

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 6ο

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

- Ο τόκος T σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο $\varepsilon\%$, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000 \frac{\varepsilon}{100}$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του T . Για παράδειγμα, αν $\varepsilon = 3$, τότε $T = 150$, ενώ αν $\varepsilon = 5$, τότε $T = 250$ κτλ.
- Το διάστημα S σε km που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα 2h, με μέση ταχύτητα v σε km/h, δίνεται από τον τύπο $S = 2v$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του v αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S . Για παράδειγμα, αν $v = 60$, τότε $S = 120$, ενώ αν $v = 70$, τότε $S = 140$ κτλ.
- Το εμβαδό E ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = \pi \rho^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του E . Για παράδειγμα, αν $\rho = 1$, τότε $E = \pi$, ενώ, αν $\rho = 2$, τότε $E = 4\pi$ κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

✓ Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.

✓ Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται συνάρτηση από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f .

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f , g , h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.

Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε « y ίσον f του x ». Το $f(x)$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x** . Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f , ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$.

Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

Έτσι π.χ. η συνάρτηση f , με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

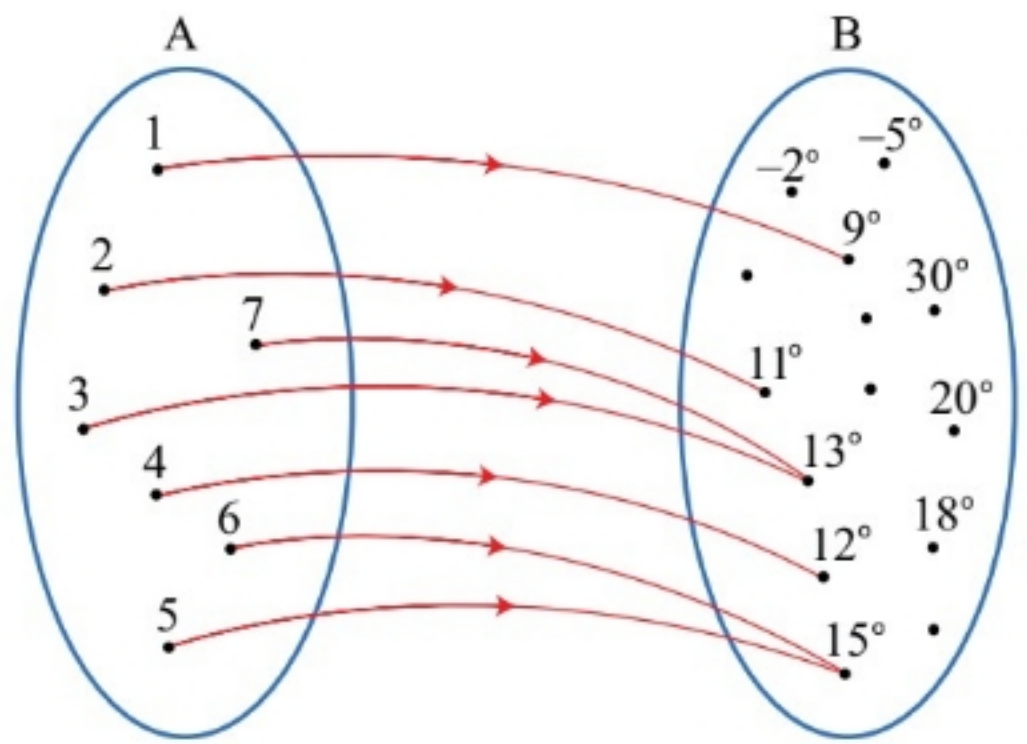
$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x}$$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Έστω f η **συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της**.



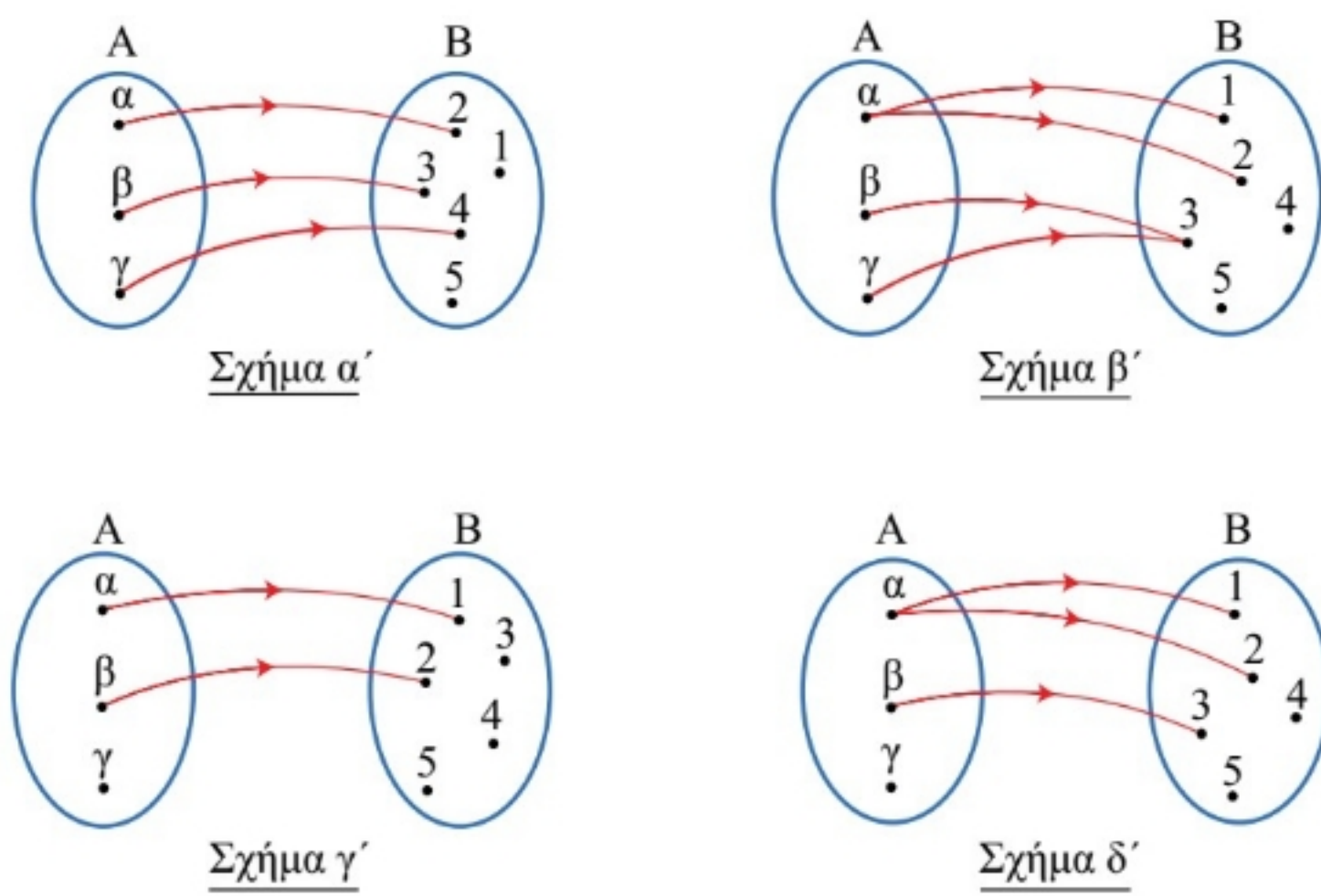
Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ενώ το σύνολο τιμών το σύνολό $f(A) = \{9^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 15^\circ\} \subseteq B$. Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$.

- Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B.
- Μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18°).
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο 13°).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{a, \beta, \gamma\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

- ✓ Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B.
- ✓ Το σχήμα (β) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $a \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του B.
- ✓ Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του B.
- ✓ Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση. Πρώτον διότι το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του B και δεύτερον διότι το $a \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του B.



Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση f , πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της A
- Το σύνολο B και
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f: A \rightarrow B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**.

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση f , με $f(x) = \sqrt{1-4x}$ » ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-4x}$ » ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y = \sqrt{1-4x}$ ».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.
- Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-4x}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1-4x \geq 0$, ενώ το σύνολο B είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{αν } x < 0 \\ x-1, & \text{αν } x \geq 0\end{cases}.$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1 , 0 και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

✓ Για $x = -1 < 0$, από τον κλάδο $f(x) = x^2 + 1$, έχουμε:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

✓ Για $x = 0$, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:

$$f(0) = 0 - 1 = -1.$$

✓ Τέλος, για $x = 1 \geq 0$, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:

$$f(1) = 1 - 1 = 0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και, γενικά, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα x για το συμβολισμό του τυχαιού στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα.

Έτσι, για παράδειγμα, οι

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad g(t) = t^2 - 4t + 7 \quad \text{και} \quad h(s) = s^2 - 4s + 7$$

ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης».

Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$f(\quad) = (\quad)^2 - 4(\quad) + 7,$$

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Έτσι για να υπολογίσουμε το $f(-2)$ απλά τοποθετούμε το -2 στις θέσεις, που ορίζουν οι παρενθέσεις:

$$\begin{aligned}f(-2) &= (-2)^2 - 4(-2) + 7 \\ &= 4 + 8 + 7 = 19\end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned}f(3x) &= (3x)^2 - 4(3x) + 7 \\ &= 9x^2 - 12x + 7\end{aligned}$$

Υπάρχει όμως και μια παραπέρα απλοποίηση των εκφράσεών μας που σχετίζονται με συναρτήσεις. Πολλές φορές αντί να λέμε «η συνάρτηση $s = \frac{1}{2}gt^2$ », θα λέμε «η

Ερ. 30 Σεπ. 193.) (απόδειξη)

Εστω ότι υπάρχει τριβή.

$$F - T = m \cdot a \quad (1)$$

$$2F - T = m \cdot 2a \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη (1) επί 2 :

$$2F - 2T = 2 \cdot m \cdot a \quad (1')$$

Αφαιρούμε από τη (2)

$$\text{την } (1') :$$

$$2F - T - (2F - 2T) = m \cdot 2a - 2 \cdot m \cdot a =$$

$$\cancel{2F} - T - \cancel{2F} + 2T = \cancel{2ma} - \cancel{2ma} =$$

$$T = 0 \quad \text{άρα δεν υπάρχει τριβή}$$

όπως το (B).

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+3, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}.$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-5), f(0)$ και $f(6)$.

4. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:

"Σκέψου έναν φυσικό αριθμό, πρόσθεσε σ' αυτόν το 1, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 4 και στο γινόμενο πρόσθεσε το τετράγωνο του αριθμού".

i) Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις τιμές της για $x = 0, x = 1, x = 2$ και $x = 3$. Τι παρατηρείτε;

ii) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$$f(x) = 36, \; f(x) = 49, \; f(x) = 100 \text{ και } f(x) = 144.$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=\frac{4}{x-1}+5$

$g(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

και

$h(x)=\frac{1}{x^2+1}.$

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$f(x)=7$

$g(x)=2$

και

$h(x)=\frac{1}{5}.$

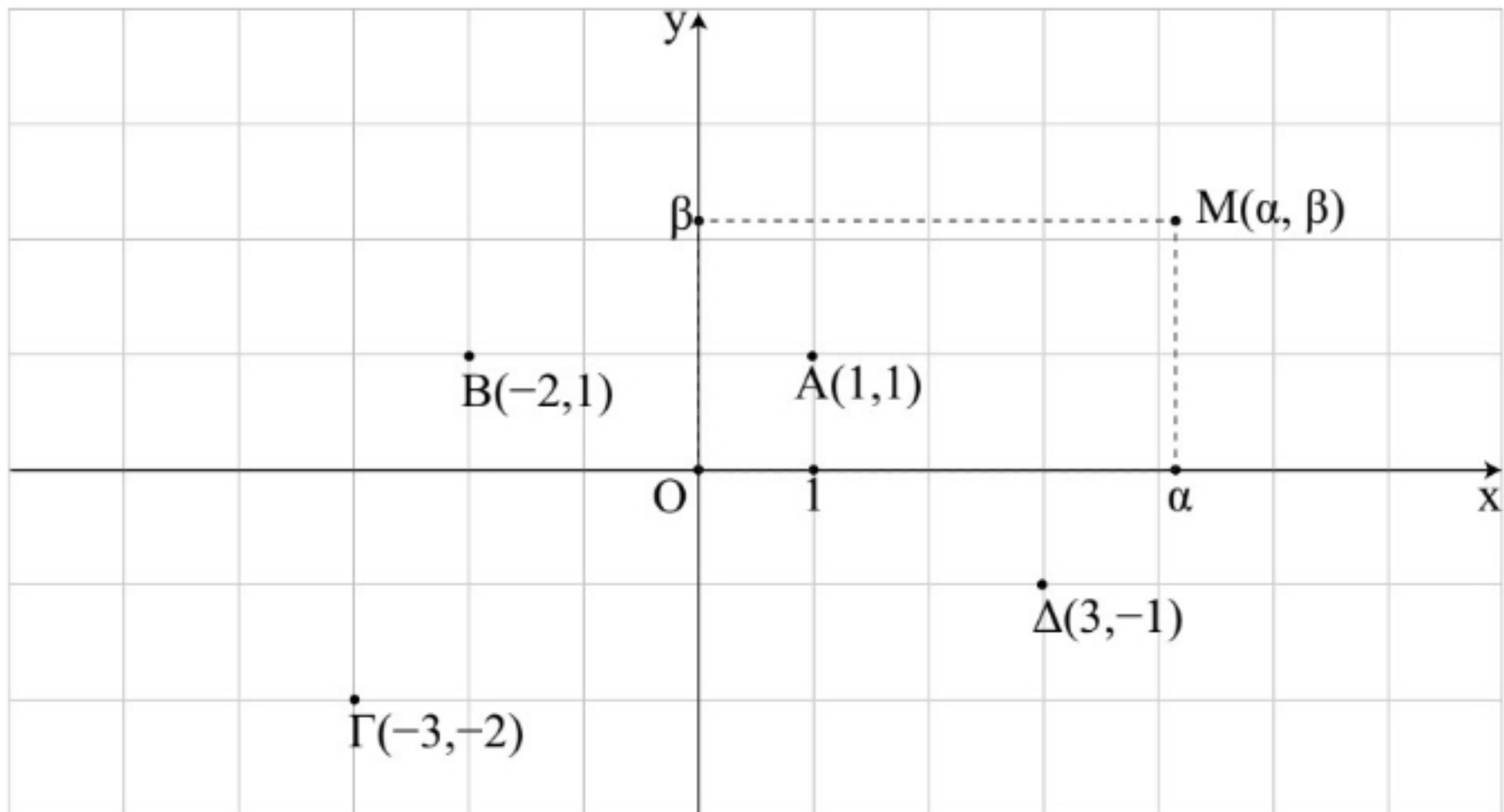
6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο O . Από αυτούς ο οριζόντιος $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x** , ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y** .

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο M του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Οι αριθμοί **a, b** λέγονται **συντεταγμένες** του M . Ειδικότερα ο **a** λέγεται **τετμημένη** και ο **b** **τεταγμένη** του σημείου M . Το σημείο M που έχει συντεταγμένες **a** και **b** συμβολίζεται με **$M(a, b)$** ή, απλά, με **(a, b)** .

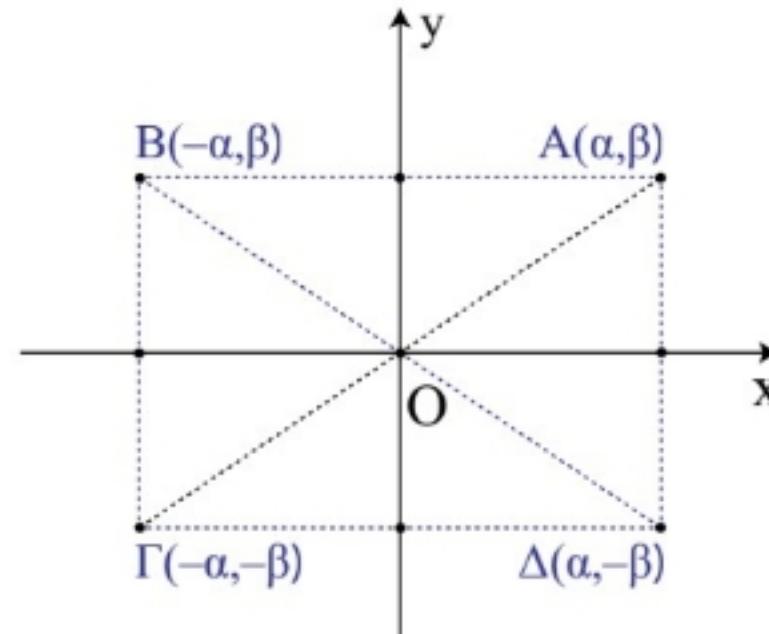
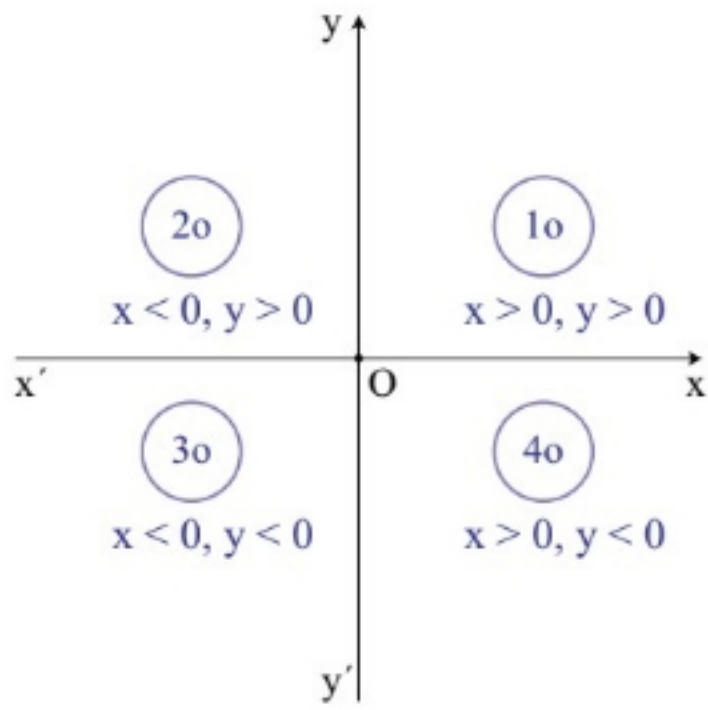
Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

