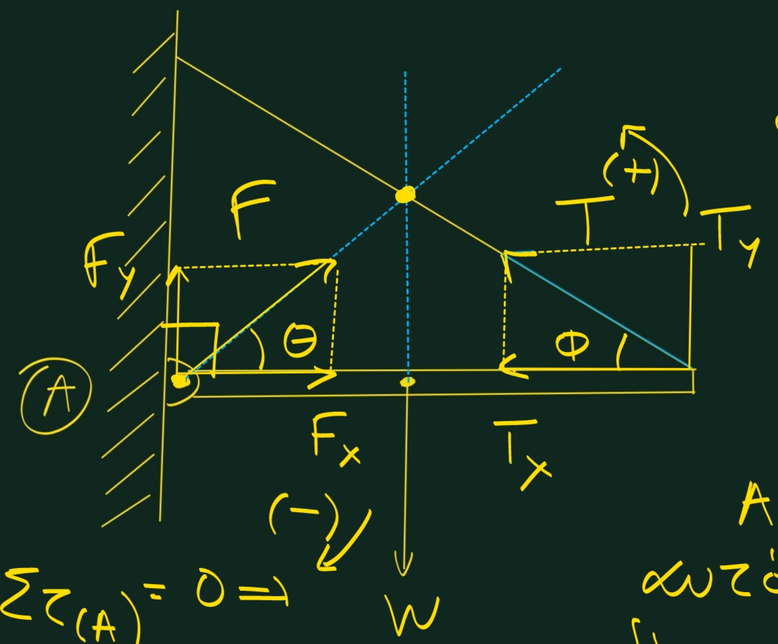
$$= F_1 (d_1' - d_2') = F_1 \cdot d$$

Άρα η ροπή ζεύγους είναι πάντα $F_1 d$ και είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο την υπολογίζουμε.

Παράδειγμα 4.4

$\Phi = 30^\circ$

$W = 400\,N$



$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow$$

$$\tau_{W(A)} + \tau_{T_y(A)} = 0 \Rightarrow$$

$$-W \cdot \frac{\ell}{2} + T_y \cdot \ell = 0 \Rightarrow$$

$$T_y = \frac{W}{2} \Rightarrow$$

Αν σε ένα στερεό ασκούνται τρεις δυνάμεις, τότε οι φορείς τους πρέπει να συντρέχουν.

Αν δεν συνέβαινε αυτό τότε η τρίτη δύναμη θα είχε ροπή ως προς το σημείο τομής των άλλων δύο και ισορροπία δεν θα υπήρχε.

$$T_y = \frac{W}{2} \Rightarrow T \cdot \eta\mu\varphi = \frac{W}{2} \Rightarrow$$

$$T \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{W}{2} \Rightarrow$$

$$T \cdot \frac{1}{2} = \frac{W}{2} \Rightarrow T = W = 400N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x = T \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ =$$

$$= 400\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$F_x = 200\sqrt{3}\ N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y = W \Rightarrow F_y + \frac{W}{2} = W \Rightarrow$$

$$F_y + 200 = 400 \Rightarrow F_y = 200\ N$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{200}{200\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = 200^2 \cdot 3 + 200^2 \Rightarrow$$

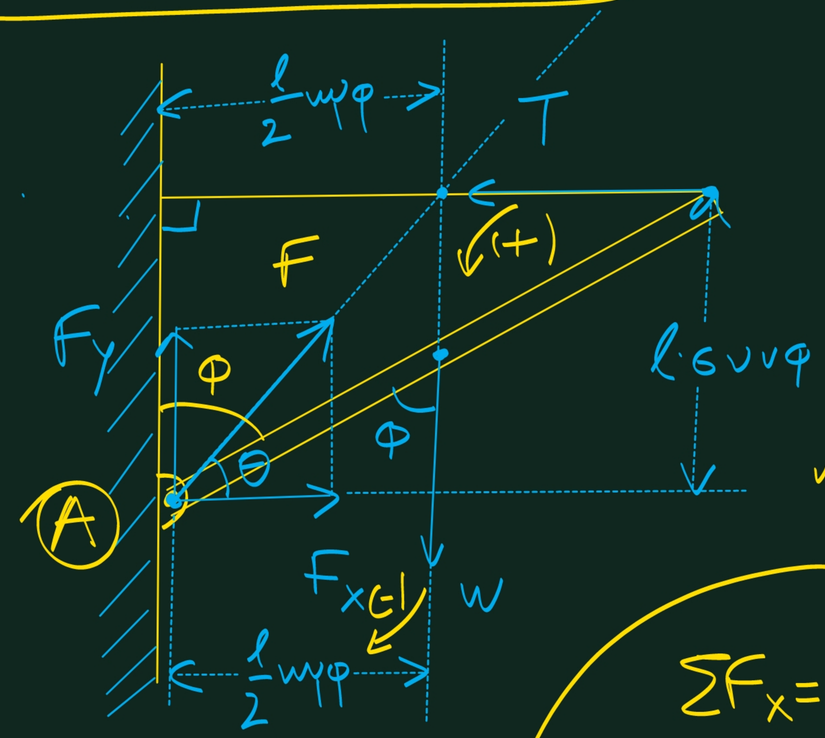
$$F^2 = 200^2 \cdot 4 \Rightarrow F = 400N$$

Άρα: $T = 400N$

$F = 400N$

και $\theta = 30^\circ$

Ασκ. 4.56 σελ. 144



$W = 100\,N$

$\varphi = 60^\circ$.

Όπως φαίνεται στο σχήμα, οι φορείς των $\vec{F}$, $\vec{T}$ και $\vec{W}$ συντρέχουν σε σημείο που είναι μέσο της υποτείνουσας υάθετης του τριγώνου.

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow \tau_{W(A)} + \tau_{T(A)} = 0 \Rightarrow$$

$$-W\cdot\frac{l}{2}\eta\mu\varphi + T\cdot l\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi\,\frac{W}{2} = T\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T = \frac{W\cdot\eta\mu\varphi}{2\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{100\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\sigma\upsilon\nu 60^\circ} = \frac{50\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$T = 50\sqrt{3}\,N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T \Rightarrow$$

$$F_x = 50\sqrt{3}\,N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y = W \Rightarrow$$

$$F_y = 100\,N$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{100}{50\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 = 50^2\cdot 3 + 50^2\cdot 4 = 50^2\cdot 7 \Rightarrow$$

$$F = 50\sqrt{7}\,N$$

A64.4.57