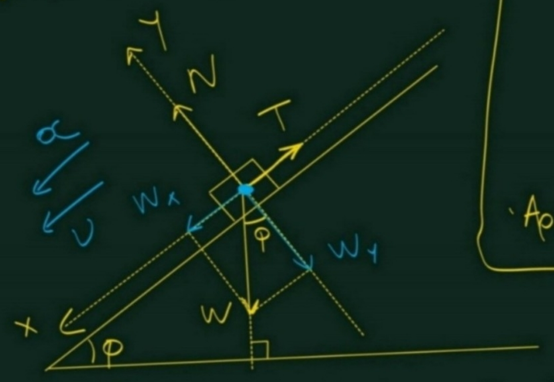
Ασκ. 13 σελ. 158.

α) Στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις.



Η τριβή Τ από το κεκλιμένο επίπεδο

Η κάθετη δύναμη N από το κεκλ. επίπεδο

Το βάρος W από τη Γη.

β) $T = \mu N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = W_y \Rightarrow$

$N = W \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$

$N = mg \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow$

$N = 1 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N = 5\sqrt{3}\ N$

Άρα: $T = \mu N = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$T = \frac{3}{6} \cdot 5 \Rightarrow$

$T = 2,5N$

γ) $W_x = W \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$

$W_x = mg \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$

$W_x = 1 \cdot 10 \cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow$

$W_x = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5N$

$\Sigma F_x = ma \Rightarrow$

$W_x - T = ma \Rightarrow$

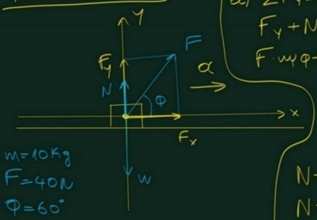
$5 - 2,5 = 1 \cdot a \Rightarrow$

$a = 2,5\ m/s^2$

$S = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 1^2 \Rightarrow S = 1,25\ m$

Ασκ. 22 σελ. 159.



$m = 10\,Kg$

$F = 40\,N$

$\varphi = 60^\circ$

$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$

α) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$F_y + N - W = 0 \Rightarrow$

$F\,\eta\mu\varphi + N - mg = 0 \Rightarrow$

$40 \cdot \eta\mu 60^\circ + N - 10 \cdot 10 = 0 \Rightarrow$

$40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N - 100 = 0 \Rightarrow$

$N = 100 - 20\sqrt{3} \Rightarrow$

$N = 100 - 20 \cdot 1{,}7 \Rightarrow$

$N = 66\,N$

β) $\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow F_x = m\alpha \Rightarrow$

$F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha \Rightarrow$

$40 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 10 \cdot \alpha \Rightarrow$

$40 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \alpha \Rightarrow$

$20 = 10 \cdot \alpha \Rightarrow$

$\alpha = 2\,m/s^2$

γ) $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$

$1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ \quad 4^\circ \quad 5^\circ$

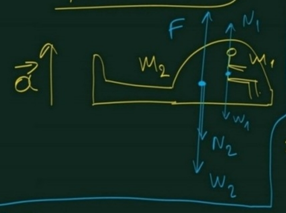
$S(t) = \frac{1}{2} a t^2$

$S(4) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 16\,m$

$S(5) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 = 25\,m$

Άρα: $S = S(5) - S(4) = 25 - 16 = 9\,m$

Ασκ. 8 σελ. 158.



Ελιγμοπτερο:

1) Βάρος $\vec{w_2}$ από τη Γη.
2) $\vec{N_2}$ από τον άνθρωπο στο ελιγμοπτερο (αντίδραση της $\vec{N_1}$, οπότε $\vec{N_2} = -\vec{N_1}$)
3) Ανυψωτική δύναμη $\vec{F}$ από τη γιγκάντα.

α) Πλάτος:

1) Βάρος $\vec{w_1}$ από Γη.
2) Κάθετη δύναμη $\vec{N_1}$ από κάθισμα ελιγμοπτέρου.