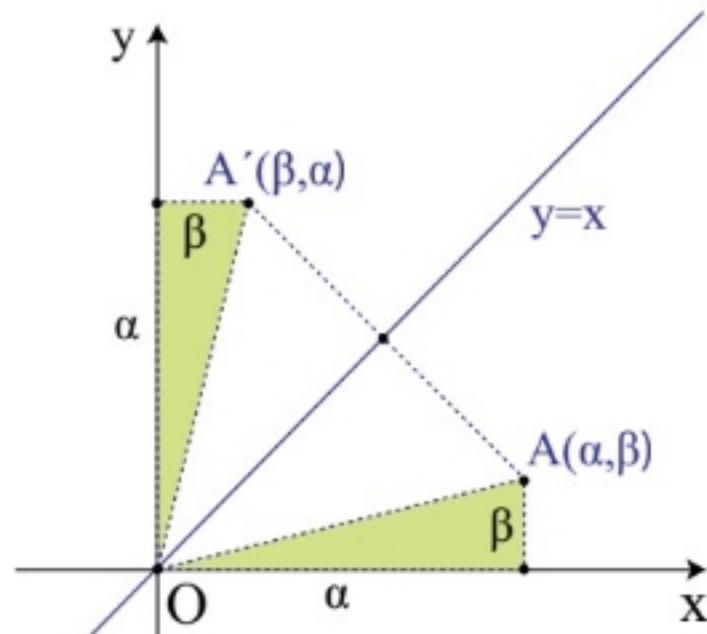
Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Οxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:

- Τα σημεία του άξονα x'x και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα y'y και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών xOy, yOx', x'Oy' και y'Ox και ονομάζεται 1ο, 2ο, 3ο και 4ο, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.
- Αν A(α,β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x'x είναι το σημείο Δ(α,-β), που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη (Σχ. α').
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο Β(-α,β), που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη (Σχ. α').
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Γ(-α,-β), που έχει αντίθετες συντεταγμένες (Σχ. α').
 - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α'(β,α) που έχει τετμημένη την τεταγμένη του Α και τεταγμένη την τετμημένη του Α (Σχ. β').



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Απόσταση σημείων

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία αυτού. Θα δείξουμε ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

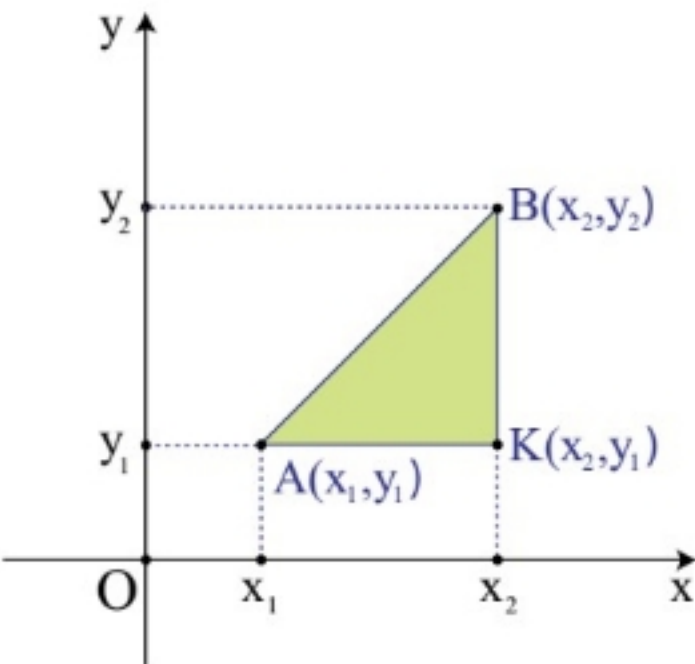
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{K} \hat{A} \hat{B}$ του διπλανού σχήματος έχουμε:

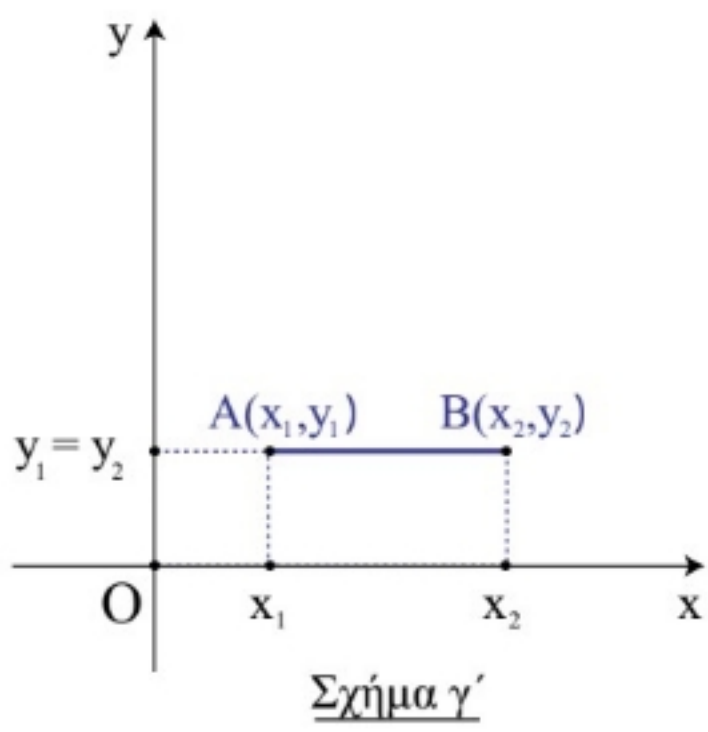
$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (KA)^2 + (KB)^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

οπότε:

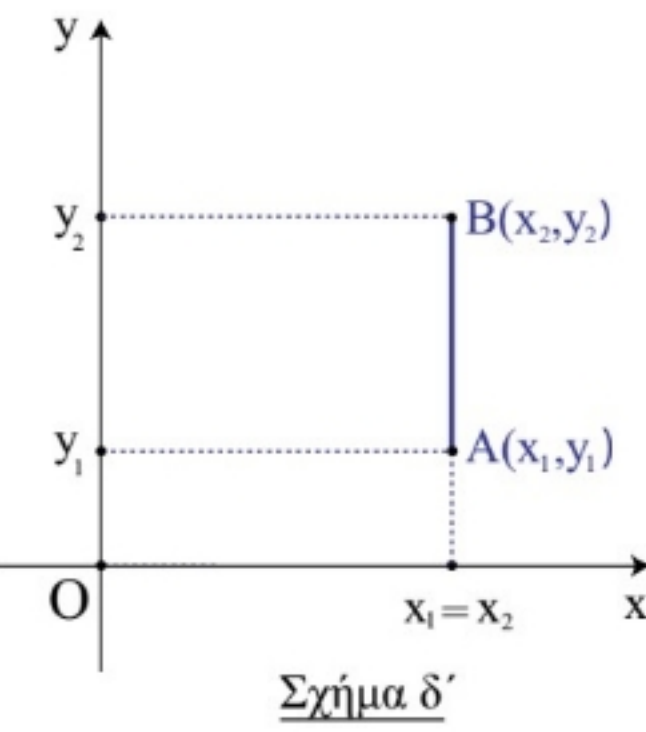
$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η AB είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ (Σχήμα γ') ή παράλληλη με τον άξονα $y'y$ (Σχήμα δ').



