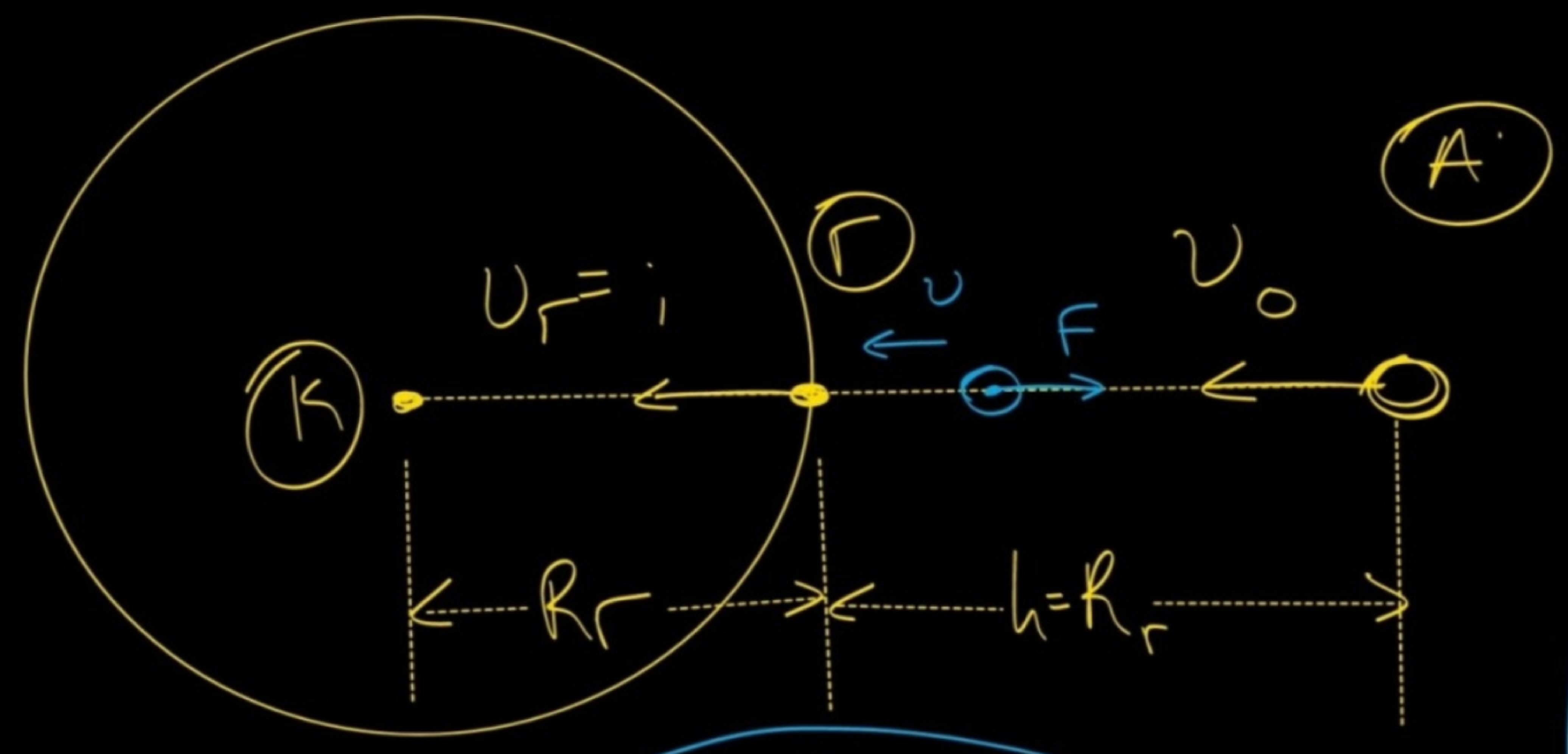
Ασκ. 104 σελ. 203

α) ΑΔΕ: (Α) → (Γ): $K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow \frac{1}{2} m \upsilon_0^2 - \frac{G M_\Gamma m}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2} m \upsilon_\Gamma^2 - \frac{G M_\Gamma m}{R_\Gamma} \Rightarrow$