β) Για τον άνθρωπο:

$\Sigma F_1 = m_1 a \Rightarrow$

$N_1 - w_1 = m_1 a \Rightarrow$

$N_1 - m_1 g = m_1 a$ (1)

Για το ελιγμοπτερο:

$\Sigma F_2 = m_2 a \Rightarrow$

$F - N_2 - w_2 = m_2 a \Rightarrow$

$F - N_2 - m_2 g = m_2 a$ (2)

Κατά μέτρο: $N_1 = N_2$

Προσθέτουμε τις (1) και (2):

$\cancel{N_1} - m_1 g + F - \cancel{N_2} - m_2 g = m_1 a + m_2 a \Rightarrow$

$F - (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow F = (m_1 + m_2)(g + a)$

Άρα: $F = (1920+80)\cdot(10+2) \Rightarrow$

$F = 2000 \cdot 12 \Rightarrow$

$F = 24.000\,N$

γ) Για τον άνθρωπο:

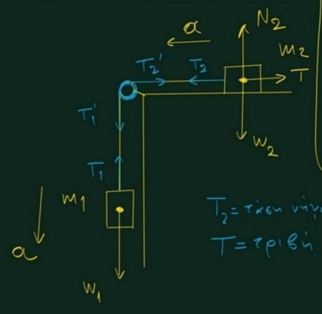
$N_1 - m_1 g = m_1 a \Rightarrow$

$N_1 = m_1 (g+a) \Rightarrow$

$N_1 = 80 \cdot (10+2) \Rightarrow N_1 = 960\,N.$

δύναμη από το κάθισμα.

Ασκ. 12 σελ. 158.



T_2 = τάση νήματος
T = τριβή.

α) Το m_2 δέχεται τέσσερις δυνάμεις:

1) T_2 (τάση νήματος)
2) W_2 (βάρος)
3) N_2 (κάθετη δύναμη)
4) $T = \mu N_2$ (τριβή ολίσθησης)

Το m_1 δέχεται δύο δυνάμεις:

1) W_1 (βάρος)
2) T_1 (τάση νήματος)

Η τροχαλία είναι αβαρής, οπότε ισχύει:

$T_1' = T_2'$

Το νήμα είναι αβαρές, οπότε ισχύει:

$T_2 = T_2'$ και $T_1 = T_1'$

Άρα:

$T_1 = T_2 = T_1' = T_2'$

β) Για το m_1 έχουμε:

$\Sigma F_1 = m_1 a \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)

Για το m_2 έχουμε:

$\Sigma F_{2x} = m_2 a \Rightarrow T_2 - T = m_2 a$ (2)

$\Sigma F_{2y} = 0 \Rightarrow N_2 = W_2$

$T = \mu N_2 \Rightarrow T = \mu m_2 g$ (3)

γ) Προσθέτουμε τις (1) κ (2) και αντικαθιστούμε την T από την (3):

$m_1 g - \cancel{T_1} + \cancel{T_2} - T = m_1 a + m_2 a \Rightarrow$

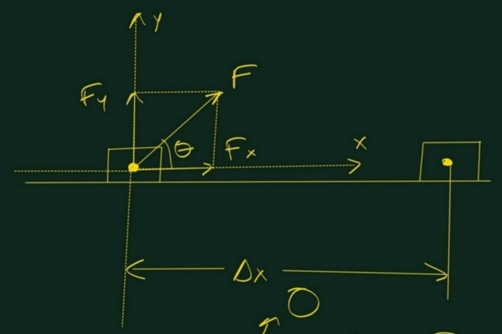
(επειδή $T_1 = T_2$)

$m_1 g - \mu m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow$

$80 - 0{,}25 \cdot 120 = (8+12) a \Rightarrow$

$80 - 30 = 20 a \Rightarrow$

$\frac{50}{20} = \frac{\cancel{20} a}{\cancel{20}} \Rightarrow a = 2{,}5 \, m/s^2$



Αν $0 < \theta < 90^\circ$
$\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ και $W_F > 0$