Σχήμα γ'



Σχήμα δ'

Για παράδειγμα, αν $A(3,1)$, $B(3,5)$ και $\Gamma(-1,1)$ είναι οι κορυφές ενός τριγώνου $\hat{A} \hat{B} \hat{\Gamma}$, τότε θα είναι:

$$(AB) = \sqrt{(3-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

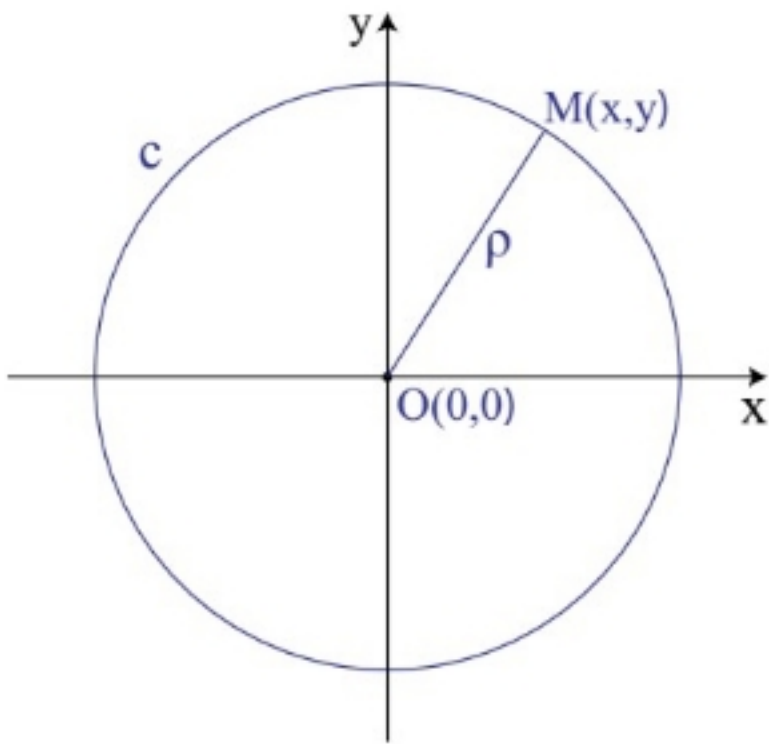
$$(A\Gamma) = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Αφού, λοιπόν, είναι $(AB) = (A\Gamma)$, το τρίγωνο $\triangle B\hat{A}\Gamma$ είναι ισοσκελές και επειδή επιπλέον ισχύει $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 32 = (B\Gamma)^2$, το τρίγωνο $\triangle B\hat{A}\Gamma$ είναι και ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα ρ . Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C , αν και μόνο αν ισχύει $x^2 + y^2 = \rho^2$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι προφανές ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C , αν και μόνο αν ισχύει $(OM) = \rho$.

Όμως $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε έχουμε:

$$(OM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$

Επομένως το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο $C(O,\rho)$, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

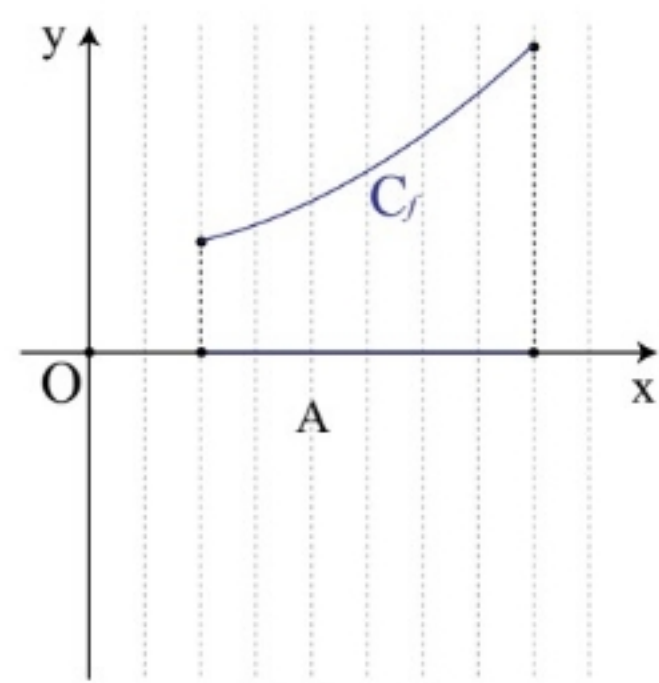
$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (1)$$

Η εξίσωση (1), που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων του κύκλου $C(O, \rho)$ και μόνο από αυτές, λέγεται **εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα ρ** . Για παράδειγμα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$ είναι η $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται και **μοναδιαίος κύκλος**.

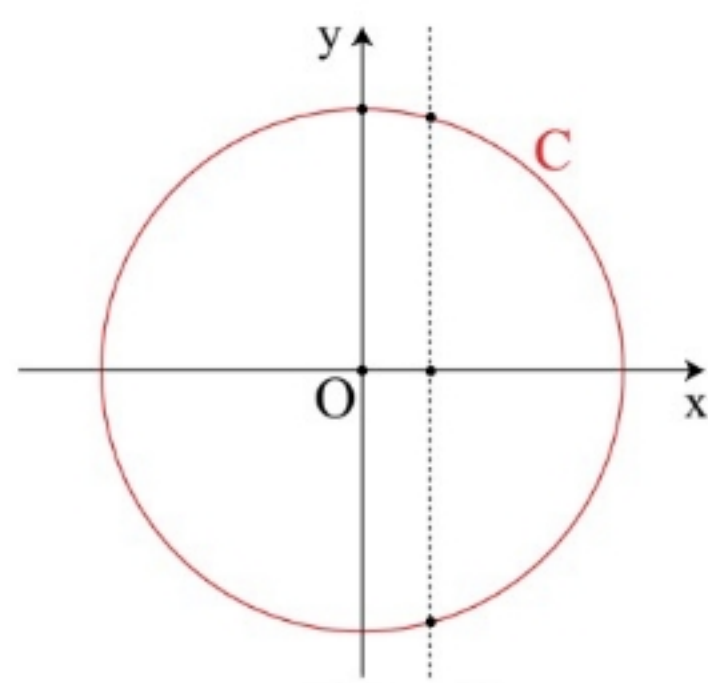
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση της f** και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f . Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y = f(x)$.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο ($\Sigma\chi$ α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης ($\Sigma\chi$ β').



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x ' x και τούτο διότι η γραφική παράσταση της $-f$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x ' x .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g , που είναι ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία:

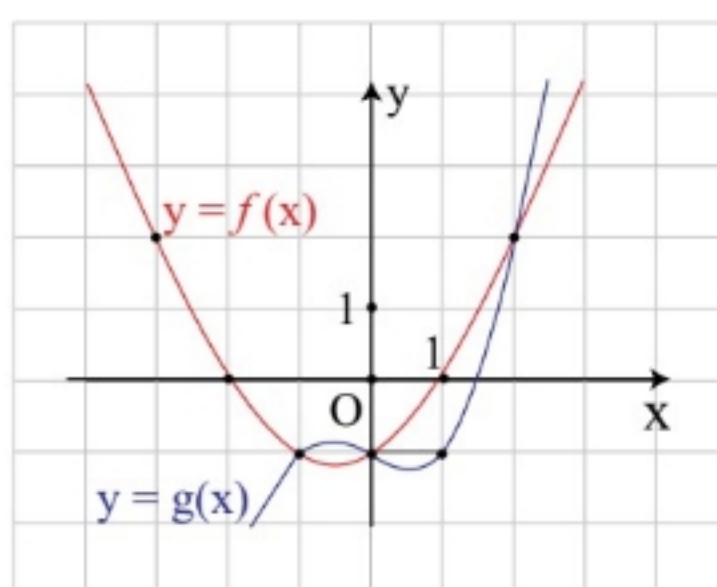
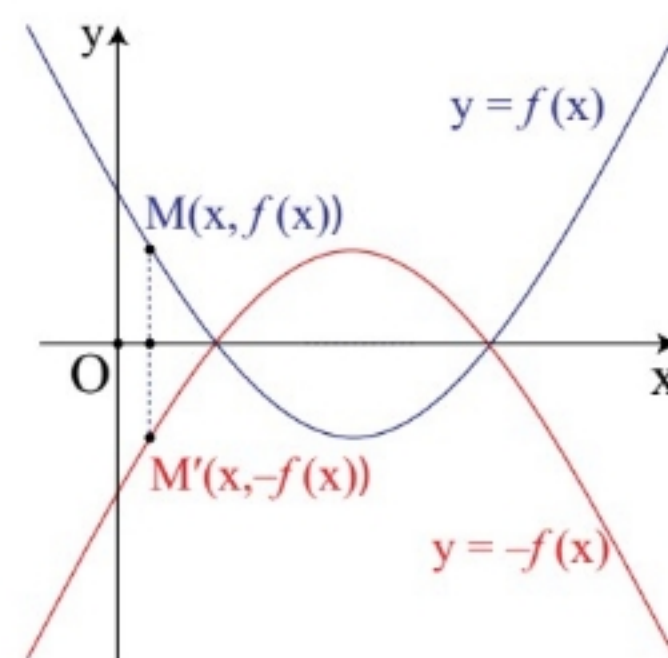
$-3, -2, -1, 0, 1$ και 2