$$\frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h} = \frac{\upsilon_\Gamma^2}{2} - \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Rightarrow$$

$$\upsilon_0^2 - \frac{2 g_0 R_\Gamma^2}{2 R_\Gamma} = \upsilon_\Gamma^2 - 2 g_0 R_\Gamma \Rightarrow$$

$$\upsilon_0^2 - g_0 R_\Gamma = \upsilon_\Gamma^2 - 2 g_0 R_\Gamma \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma^2 = \upsilon_0^2 + g_0 R_\Gamma = (8 \cdot 10^3)^2 + 10 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma^2 = (8 \cdot 10^3)^2 + (8 \cdot 10^3)^2 \Rightarrow \upsilon_\Gamma^2 = 2 \cdot (8 \cdot 10^3)^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma = 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \, m/s.$$

$R_\Gamma = 6.400 \, Km = 6{,}4 \cdot 10^3 \, Km =$
$= 6{,}4 \cdot 10^6 \, m.$

Με ΘΜΚΕ θα είχαμε: ΘΜΚΕ: (Α)→(Γ): $\Delta K = W_{(A\to\Gamma)} \Rightarrow K_\Gamma - K_A = m(V_A - V_\Gamma) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv_\Gamma^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = m\cdot\left(-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h} - \left(-\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}\right)\right) \Rightarrow$$

$$v_\Gamma^2 - v_0^2 = -\frac{2g_0R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} + \frac{2g_0R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Rightarrow$$

