Φθίνουσες ταλαντώσεις

Στις αμείωτες ταλ. έχουμε:

$$\Sigma F = F_{επαν} = -Dx \quad (2^{ος}\ NN)$$

$F_{επαν}$ = δύναμη επαναφοράς.

Στις φθίνουσες έχουμε:

$$\Sigma F = F_{επαν} + F_{απ}$$

$F_{απ}$ = δύναμη απόσβεσης

$$F_{απ} = -bv$$

Άρα: $\Sigma F = -Dx - bv \Rightarrow$

$$\boxed{ma + bv + Dx = 0}$$ $2^{ος}$ NN στις φθίνουσες

Δηλαδή στις αμείωτες έχουμε:

$$ma + Dx = 0 \quad (2^{ος}\ NN)$$

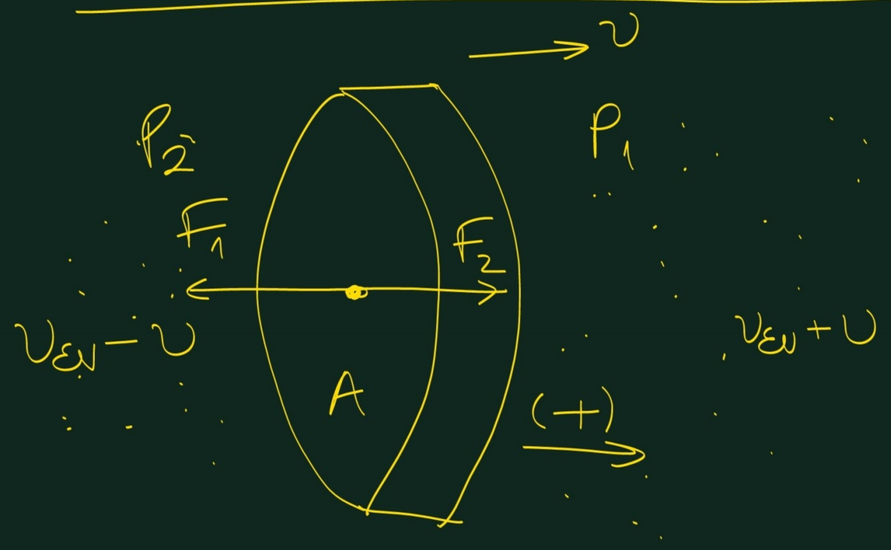
ενώ στις φθίνουσες:

$$ma + bv + Dx = 0 \quad (2^{ος}\ NN)$$

για κάθε στιγμή.

Στην προσέγγιση χαμηλής απόσβεσης η περίοδος της αμείωτης είναι περίπου ίση με την περίοδο της φθίνουσας.

Πείραμα σύγκρισης για τη φθίνουσα



$$P=\frac{1}{3}\rho\cdot v_{\varepsilon\nu}^2$$

ρ = πυκνότητα αέρα

$v_{\varepsilon\nu}$ = ενεργός ταχύτητα μορίων αέρα.

$$\Sigma F=-F_1+F_2=$$

$$=-P_1A+P_2A=$$

$$=-\frac{1}{3}\rho(v_{\varepsilon\nu}+v)^2A+\frac{1}{3}\rho(v_{\varepsilon\nu}-v)^2A\Rightarrow$$

$$\Sigma F=-\frac{1}{3}\rho A\left[(v_{\varepsilon\nu}+v)^2-(v_{\varepsilon\nu}-v)^2\right]\Rightarrow$$

$$\Sigma F=-\frac{1}{3}A\rho\left(v_{\varepsilon\nu}^2+2v_{\varepsilon\nu}v+v^2-v_{\varepsilon\nu}^2+2v_{\varepsilon\nu}v-v^2\right)\Rightarrow$$

$$\Sigma F=-\frac{4}{3}\rho A v_{\varepsilon\nu}v=-bv=F_{\alpha\nu\tau}$$

Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους αυξάνεται με την απόσβεση.

A = εμβαδό επιφάνειας επαφής.