Αν $90^\circ < \theta < 180^\circ$
$\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ και $W_F < 0$

Αν $\theta = 0^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = 1$ και $W_F = F \cdot \Delta x$

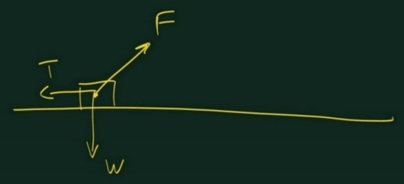
Αν $\theta = 90^\circ$ " $\sigma\upsilon\nu\theta = 0$ και $W_F = 0$

$$W_F = W_{F_x} + \cancel{W_{F_y}}^{\,0} = W_{F_x} = F_x \cdot \Delta x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \Delta x \Rightarrow$$

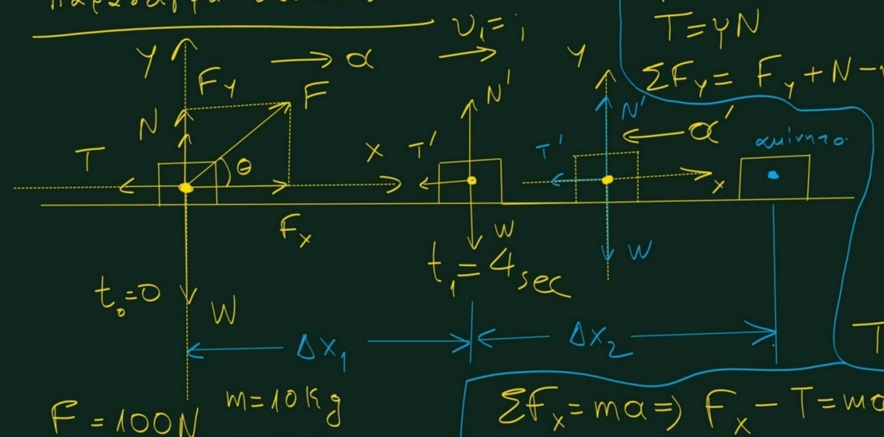
$$\boxed{W_F = F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

$W_{F_y} = 0$ επειδή $\vec{F_y} \perp \Delta\vec{x}$

(οι δυνάμεις που είναι κάθετες στη μετατόπιση <u>δεν</u> παράγουν έργο).


F
T
W

Παράδειγμα άσκησης.



$F=100N$ $m=10kg$

$\eta\mu\theta=0,6$ $\mu=0,2$

$\sigma\upsilon\nu\theta=0,8$

α) Να βρεθεί η επιτάχυνση

$T=\mu N$

$\Sigma F_y = F_y+N-W=0 \Rightarrow N=W-F_y \Rightarrow$

$N=mg-F\cdot\eta\mu\theta \Rightarrow$

$N=100-10\cdot 0,6 \Rightarrow$

$N=40N$

$T=0,2\cdot 40=8N$

$\Sigma F_x=ma \Rightarrow F_x-T=ma \Rightarrow$

$F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-T=ma \Rightarrow 100\cdot 0,8-8=10a \Rightarrow$

$80-8=10a \Rightarrow a=7,2m/s^2$

β) Να βρεθεί η υ_1 την $t_1 = 4sec$.

$\upsilon_1 = \alpha t_1 = 7,2 \cdot 4 = 27,8\ m/s$.

γ) Να βρεθεί η μετατόπιση Δx_1

$\Delta x_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 7,2 \cdot 4^2 = 3,6 \cdot 16\ m$

δ) Τη στιγμή $t_1 = 4sec$ καταργείται η δύναμη F οπότε το σώμα επιβραδύνεται λόγω της τριβής T' (που είναι διαφορετική από την T)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N' - mg = 0 \Rightarrow N' = mg$.

$T' = \mu N' = \mu mg$.

$\Sigma F_x = T' = ma' \Rightarrow$

$\mu mg = ma' \Rightarrow a' = \mu g$

(επιβράδυνση)

$\Delta x_2 = \frac{\upsilon_1^2}{2\alpha'} = \frac{27,8^2}{2\mu g} =$

$= \frac{27,8^2}{2 \cdot 0,2 \cdot 10} = \frac{27,8^2}{4}\ m$

Αλλά αυτό θέλει απόδειξη.