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x) = 0, f(x) = 2 \text{ και } f(x) = g(x)$$

iii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$f(x) > 0 \text{ και } f(x) > g(x).$$



ΛΥΣΗ

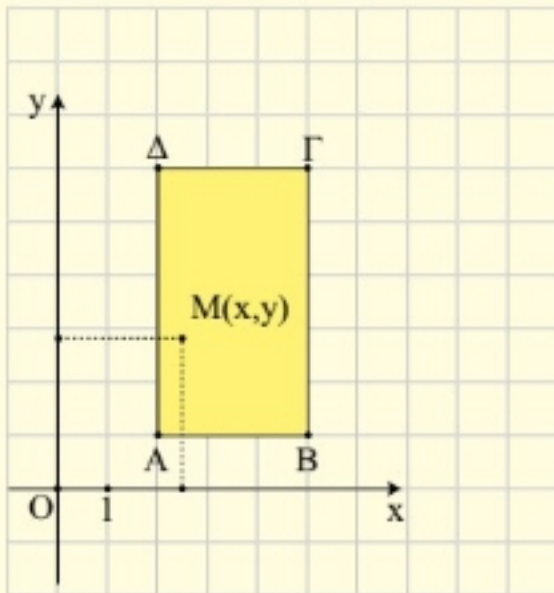
- i) Είναι:
- $f(-3) = 2, f(-2) = 0, f(-1) = -1, f(0) = -1, f(1) = 0$ και $f(2) = 2$.
- ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x'x$, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.
Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -3$ και $x_2 = 2$.
Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ και $x_3 = 2$.
- iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.
Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

A(−1,2), B(3,4), O(0,0), Γ(3,0), Δ(0,−5) και E(−2,− 3).

2. Ένα σημείο M(x,y) κινείται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y;



3. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A(−1,3),

- i) ως προς τον άξονα $x'x$
ii) ως προς τον άξονα $y'y$
iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{xOy}$
iv) ως προς την αρχή O των αξόνων.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

- i) O(0,0) και A(4,−2)
ii) A(−1,1) και B(3,4)
iii) A(−3,−1) και B(1,−1)
iv) A(1,−1) και B(1,4).

5. Να αποδείξετε ότι:
- i) Τα σημεία A(1,2), B(4,-2) και Γ(-3,5) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.
 - ii) Τα σημεία A(1,-1), B(-1,1) και Γ(4,2) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

6. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία:

A(2,5), B(5,1), Γ(2,-3), Δ(-1,1)

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

7. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) $f(x) = x^2 + k$, M(2,6)

ii) $g(x) = kx^3$, M(-2,8)

iii) $h(x) = k\sqrt{x+1}$, M(3,8).

8. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

i) $f(x) = x - 4$

ii) $g(x) = (x - 2)(x - 3)$

iii) $h(x) = (x - 1)^2$

iv) $q(x) = x^2 + x + 1$

v) $\varphi(x) = x\sqrt{x-1}$

vi) $\psi(x) = x\sqrt{x^2-4}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να βρείτε:

- i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
- ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x .

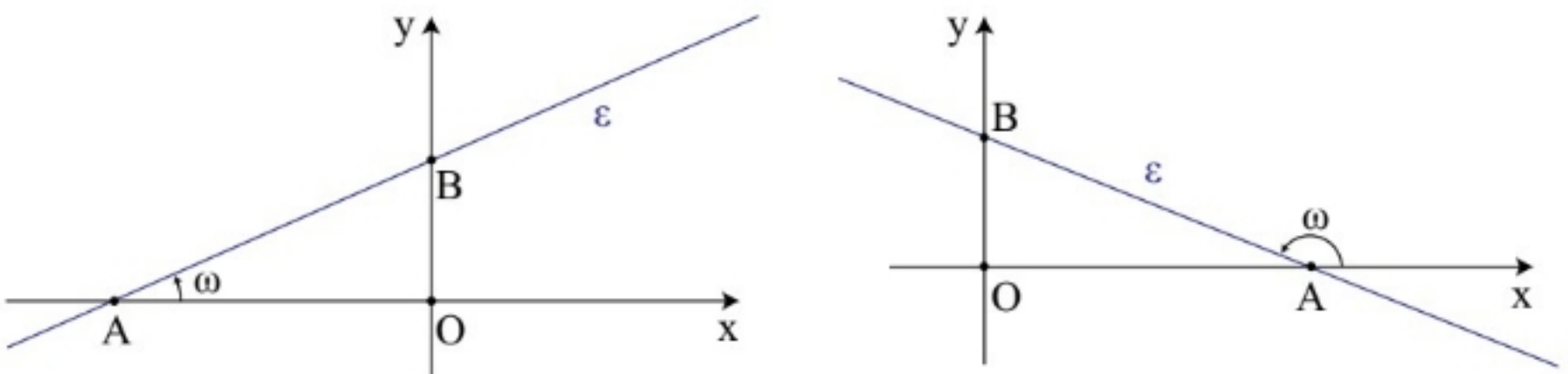
10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$. Να βρείτε:

- i) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
- ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x + \beta$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .



Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη *θετική φορά*⁽¹⁾ μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε , τη λέμε *γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$* . Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0^\circ$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει

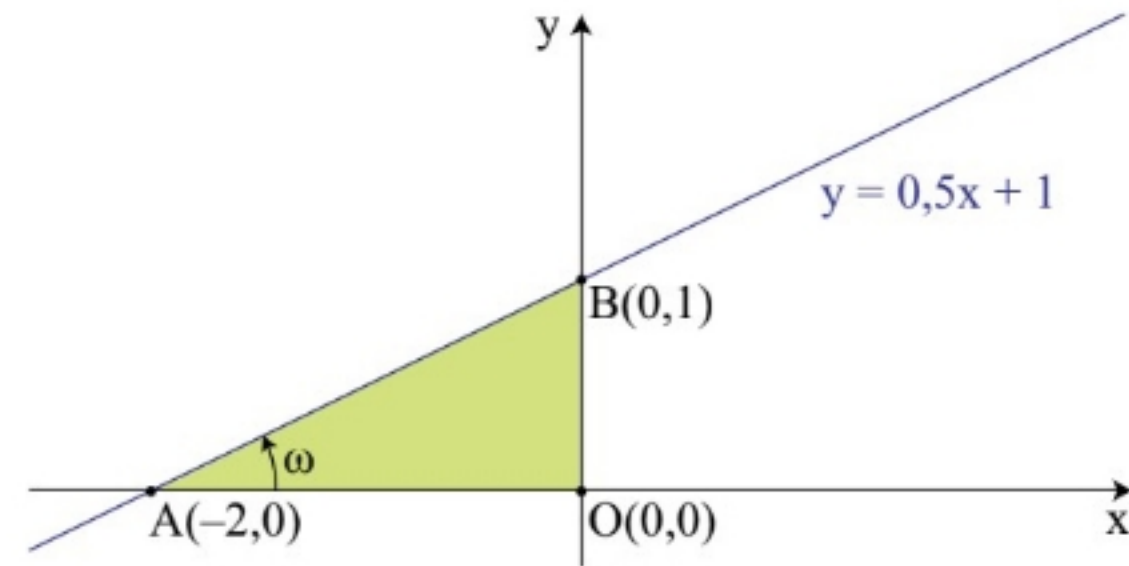
$$0^\circ \leq \omega < 180^\circ.$$

Ως *συντελεστή διεύθυνσης* ή ως *κλίση* μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με λ_ε ή απλά με λ . Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία, αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία και μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90° , δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ε .

⁽¹⁾ Ως θετική φορά περιστροφής εννοούμε τη φορά κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο ημιάξονας Ox για να συμπίπτει με τον ημιάξονα $O\varepsilon$, αφού προηγουμένως διαγράψει γωνία 90° .

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 0,5x + 1$. Όπως πρακτικά διαπιστώσαμε στο Γυμνάσιο, η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία γραμμή με εξίσωση $y = 0,5x + 1$ (Σχήμα).