σταθερά απόσβεσης για αέρα

$$b=\frac{4}{3}\rho A v_{\varepsilon\nu}$$

Από το 2ο ΝΝ προκύπτει ότι:

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$$

όπου $\Lambda = \frac{b}{2m}$

Άρα στις φθίνουσες έχουμε:

$$x = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Για $t = 0$ έχουμε:

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow A = A_0$$

Για $t = T$ έχουμε:

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\Lambda T} \Rightarrow \frac{A_1}{A_0} = e^{-\Lambda T}$$

Για $t = 2T$ έχουμε:

$$A_2 = A_0 \cdot e^{-2\Lambda T} = A_0 \cdot e^{-\Lambda T} \cdot e^{-\Lambda T} = A_1 \cdot e^{-\Lambda T}$$

Άρα: $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_1}{A_0} = e^{-\Lambda T}$

Αντιστρόφως έχουμε:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = e^{\Lambda T}$$

Γενικά:

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{A_0 \cdot e^{-k\Lambda T}}{A_0 \cdot e^{-(k+1)\Lambda T}} = e^{-k\Lambda T + k\Lambda T + \Lambda T} = e^{\Lambda T}$$

Άρα γενικά: $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\Lambda T}$ (γεωμετρική πρόοδος)

Το $e^{\Lambda T}$ είναι ο σταθερός λόγος της γεωμετρικής προόδου

Σε πολλά εξωσχολικά βιβλία αναφέρεται ότι ο τύπος

$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ ισχύει <u>μόνο</u> αν

ο χρόνος t είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου.

Αυτό είναι <u>λάθος</u>.

Ο τύπος $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ ισχύει για οποιαδήποτε χρονική στιγμή και όχι μόνο για $t = kT$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$

Για παράδειγμα, αν ο χρόνος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του χρόνου ημιζωής $T_{1/2}$ τότε έχουμε πάλι μία ακολουθία πλατών που είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Χρόνος ημιζωής (από την πυρηνική φυσική για διασπάσεις πυρήνων ραδιενεργού δείγματος) είναι ο χρόνος που απαιτείται για να γεμισει το πλάτος ταλάντωσης στο μισό.

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow$$

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow$$

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda T_{1/2}} \Rightarrow \cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln 2 = -\Lambda T_{1/2} \Rightarrow$$

$$\Lambda T_{1/2} = \ln 2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Γενικά: $e^{-\Lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$

Άρα αν στα προηγούμενα θέσουμε $t = kT_{1/2}$ θα έχουμε:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\Lambda T_{1/2}} = 2$$

Άρα: $A_1 = A_0 \cdot e^{-\Lambda T_{1/2}} = \frac{A_0}{2}$

$$A_2 = A_0 \cdot e^{-2\Lambda T_{1/2}} = \frac{A_0}{4} = \frac{A_0}{2^2}$$

Γενικά: $A_k = \frac{A_0}{2^k}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$

$$T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

(για μικρή απόσβεση)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda} = \frac{2m \ln 2}{b}$$

Άρα το $T_{1/2}$ και T δεν είναι αμέσως πολλαπλάσια το ένα του άλλου.

Ασκ. 1.32 $A_0 = 32\,cm$

Για $t = 10\,sec$ γίνεται: $A_1 = 16\,cm$

Ποια στιγμή το πλάτος θα γίνει 1 cm;

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow 16 = 32 \cdot e^{-\Lambda \cdot 10} \Rightarrow e^{-10\Lambda} = \frac{1}{2}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow$$

$$1 = 32 \cdot e^{-\lambda t_1} \Rightarrow e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

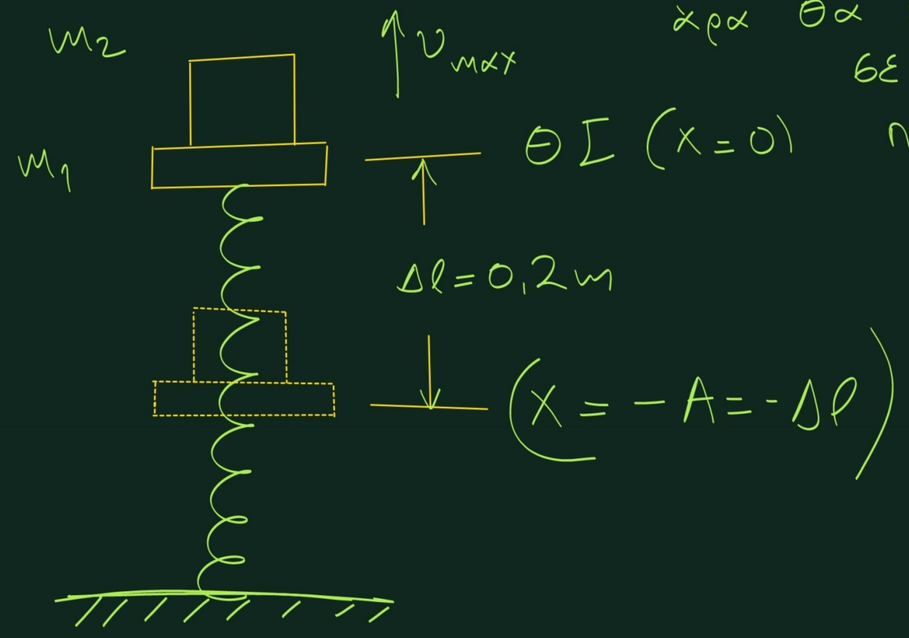
$$e^{-10\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t_1} = \left(e^{-10\lambda}\right)^5 \Rightarrow$$