δ) Να βρεθεί η απόσταση Δx_2 που θα διανύσει το σώμα μέχρι να σταματήσει.

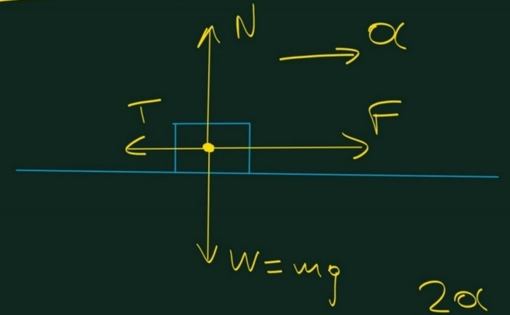
$$\upsilon = \upsilon_1 - a' t \Rightarrow$$

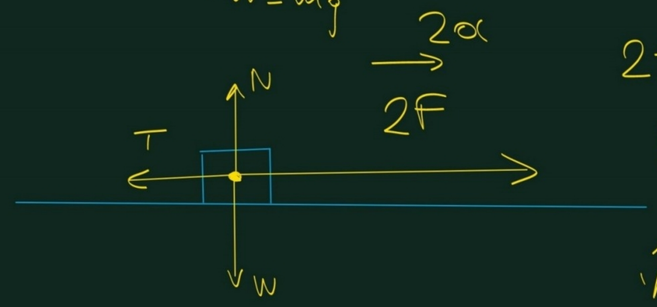
$$0 = \upsilon_1 - a' t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\upsilon_1}{a'}$$

$$\Delta x_2 = \upsilon_1 \cdot t_2 - \frac{1}{2} a' t_2^2 = \upsilon_1 \cdot \frac{\upsilon_1}{a'} - \frac{1}{2} a' \cdot \frac{\upsilon_1^2}{a'^2} \Rightarrow$$

$$\Delta x_2 = \frac{\upsilon_1^2}{a'} - \frac{\upsilon_1^2}{2a'} = \frac{\upsilon_1^2}{2a'} = \dots$$

Εφ. 30 σελ. 153





Η τριβή γίνεται ίδια.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - W = 0 \Rightarrow N = mg$.

$T = \mu N \Rightarrow T = \mu mg$.

Άρα: $F - T = ma$ (1η περίπτωση)

$2F - T = m \cdot 2a$ (2η ")

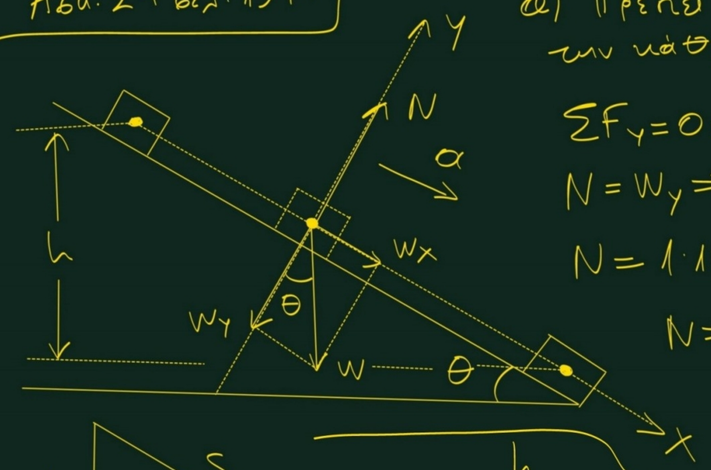
$2F - T = 2ma \Rightarrow$

$2F - T = 2(F - T) \Rightarrow$

$\cancel{2F} - T = \cancel{2F} - 2T \Rightarrow 2T - T = 0 \Rightarrow T = 0$

Άρα δεν υπάρχει τριβή.

Ασκ. 24 σελ. 159.