Η ευθεία αυτή:

- ✓ Τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $A(-2, 0)$, αφού για $y = 0$ βρίσκουμε $x = -2$, και τον άξονα y' στο σημείο $B(0, 1)$, αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$ και
- ✓ Έχει κλίση:

$$\lambda = \epsilon\phi\omega = \frac{(OB)}{(OA)} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

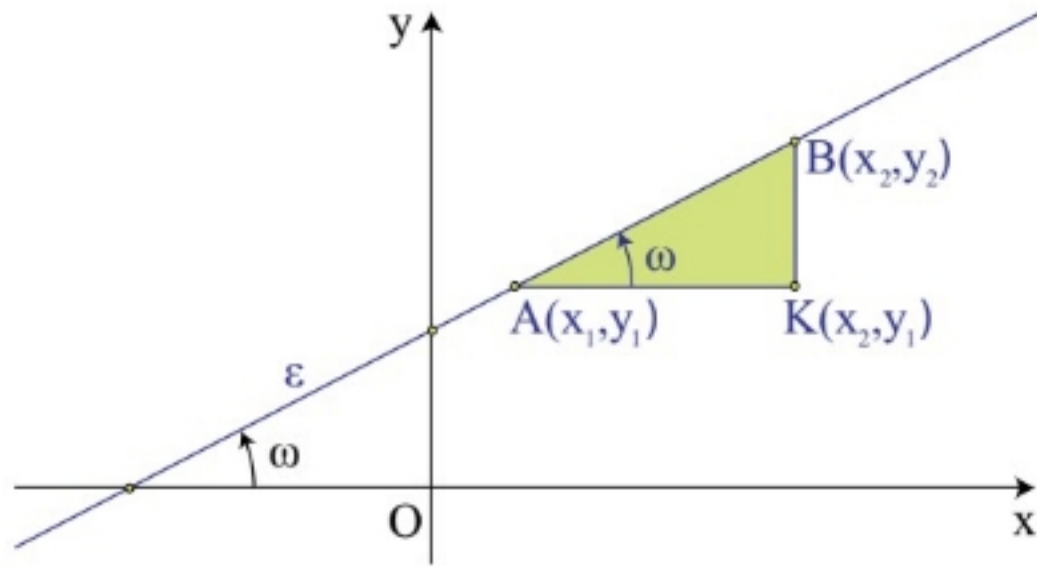
Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η κλίση λ της ευθείας $y = 0,5x + 1$ είναι ίση με το συντελεστή του x .

Γενικά, όπως θα αποδείξουμε στη Β' Λυκείου, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$ είναι μία ευθεία, με εξίσωση $y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $B(0, \beta)$ και έχει κλίση $\lambda = a$. Είναι φανερό ότι:

- αν $a > 0$, τότε $0^\circ < \omega < 90^\circ$
- αν $a < 0$, τότε $90^\circ < \omega < 180^\circ$
- αν $a = 0$, τότε $\omega = 0^\circ$.

Στην περίπτωση που είναι $a = 0$, η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x) = \beta$ και λέγεται **σταθερή συνάρτηση**, διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαία σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ της ευθείας $y = ax + \beta$.



Τότε θα ισχύει:

$$y_1 = ax_1 + \beta \quad \text{και} \quad y_2 = ax_2 + \beta,$$

οπότε θα έχουμε:

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + \beta) - (ax_1 + \beta) = a(x_2 - x_1).$$

Επομένως θα είναι:

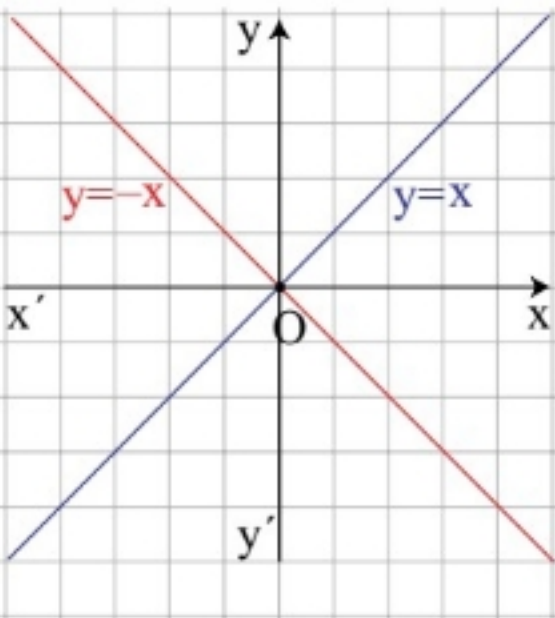
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A(−1,3) και B(3,6) έχει κλίση $a = \frac{6-3}{3-(-1)} = 0,75$. Επομένως, η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία ω με $\epsilon\phi\omega = 0,75$, οπότε θα είναι $\omega \simeq 36,87^\circ$.

Η συνάρτηση $f(x) = ax$

Αν $\beta = 0$, τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x) = ax$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = ax$ και περνάει από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:

✓ Για $a = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα x’x, ισχύει $\epsilon\phi\omega = a = 1$, δηλαδή $\omega = 45^\circ$. Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών xOy και x’Oy’ των αξόνων.



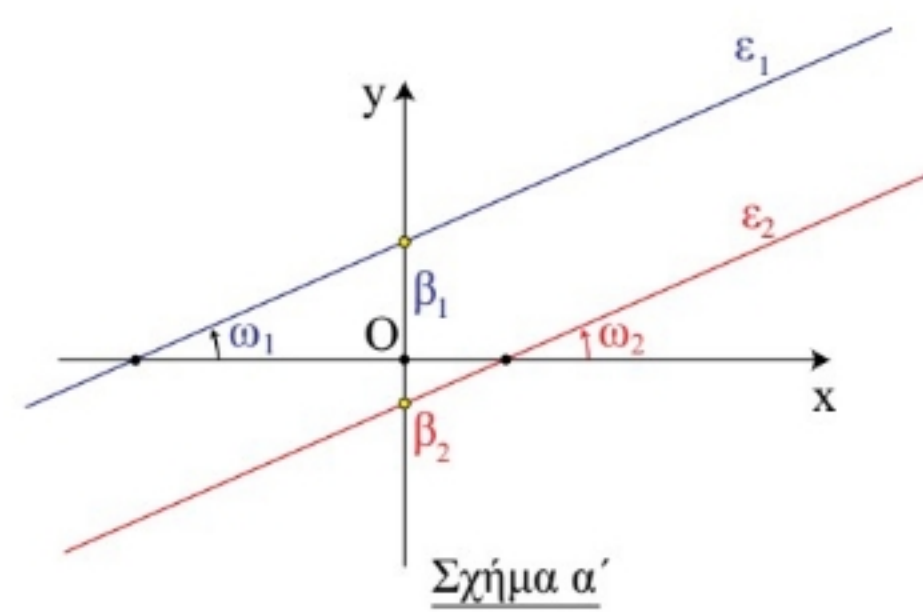
✓ Για $a = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$. Για τη γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα x’x, ισχύει $\epsilon\phi\omega = a = -1$, δηλαδή $\omega = 135^\circ$. Επομένως η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών yOx’ και y’Ox των αξόνων.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

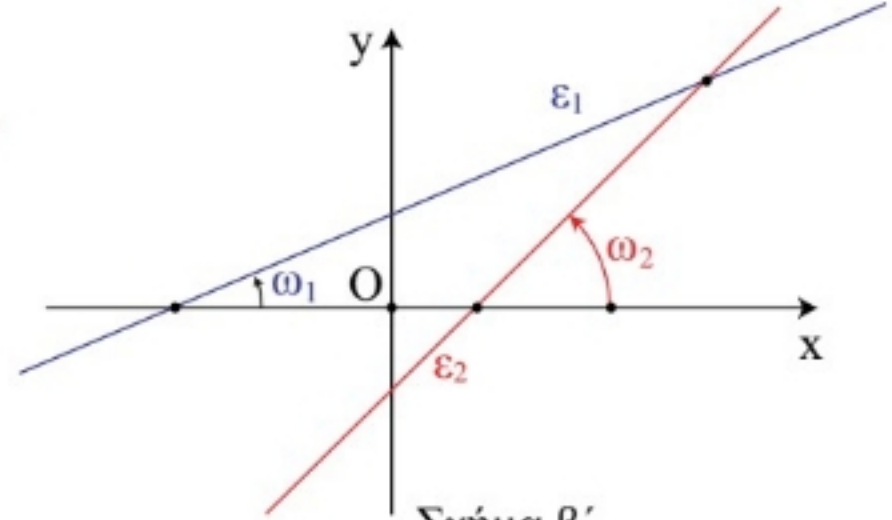
Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα x’x γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως.

- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$, τότε $\epsilon\phi\omega_1 = \epsilon\phi\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και άρα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Ειδικότερα:
 - ✓ Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχ. α’), ενώ
 - ✓ Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

- Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε $\varepsilon\omega_1 \neq \varepsilon\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. (Σχ. β')



Σχήμα α'



Σχήμα β'

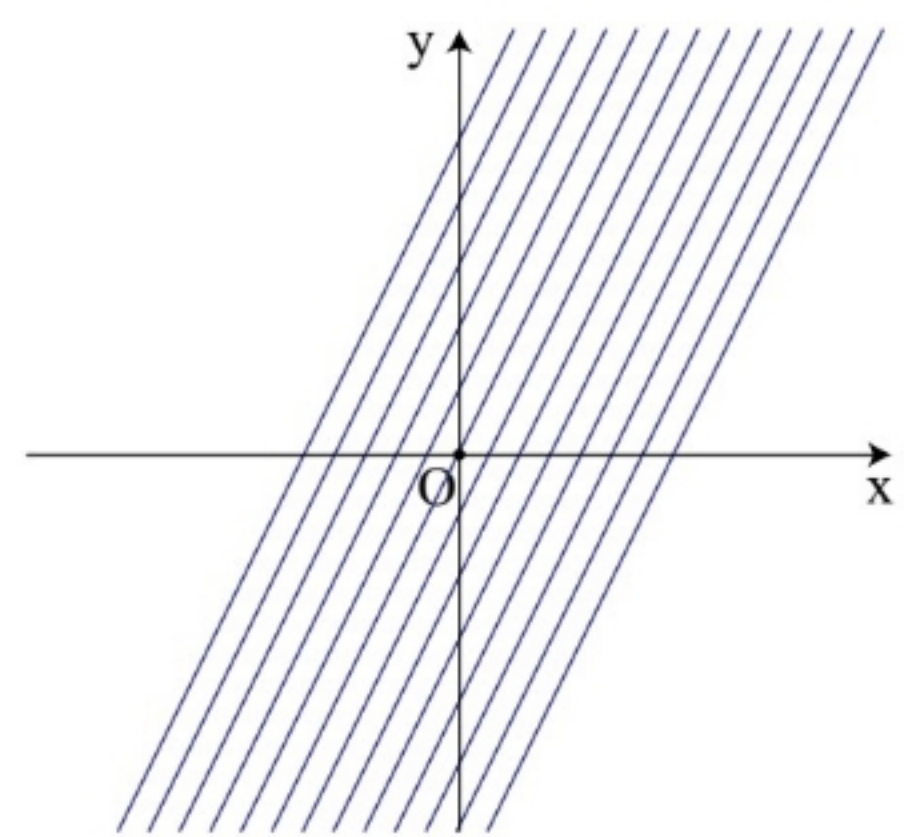
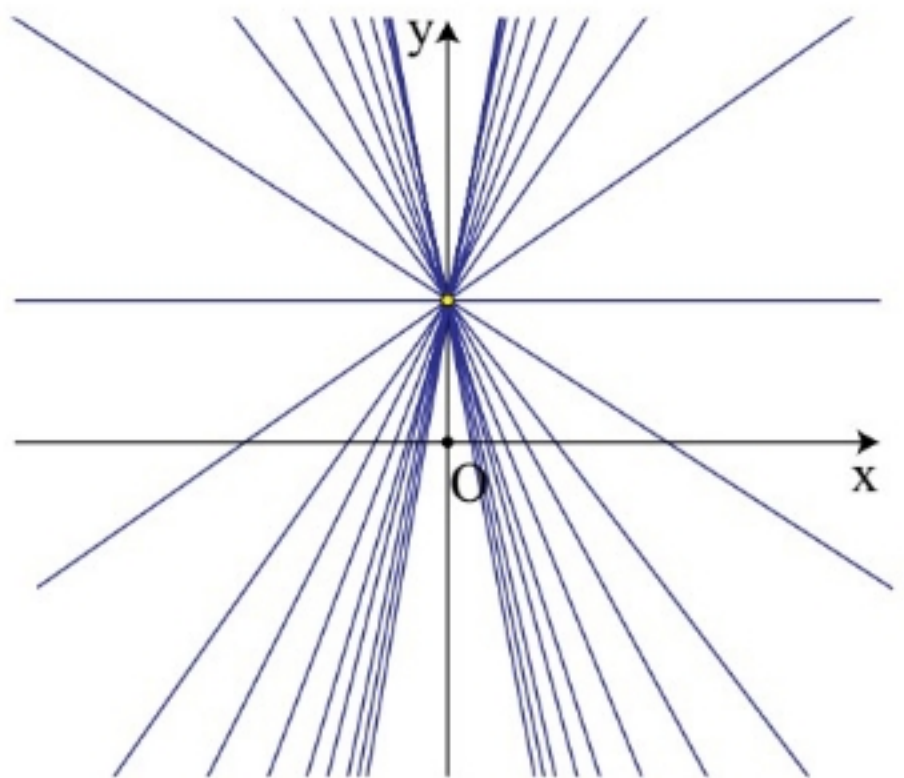
Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα:

- Οι ευθείες της μορφής $y = ax + 1$, με $a \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = 2x + 1$ κτλ., διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, το σημείο 1 του άξονα $y'y$.

Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = ax + \beta$, όπου β σταθερό και a μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.

- Οι ευθείες της μορφής $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = 2x$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$ κτλ., είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν όλες κλίση $a = 2$.

Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = ax + \beta$, όπου a σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.



Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

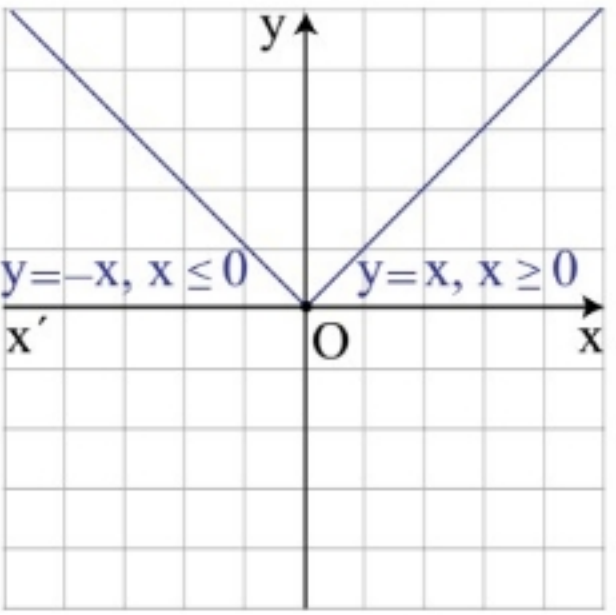
Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

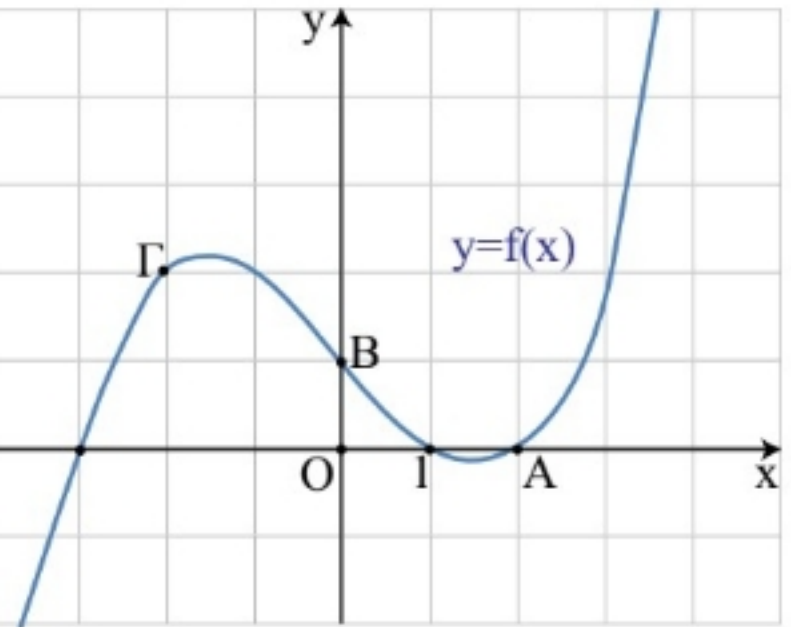
✓ $y = -x$, με $x \leq 0$ και

✓ $y = x$, με $x \geq 0$ που διχοτομούν τις γωνίες $x'Oy$ και $x'Oy'$ αντιστοίχως.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$.



i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο Γ.

ii) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) > -0,5x + 1$.