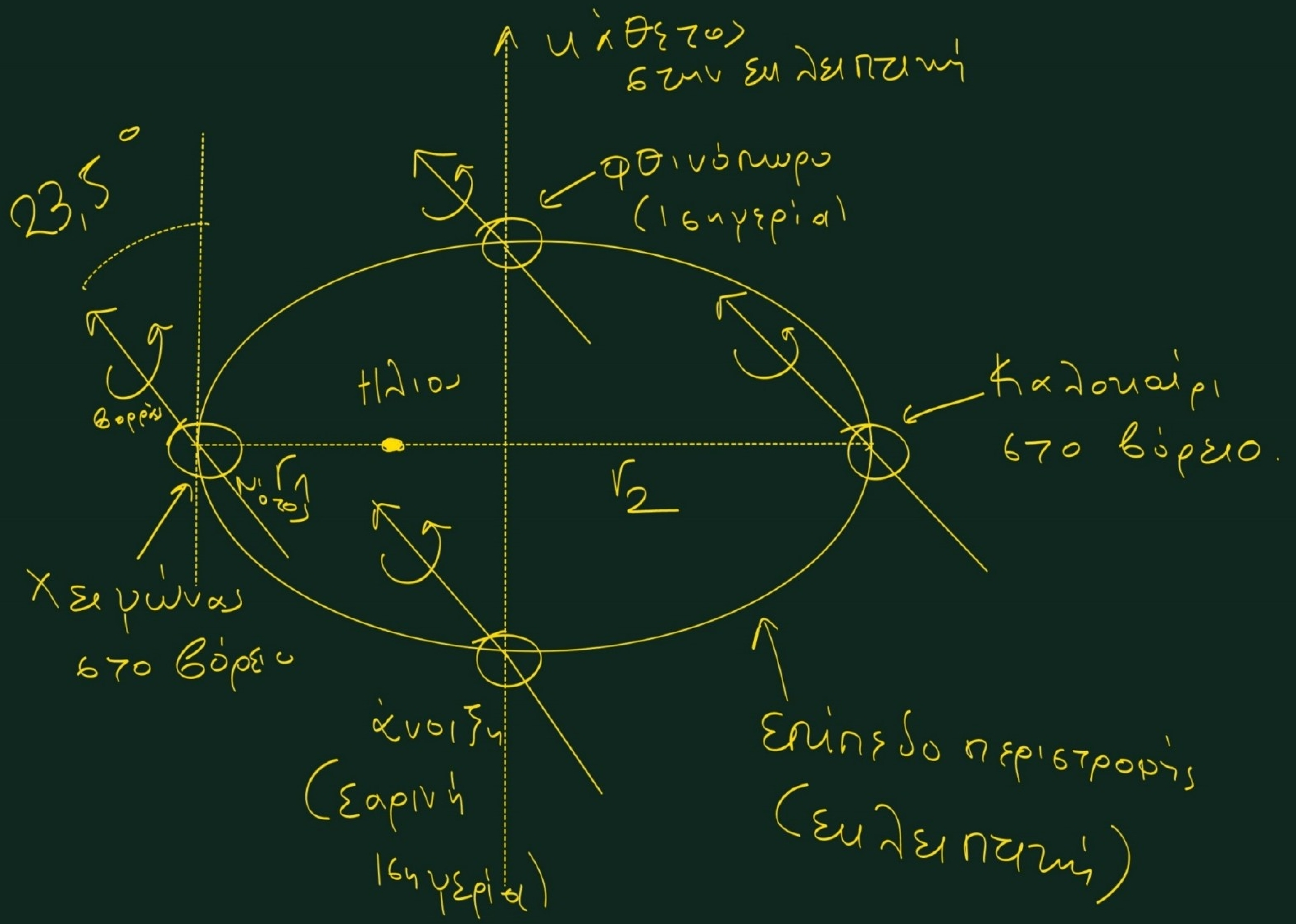
$$v_\Gamma^2 = v_0^2 + g_0R_\Gamma.$$

β) ΘΜΚΕ: (Α)→(Γ): $\Delta K = W_{(A\to\Gamma)} + W_F \Rightarrow \cancelto{0}{K_\Gamma} - K_A = m(V_A - V_\Gamma) - F\cdot h \Rightarrow$

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = m\left(-\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}\right) - F\cdot h \Rightarrow F\cdot h = m\left(-\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} + \frac{2GM_\Gamma}{2R_\Gamma}\right) \Rightarrow$$

$$F\cdot h = \frac{GM_\Gamma m}{2R_\Gamma} \Rightarrow F\cdot R_\Gamma = \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} \Rightarrow F\cdot R_\Gamma = \frac{g_0R_\Gamma^2\cdot m}{R_\Gamma} \Rightarrow F = \frac{mg_0\cancel{R_\Gamma^2}}{\cancel{R_\Gamma^2}} \to$$