α) Πρέπει να βρούμε την κάθετη δύναμη N.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - W_y = 0 \Rightarrow$

$N = W_y \Rightarrow N = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$

$N = 1 \cdot 10 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow$

$N = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$N = 5\sqrt{3}\,N.$

β) $\Sigma F_x = ma \Rightarrow$

$W_x = ma \Rightarrow$

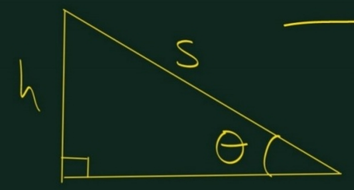
$W \cdot \eta\mu\theta = ma \Rightarrow$

$\cancel{m} \cdot g \cdot \eta\mu\theta = \cancel{m}a \Rightarrow$

$a = g \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow$

$a = 10 \cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow$

$a = 5\,m/s^2$



$\eta\mu\theta = \frac{h}{S} \Rightarrow$

$S = \frac{h}{\eta\mu\theta} \Rightarrow S = \frac{5}{\eta\mu 30^\circ} \Rightarrow S = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S = 10\,m$

γ) $S = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow$

$10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2 \Rightarrow$

$20 = 5t^2 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow$

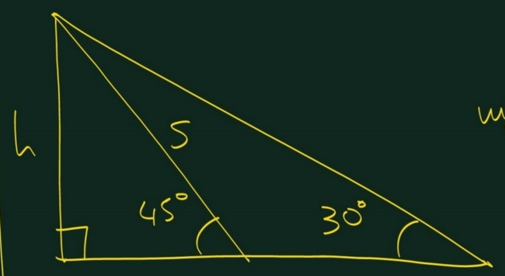
$t = 2 sec$

$U = at \Rightarrow$

$U = 5 \cdot 2 \Rightarrow$

$U = 10 m/s$

δ) Να ξαναγίνουν όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί για το ίδιο ύψος $h = 5m$ αλλά για $\theta = 45^\circ$



$\Sigma F_x = ma \Rightarrow$

$mg \cdot \eta\mu\theta = ma \Rightarrow$

$a = g \cdot \eta\mu\theta = 10 \cdot \eta\mu 45^\circ \Rightarrow$

$a = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 5\sqrt{2} m/s^2$

$\eta\mu 45^\circ = \frac{h}{S} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{S} \Rightarrow$

$S = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = 5\sqrt{2} m.$

$S = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \cancel{5\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{5\sqrt{2}} \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} sec$

$U = at = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow U = 10 m/s$ ίδια (αφού: $mgh = \frac{1}{2} m U^2 \Rightarrow U = \sqrt{2gh}$)

Κινητική ενέργεια:

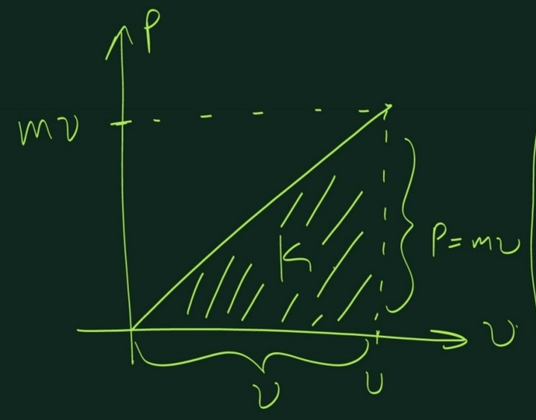
$$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

Ορμή:

$$p = m\upsilon$$

Η κινητική ενέργεια είναι η συσσωρευμένη ορμή ενός σώματος.