$$e^{-\lambda t_1} = e^{-50\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda t_1 = 50\lambda \Rightarrow t_1 = 50\,\text{sec}$$

Ασκ. 5.13



α) Τα σώματα ξεκινούν από την κάτω κυρούα θέση χωρίς αρχική ώρα θα εκτελέσουν (όσο είναι σε επαφή) ταλάντωση πλάτους $A = \Delta l = 0{,}2\,m$

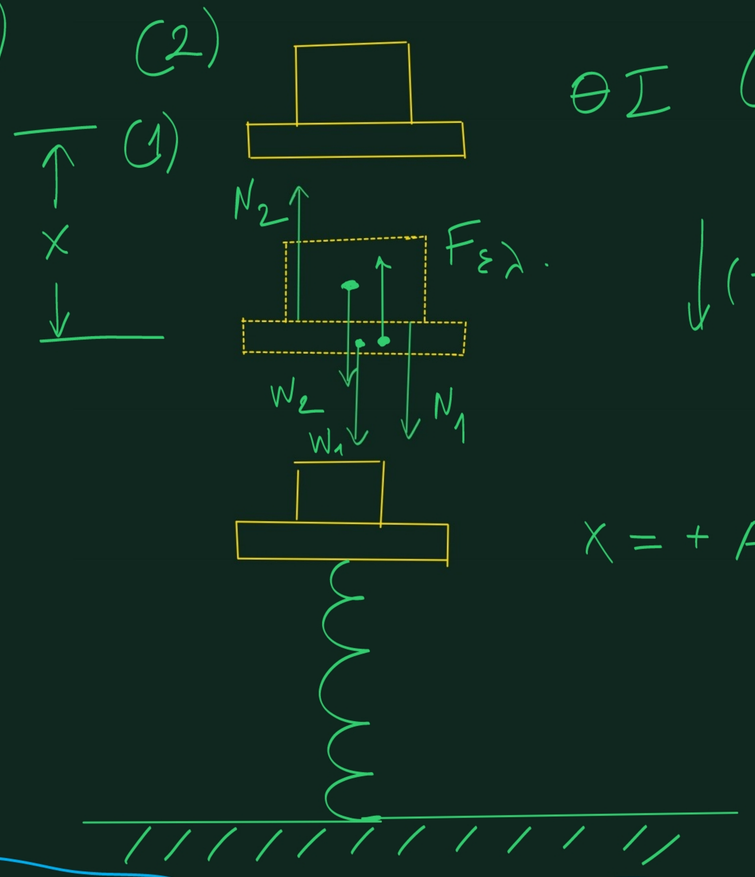
Στη ΘΙ έχουμε:

$$\upsilon_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}} \cdot \Delta l =$$

$$= \sqrt{\frac{400}{4}} \cdot 0{,}2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_{max} = 2\,m/s.$$

β)



ΘΙ $(x=0)$

$\downarrow(+)$

$x = +A$

Για το m_2 έχουμε:

$$\Sigma F_2 = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow$$

(1) $W_2 - N_2 = -D_2 x \Rightarrow$

$$N_2 = W_2 + D_2 x$$

Για το m_1 έχουμε:

$$\Sigma F_1 = -D_1 x \Rightarrow$$

(2) $N_1 + W_1 - F_{\varepsilon\lambda} = -D_1 x$

($N_1 = N_2$ από τον 3° ΝΝ αφού διαμυσματικά: $\vec{N_1} = -\vec{N_2}$).