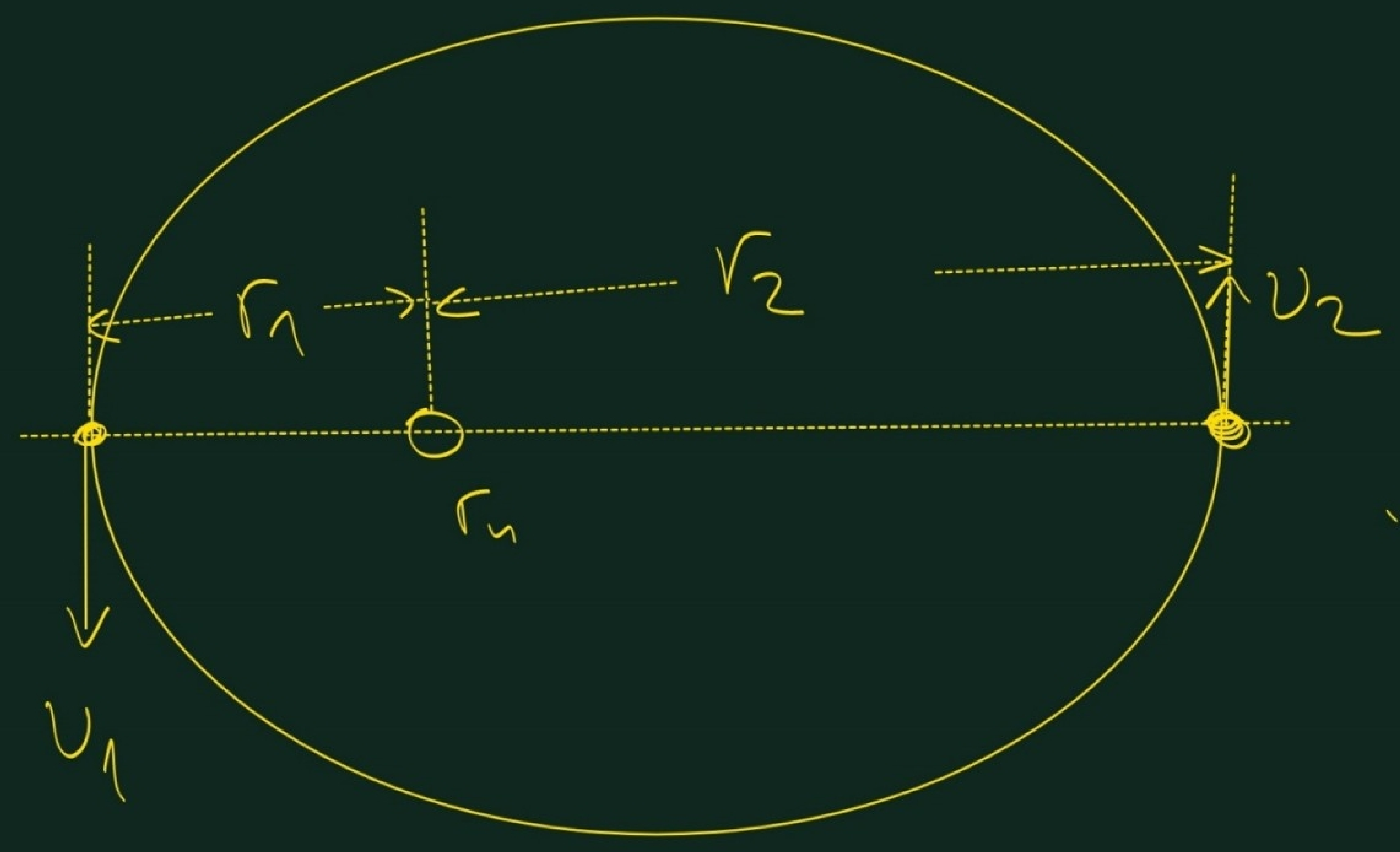
$$F = mg_0 = 8\cdot10^3\cdot10 \Rightarrow F = 8\cdot10^4\,N$$



η κάθετος
στην ελλειπτική
23,5°
φθινόπωρο
(ισημερία)
Ήλιος
Καλοκαίρι
στο βόρειο.
r_2
Χειμώνας
στο βόρειο
άνοιξη
(εαρινή
ισημερία)
επίπεδο περιστροφής
(ελλειπτική)

Ασκ. 105.)

$r_1 = 7\cdot 10^6\,m$, $r_2 = 9\cdot 10^6\,m$, $\upsilon_1 = 8\cdot 10^3\,m/s$.



α) Δεδομένου ότι η δύναμη της βαρύτητας που ασκεί η Γη στο δορυφόρο είναι κεντρική, η περιστροφική στροφορμή του διατηρείται.

$$L = m\upsilon r$$

Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = m\upsilon_1\cdot r_1 \\ L_2 = m\cdot \upsilon_2\cdot r_2 \\ L_1 = L_2 \end{array}\right| \Rightarrow \cancel{m}\upsilon_1 r_1 = \cancel{m}\upsilon_2 r_2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 r_1 = \upsilon_2 r_2 \Rightarrow$$

$$8\cdot 10^3\cdot 7\cdot \cancel{10^6} = \upsilon_2\cdot 9\cdot \cancel{10^6} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{56}{9}\cdot 10^3\,m/s = \left(6+\frac{2}{9}\right)\cdot 10^3 \simeq 6{,}22\cdot 10^3\,m/s.$$

β' τρόπος (Με διατήρηση ενέργειας).

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m \upsilon_1^2 - \frac{G M_r \cdot m}{r_1} = \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 - \frac{G M_r \cdot m}{r_2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 - \frac{2 G M_r}{r_1} = \upsilon_2^2 - \frac{2 G M_r}{r_2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - \frac{2 G M_r}{r_1} + \frac{2 G M_r}{r_2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - 2 G M_r \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow \upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - 2 g_0 R_r^2 \left(\overset{r_2}{\frac{1}{r_1}} - \overset{r_1}{\frac{1}{r_2}} \right) \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$* \quad \upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - 2 g_0 R_r^2 \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 - 2 \cdot 10 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6)^2 \cdot \frac{9 \cdot 10^6 - 7 \cdot 10^6}{7 \cdot 9 \cdot 10^{12}} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2^2 = (8 \cdot 10^3)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{6{,}4^2 \cdot \cancel{10^{12}} \cdot 2 \cdot 10^6}{63 \cdot \cancel{10^{12}}} \Rightarrow$$