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m\upsilon \cdot \upsilon = \frac{1}{2} p \cdot \upsilon$$



K = εμβαδό τριγώνου

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon \cdot \upsilon = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

ΘΜΚΕ

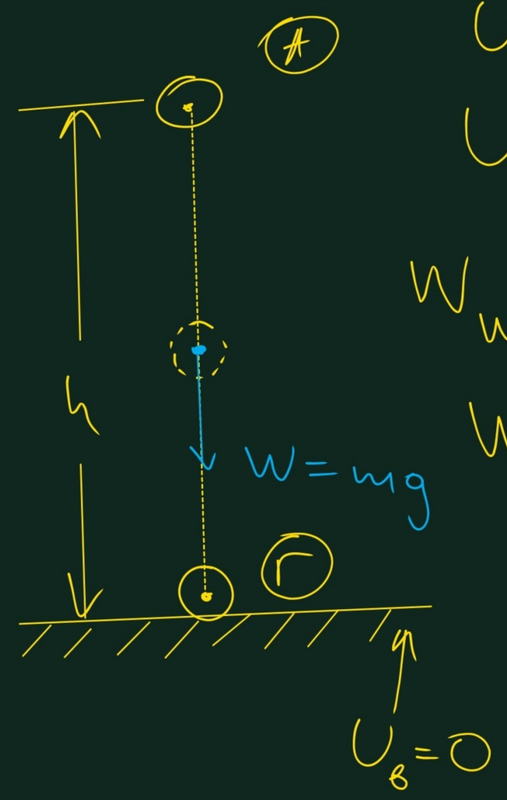
$$\Delta K = \Sigma W = W_{\Sigma F}$$

μεταβολή κινητικής ενέργειας

άθροισμα έργων δυνάμεων

έργο συνισταμένης

Δυναμική ενέργεια βάρους



$$U_A = mgh$$

$$U_\Gamma = 0$$

$$W_{w(A\to\Gamma)} = U_A - U_\Gamma \Rightarrow$$

$$W_{w(A\to\Gamma)} = mgh$$

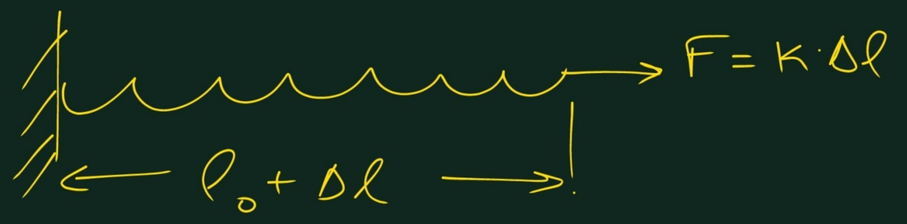
Γενικά το έργο για διατηρητικής δύναμης πεδίου, είναι ίσο με τη διαφορά της αρχικής μείον την τελική δυναμική ενέργεια.

$$W_{F(\alpha\rho\chi\to\tau\varepsilon\lambda)} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda}.$$

F = δύναμη βάρους, ελατηρίου, ηλεκτρική κ.λ.π

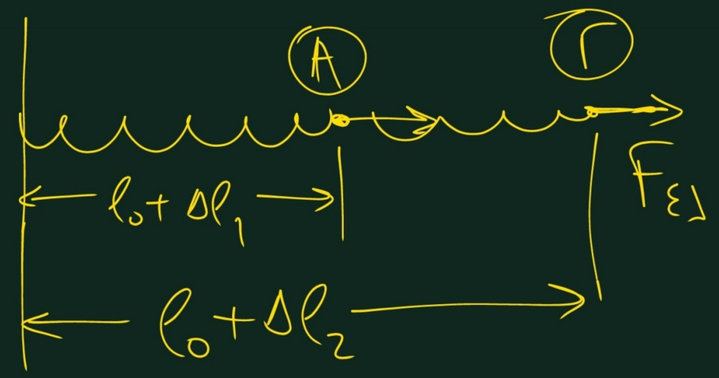
ή $W_{F_{\pi\varepsilon\delta}(A\to\Gamma)} = U_A - U_\Gamma$