$F_{\varepsilon\lambda} = K(\Delta l_0 + x) \Rightarrow$

$F_{\varepsilon\lambda} = K \cdot \Delta l_0 + Kx \Rightarrow$

$F_{\varepsilon\lambda} = W_1 + W_2 + Kx$

αφού στη ΘΙ έχουμε

$W_1 + W_2 = K \cdot \Delta l_0$

(Δl_0 = συσπείρωση στη ΘΙ)

(1)+(2):

$W_2 - \cancel{N_2} + \cancel{N_1} + W_1 - F_{\varepsilon\lambda} = -(D_1 + D_2)x \Rightarrow$

$W_2 + W_1 - W_1 - W_2 - Kx = -(D_1 + D_2)x \Rightarrow$

$D_1 + D_2 = K$ όπως θα έπρεπε.

$$N_2 = W_2 + D_2 x \Rightarrow$$

$$N_2 = m_2 g + m_2 \frac{K}{m_1+m_2} x \Rightarrow$$

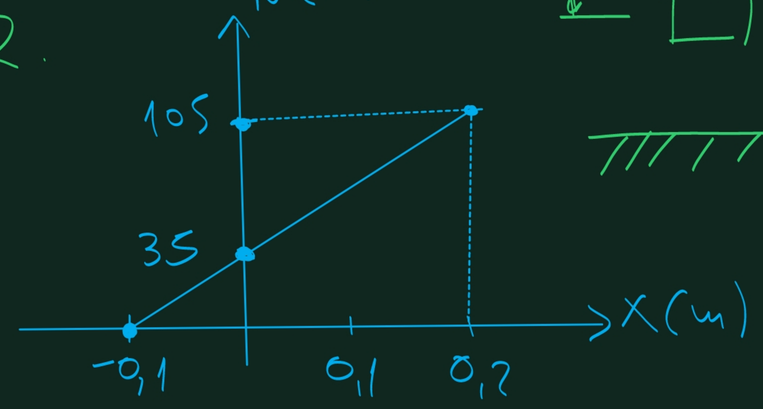
$$N_2(x) = m_2 g + \frac{m_2 K}{m_1+m_2} x \Rightarrow$$