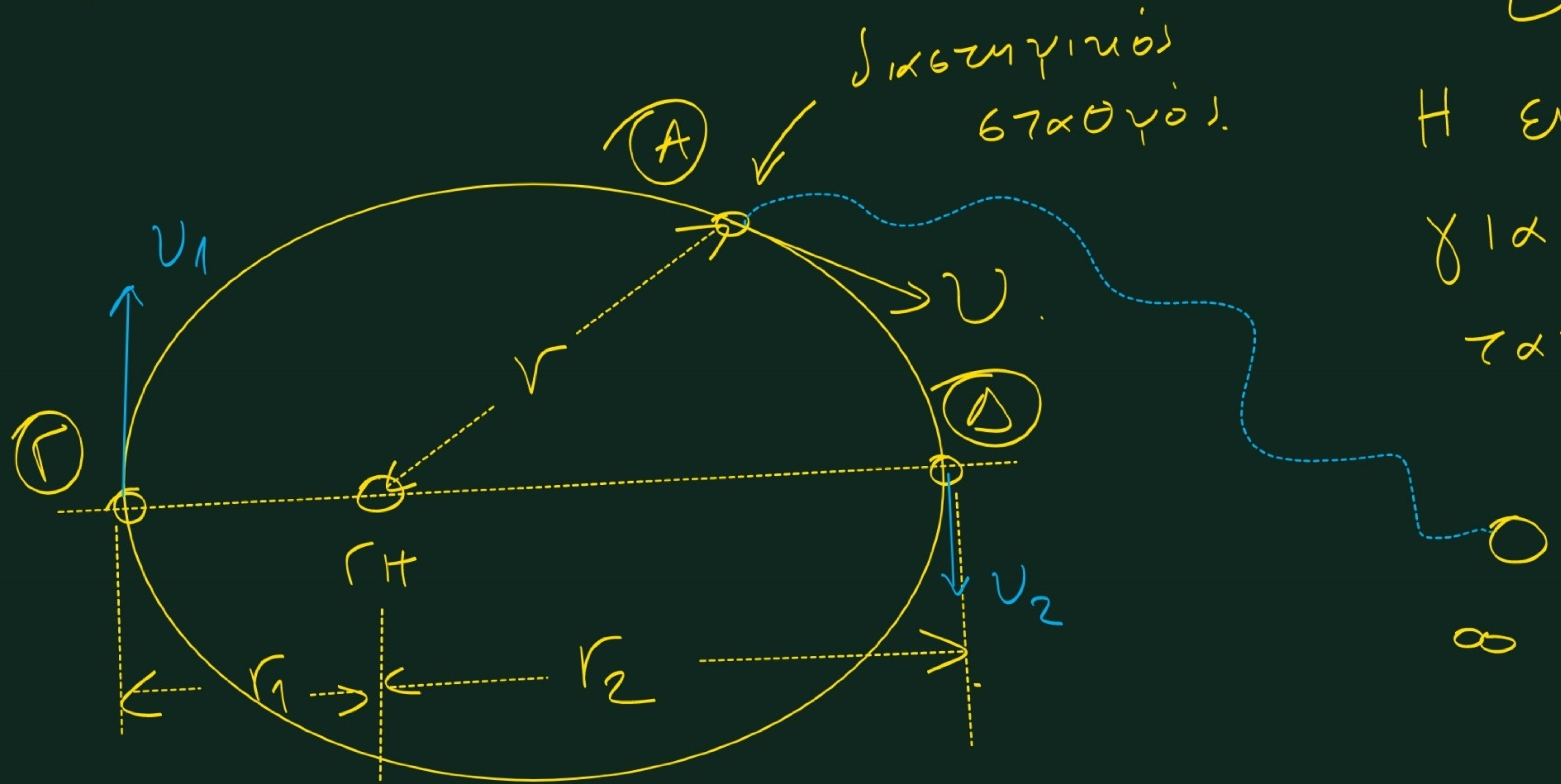
$$\upsilon_2^2 = (8 \cdot 10^3)^2 - 2 \cdot \frac{64 \cdot 6{,}4 \cdot 2 \cdot 10^6}{63} \simeq$$

$$64 \cdot 10^6 - 25{,}6 \cdot 10^6 =$$

$$= 38{,}4 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 \simeq 6{,}16 \cdot 10^3 \ m/s.$$