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου



$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} K \cdot \Delta l^2$$

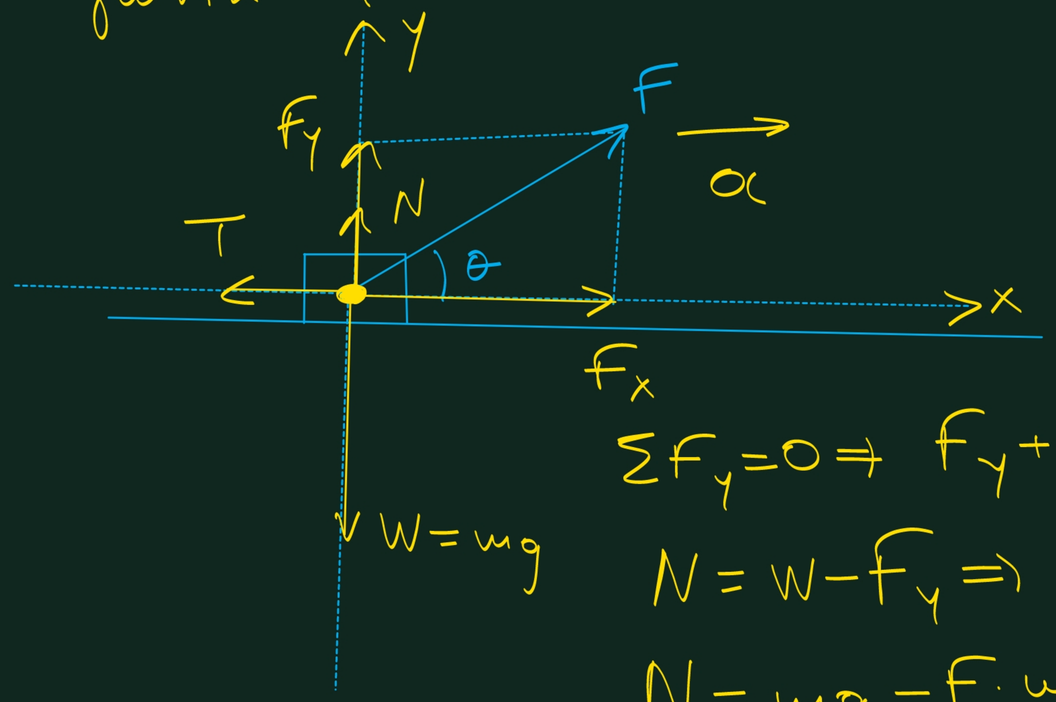
l_0 = φυσικό μήκος



$$W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \to \Gamma)} = U_{\varepsilon\lambda,A} - U_{\varepsilon\lambda,\Gamma} =$$

$$= \frac{1}{2} K \cdot \Delta l_1^2 - \frac{1}{2} K \cdot \Delta l_2^2$$

Αν η δύναμη σχηματίζει γωνία προς τα πάνω έχουμε:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + N = W \Rightarrow$$

$$N = W - F_y \Rightarrow$$

$$N = mg - F\cdot\eta\mu\theta$$

$$T = \mu N = \mu mg - \mu F\cdot\eta\mu\theta$$

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F_x - T = ma \Rightarrow$$

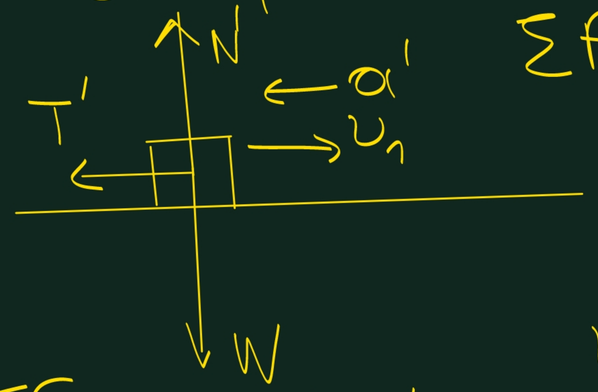
$$F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - (\mu mg - \mu F\cdot\eta\mu\theta) = ma \Rightarrow$$

$$F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - \mu mg + \mu F\cdot\eta\mu\theta = ma \Rightarrow$$

$$F\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta + \mu\cdot\eta\mu\theta) - \mu mg = ma.$$