ΛΥΣΗ

i) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + b$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α(2,0) και Β(0,1) θα ισχύει:

$$0 = a \cdot 2 + b \quad \text{και} \quad 1 = a \cdot 0 + b,$$

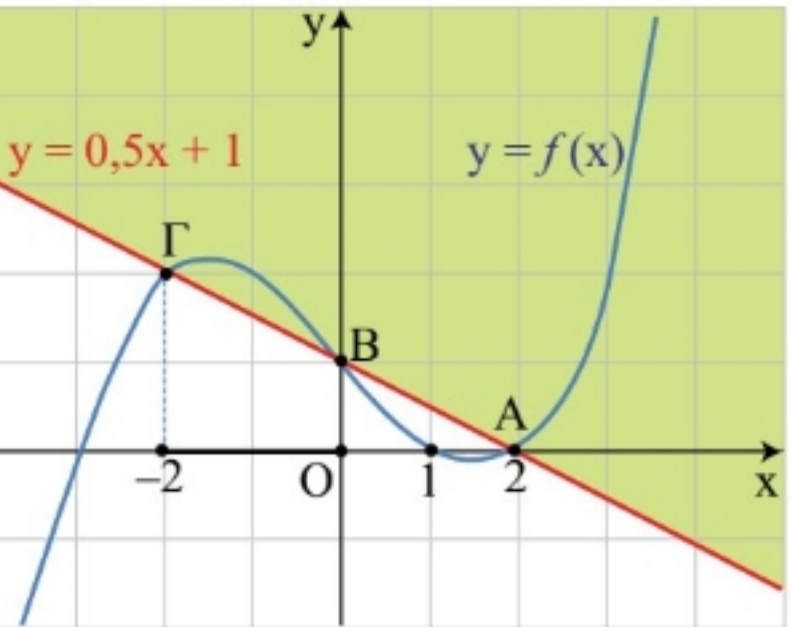
οπότε θα έχουμε:

$$a = -0,5 \quad \text{και} \quad b = 1.$$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$y = -0,5 \cdot x + 1.$$

Για να δείξουμε τώρα ότι το σημείο Γ



ανήκει στην ευθεία AB, αρκεί να δείξουμε ότι το ζεύγος $(-2,2)$ των συντεταγμένων του επαληθεύει την εξίσωση αυτής, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $2 = -0,5 \cdot (-2) + 1$, που ισχύει.

- ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > -0,5 \cdot x + 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = -0,5 \cdot x + 1$, δηλαδή πάνω από την ευθεία AB. Επομένως, η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-2,0) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία:

- i) $y = x + 2$
- ii) $y = \sqrt{3}x - 1$
- iii) $y = -x + 1$
- iv) $y = -\sqrt{3}x + 2$.

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

- i) A(1,2) και B(2,3)
- ii) A(1,2) και B(2,1)
- iii) A(2,1) και B(-1,1)
- iv) A(1,3) και B(2,1).

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

- i) Έχει κλίση $\alpha = -1$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B(0,2).
- ii) Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B(0,1).
- iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 3$ και διέρχεται από το σημείο A(1,1).

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

- i) A(1,2) και B(2,3)
- ii) A(1,2) και B(2,1)
- iii) A(2,1) και B(-1,1)
- iv) A(1,3) και B(2,1).

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας C σε βαθμούς Celsius και της θερμοκρασίας F σε βαθμούς Fahrenheit είναι η

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Γνωρίζουμε ότι το νερό παγώνει σε 0°C ή 32°F και βράζει σε 100°C ή 212°F. Υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον ίδιο αριθμό;

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

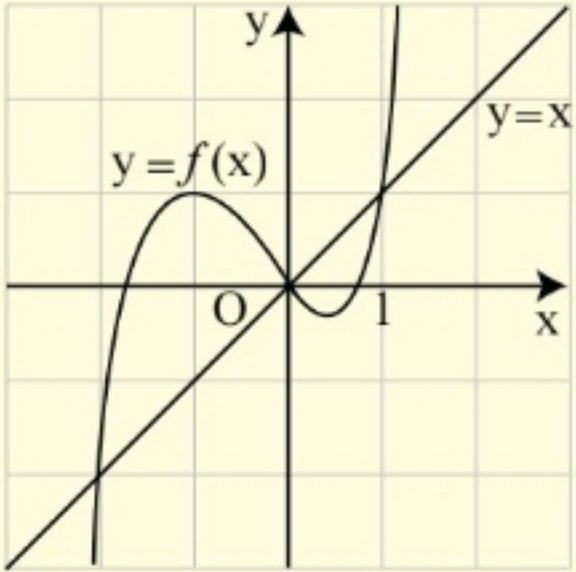
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & \text{αν } 1 \leq x \end{cases}$$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ και η ευθεία $y = x$.

Να λύσετε γραφικά:

i) Τις εξισώσεις:
 $f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

ii) Τις ανισώσεις:
 $f(x) < 1$ και $f(x) \geq x$.



8. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \text{ και } g(x) = 1$$

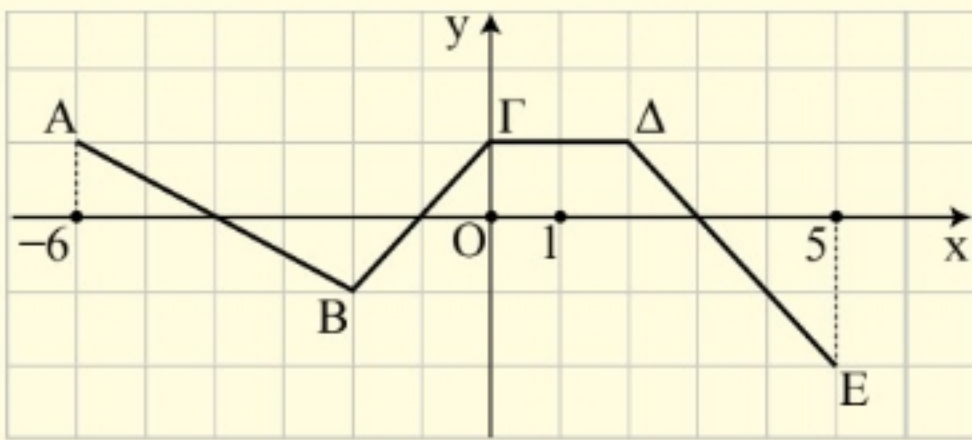
και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|x| \leq 1 \text{ και } |x| > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΟΜΑΔΑΣ

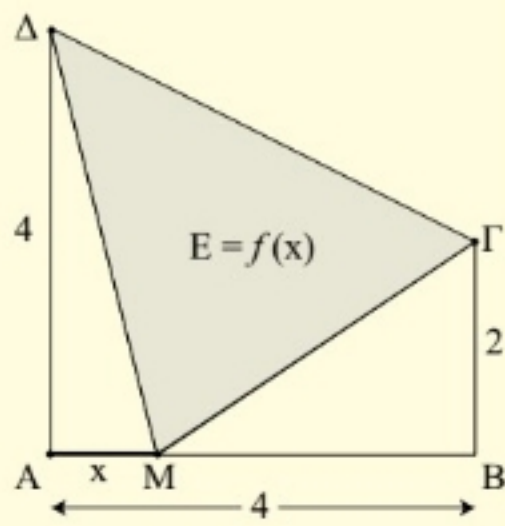
1. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $[-6,5]$.



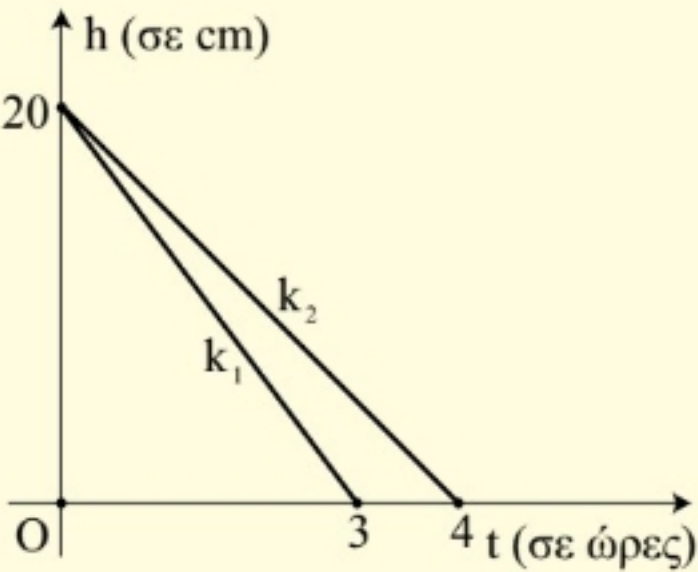
- i) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f σε κάθε ακέραιο $x \in [-6,5]$.
ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:
 $f(x) = 0, f(x) = -1$ και $f(x) = 1$
iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΔ και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση
 $f(x) \leq 0,5 \cdot x$.

2. Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = 1 - x$ και ανακλάται στον άξονα x' . Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.
3. Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 λίτρα βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο που περιέχει 2000 λίτρα βενζίνης αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου:
i) Να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t , την ποσότητα της βενζίνης:
α) στο βυτιοφόρο και β) στη δεξαμενή.
ii) Να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

4. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδό του τριγώνου ΜΓΔ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $E = f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.



5. Δύο κεριά K_1 και K_2 , ύψους 20cm το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κεριό κάηκε σε 3 ώρες, ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 , συναρτήσει του χρόνου t , κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα k_1 και k_2 του παρακάτω σχήματος.



- i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t , τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 αντιστοίχως.
- ii) Να βρείτε πότε το κεριό K_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κεριό K_1 .
- iii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με u . Τι παρατηρείτε;