β)



$$GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2$$

Σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς η ενέργεια είναι σταθερή:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_\Gamma m}{r} = \text{σταθερή}$$

Η ενέργεια που πρέπει να του δώσουμε για να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα είναι:

$$E_\infty = E_A + W = E_\Gamma + W$$

(αφού $E_A = E_\Gamma = E_\Delta$)

$E_\infty = 0$ Άρα:

$$0 = E_\Gamma + W \Rightarrow W = -E_\Gamma = -\left(\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_\Gamma m}{r_1}\right) \Rightarrow$$

$$W = \frac{GM_\Gamma m}{r_1} - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$(60-2)(60+4) = 3600 - 120 + 240 - 8 =$$
$$= 3720 + 8 = 3728$$

$$W = \frac{G M_\Gamma m}{r_1} - \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow$$

$$W = \frac{g_0 R_\Gamma^2 \cdot m}{r_1} - \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow$$

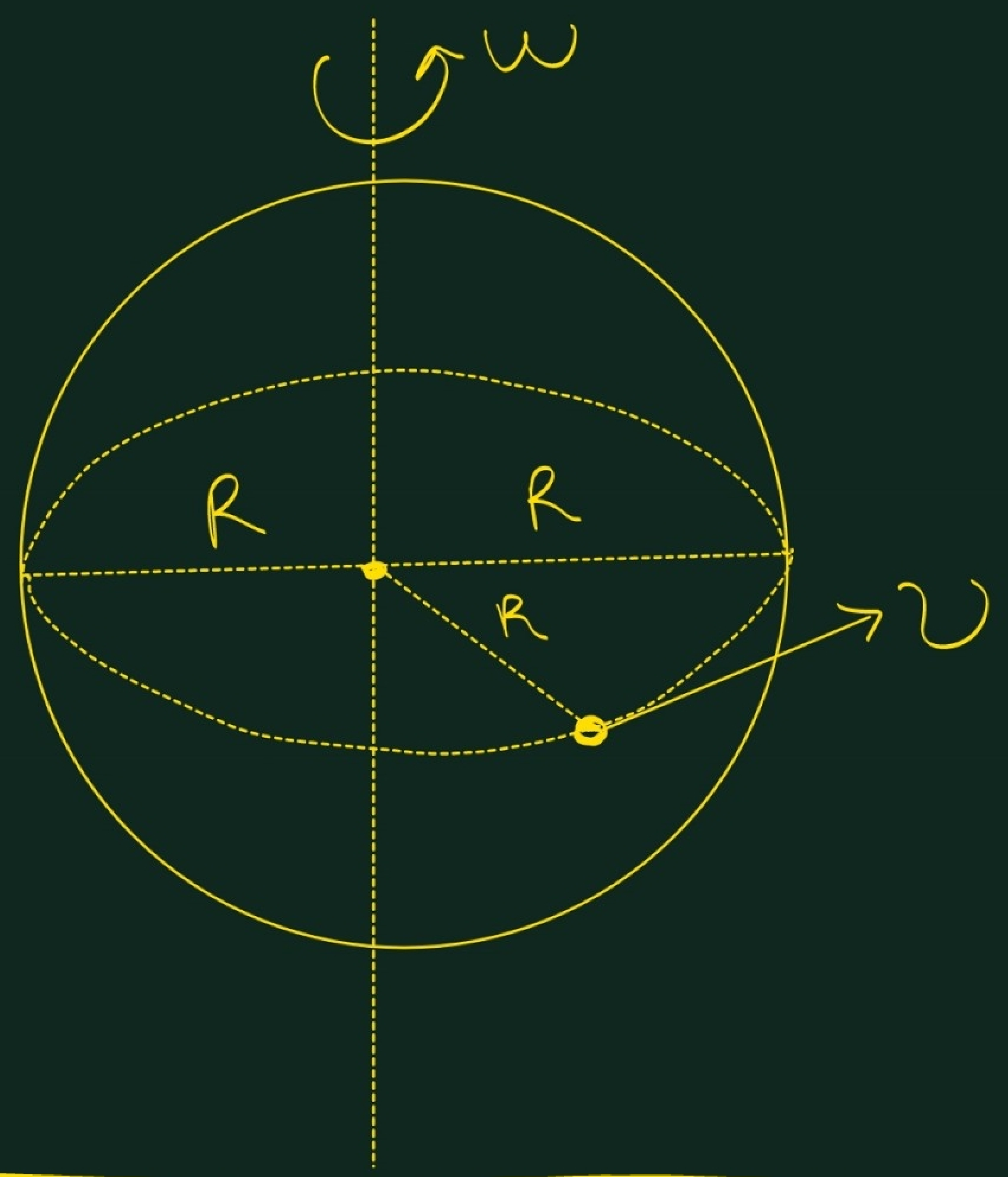
$$W = \frac{10 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6)^2 \cdot \cancel{140}^{\,20}}{\cancel{7}_{\,1} \cdot 10^6} - \frac{1}{2} \cdot 140 \cdot (8 \cdot 10^3)^2 =$$