$$\Rightarrow \alpha = \dots$$

Αν καταργηθεί η F έχουμε επιβράδυνση α'



$$\Sigma F_x = ma' \Rightarrow$$

$$T' = ma' \Rightarrow$$

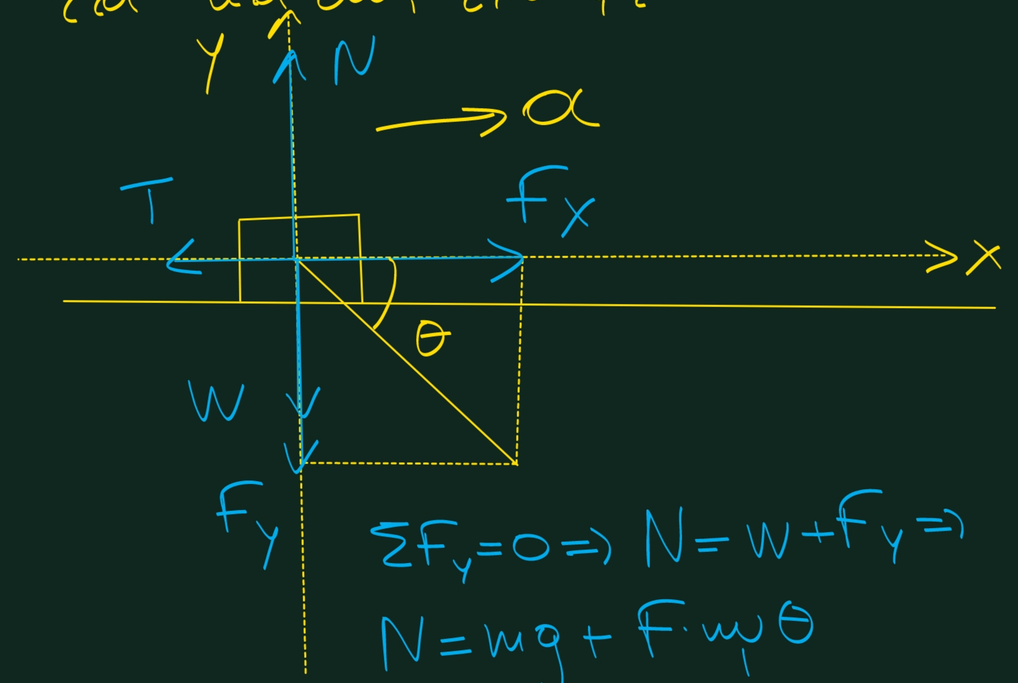
$$\mu N' = ma' \Rightarrow$$

$$\mu mg = ma' \Rightarrow \alpha' = \mu g$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N' = W$$

$$S = \frac{\upsilon_1^2}{2\alpha'}$$

Αν η δύναμη είναι υπό γωνία προς τα κάτω, έχουμε:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = W + F_y \Rightarrow$

$N = mg + F \cdot ημθ$

$T = μN = μmg + μF \cdot ημθ$

$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F_x - T = ma \Rightarrow$

$F \cdot συνθ - (μmg + μF \cdot ημθ) = ma \Rightarrow$

$F \cdot συνθ - μmg - μF \cdot ημθ = ma \Rightarrow$

$F(συνθ - μημθ) - μmg = ma \Rightarrow α = \dots$

Αν καταργηθεί η F έχουμε την ίδια επιβράδυνση $α' = μg$.

$υ_1 = α t_1$

$S = υ_1 t_2 - \frac{1}{2} α' t_2^2 \Rightarrow S = υ_1 \cdot \frac{υ_1}{α'} - \frac{1}{2} α' \cdot \frac{υ_1^2}{α'^2} \Rightarrow$

$0 = υ_1 - α' t_2 \Rightarrow$

$t_2 = \frac{υ_1}{α'}$

$S = \frac{υ_1^2}{α'} - \frac{1}{2} \frac{υ_1^2}{α'} = \frac{υ_1^2}{2α'}$.