$$N_2(x) = 35 + \frac{3{,}5 \cdot 400}{4} x \Rightarrow$$

$$N_2(x) = 35 + 350x$$

$$x \leq 0{,}2$$

γραμμική συνάρτηση του x

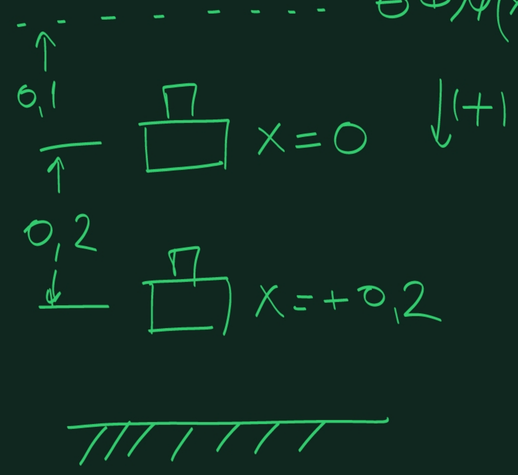


Η επαφή χάνεται στη θέση όπου

$$N_2(x) = 0 \Rightarrow x = -0{,}1\ m.$$

$$\Delta l_0 = \frac{(m_1+m_2)g}{K} = \frac{40}{400} = 0{,}1\ m$$

Άρα η επαφή χάνεται στη ΘΦΜ



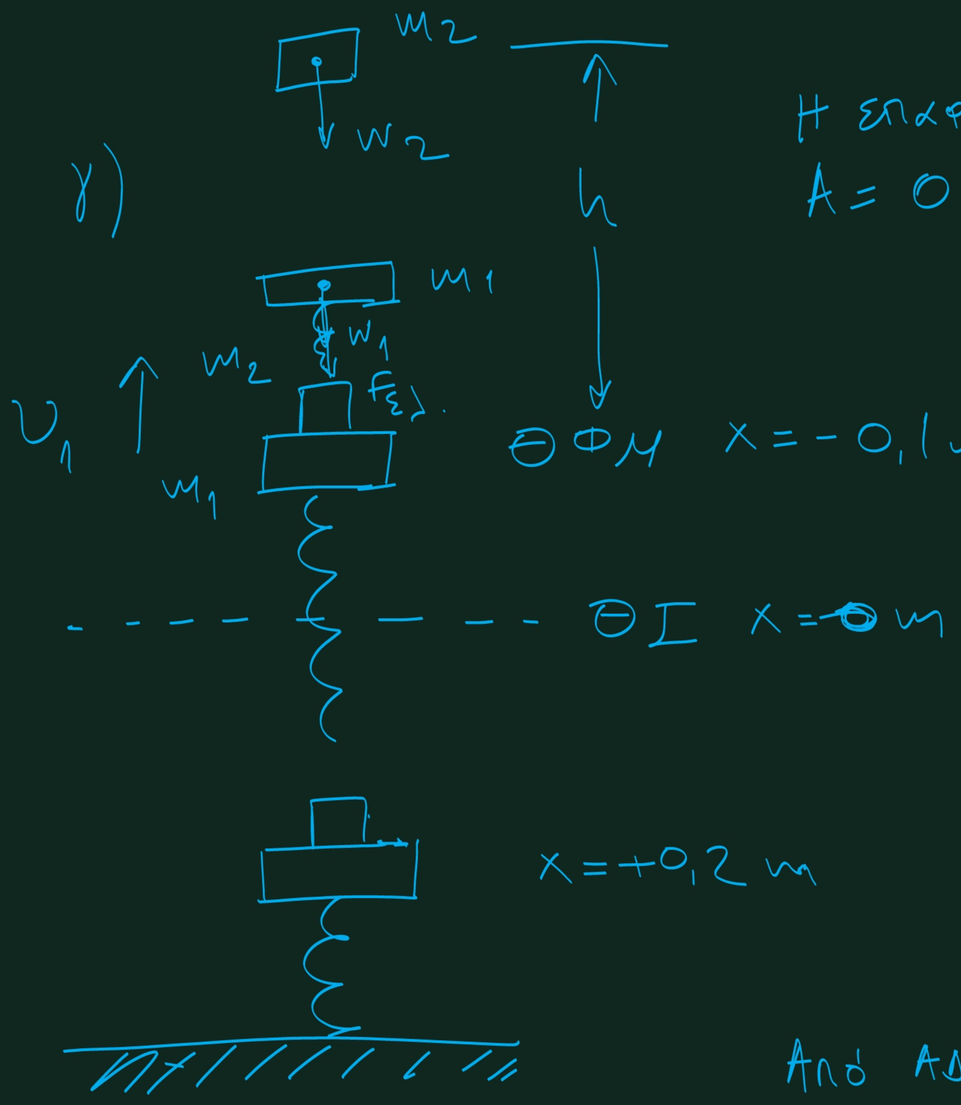
Άρα $x \in [-0{,}1\ ,\ 0{,}2]$

$$N(0{,}2) = 35 + 70 = 105\ N$$

$$N(-0{,}1) = 0\ N$$

$$N(0) = 35\ N$$

γ)



Η επιφή χάνεται στη θέση $x_1=-0,1\,m$

$A=0,2\,m$

$$\frac{1}{2}m_1U_1^2+\frac{1}{2}Kx_1^2=\frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow$$

$$(m_1+m_2)U_1^2+(m_1+m_2)\omega^2x_1^2=(m_1+m_2)\omega^2A^2 \Rightarrow$$

$$U_1^2=\omega^2(A^2-x_1^2)$$

$$\omega^2=\frac{K}{m_1+m_2}=\frac{400}{4}\Rightarrow \omega=10\,rad/sec.$$

Άρα: $U_1^2=100\cdot(0,04-0,01)=3 \Rightarrow U_1=\sqrt{3}\ m/s.$

Από ΑΔΕ για το m_2: $\frac{1}{2}m_2U_1^2=m_2gh \Rightarrow h=\frac{U_1^2}{2g}=\frac{3}{20}=0,15\,m$

δ) Το m_2 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση υπό εξαιτίας του βάρους του, οπότε $\alpha_2 = g$ (επιβράδυνση)

Το m_1 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση και λόγω της δύναμης του ελατηρίου με το οποίο είναι ακόμα δεμένο.

Άρα: $\alpha_1 = \dfrac{m_1 g + F_{\varepsilon\lambda}}{m_1} = g + \dfrac{F_{\varepsilon\lambda}}{m_1} > \alpha_2$

Επομένως, εφόσον ξεκινάν με την ίδια ταχύτητα και το m_1 έχει μεγαλύτερη επιβράδυνση, το m_1 θα σταματήσει πρώτο.