$$= \frac{10 \cdot 6{,}4^2 \cdot 10^{12} \cdot 20}{10^6} - 70 \cdot 64 \cdot 10^6 = 200 \cdot 6{,}4^2 \cdot 10^6 - 70 \cdot 64 \cdot 10^6 =$$
$$= 2 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 10^6 - 70 \cdot 64 \cdot 10^6 =$$
$$= (128 - 70) \cdot 64 \cdot 10^6 = 58 \cdot 64 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

Άρα: $W = 3728 \cdot 10^6 \Rightarrow$

$$W = 3{,}728 \cdot 10^9 \text{ Joule.}$$

Θέμα 4) Αστέρας νετρονίων



$f = 700\,Hz = 700$ περιστροφές/sec

$R = 10\,km = 10 \cdot 10^3 = 10^4\,m.$

$GM = 2 \cdot 10^{20}\,N \cdot m^2/kg.$

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2} \Rightarrow N = GM_1 \cdot \frac{kg}{m^2} \Rightarrow$$

$$GM_1 = \frac{N \cdot m^2}{kg} = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg} = \frac{m^3}{s^2}.$$

4.1) $\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f \Rightarrow$

$$\upsilon = 2\pi \cdot 10^4 \cdot 700 \Rightarrow \upsilon = 14\pi \cdot 10^6\,m/s.$$

4.2)

$$a_k = \frac{u^2}{R} = \frac{(14\pi \cdot 10^6)^2}{10^4} \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{196\pi^2 \cdot 10^{12}}{10^4} \Rightarrow$$

$$a_k \simeq 196 \cdot 10 \cdot 10^8 \Rightarrow$$

$$a_k \simeq 1{,}96 \cdot 10^{11}\ m/s^2$$

4.3) Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων είναι:

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{2 \cdot 10^{20}}{(10^4)^2} \Rightarrow$$

$$g = \frac{2 \cdot 10^{20}}{10^8} \Rightarrow g = 2 \cdot 10^{12}\ m/s^2$$

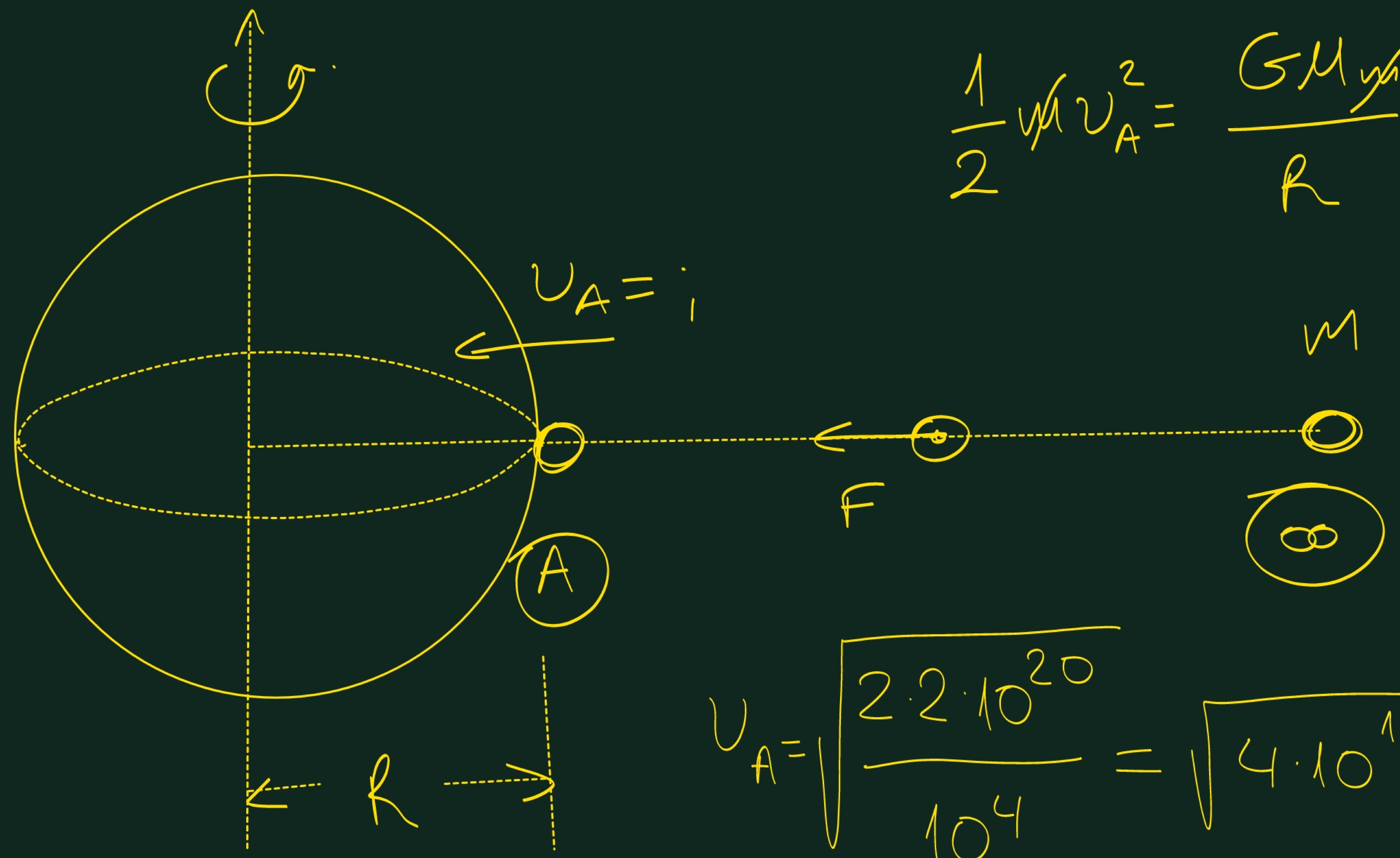
$$a_k \simeq 2 \cdot 10^{11}\ m/s^2$$

Άρα: $g \simeq 10 a_k$

4.4.)

$$K_\infty + U_\infty = K_A + U_A \Rightarrow 0 + 0 = \frac{1}{2} m \upsilon_A^2 - \frac{GMm}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \upsilon_A^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R} \Rightarrow \upsilon_A^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$



$\upsilon_\infty = 0$

υ_A = ταχύτητα διαφυγής από τον αστέρα νετρονίων.

$$\upsilon_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{20}}{10^4}} = \sqrt{4 \cdot 10^{16}} = 2 \cdot 10^8 \, m/s.$$

$$C = 300.000 \, km/s = 3 \cdot 10^5 \, km/s = 3 \cdot 10^8 \, m/s$$

Άρα: $\frac{\upsilon_A}{C} = \frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} = \frac{2}{3}$

$$\upsilon_A = \frac{2}{3} C.$$