

ΣΥΝΟΛΑ

Πως θα βρω το Μ.Κ.Δ δυο ή περισσότερων αριθμών ;;;

Αναλύω κάθε αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων Αριθμός $\rightarrow$ Γράφω το $\rightarrow$ πηλίκο της διαίρεσης του αριθμού που βρίσκεται αριστερά στην ίδια γραμμή με τον αριθμό που βρίσκεται δεξιά στην ίδια γραμμή	Επιλέγω τον μικρότερο πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό που βρίσκεται στην ίδια γραμμή αριστερά Συνεχίζω την ίδια διαδικασία Θα σταματήσω την διαδικασία όταν κάτω αριστερά εμφανιστεί η μονάδα Για να αναλύσω τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων πολλαπλασιάζω όλους τους αριθμούς που βρίσκονται δεξιά από την κατακόρυφη γραμμή
---	---

↓

Μ.Κ.Δ = Το γινόμενο των κοινών αριθμών που εμφανίζονται όταν κάθε παράγοντα τον έχω επιλέξει στον μικρότερο εκθέτη
Όταν δεν υπάρχουν κοινοί αριθμοί τότε ο Μ.Κ.Δ είναι η μονάδα !!!

Χρήσιμες σχέσεις

Ένας αριθμός καλείται πρώτος όταν οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι η μονάδα και ο εαυτός του. Οι πρώτοι αριθμοί είναι :
2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , ...

Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 2 ή 4 ή 6 ή 8

Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 3

Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν το τελευταίο ψηφίο του είναι 0 ή 5

Οι διαιρέτες του α^v όταν α πρώτος είναι :

$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{v-1}, \alpha^v$

Οι διαιρέτες του $\beta \cdot \alpha^v$ όταν α, β πρώτοι με $\alpha \neq \beta$ είναι :

$1, \beta, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2, \beta \cdot \alpha^3, \dots, \beta \cdot \alpha^{v-1}, \beta \cdot \alpha^v, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{v-1}, \alpha^v$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.

Να βρεθούν τα σύνολα :

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 12\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 18\}$$

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του Μ.Κ.Δ}(12,18)\}$$

Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι $A \cap B = \Gamma$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{array}{l|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array}$$

Μ.Κ.Δ(12,18)= Το γινόμενο των κοινών αριθμών που εμφανίζονται όταν κάθε παράγοντα τον έχω επιλέξει στον μικρότερο εκθέτη $= 2 \cdot 3 = 6$

Οι διαιρέτες του $12 = 3 \cdot 2^2$ θα είναι :

$$1, 3, 3 \cdot 2 = 6, 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12, 2, 2^2 = 4$$

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Οι διαιρέτες του $18 = 2 \cdot 3^2$ θα είναι :

$$1, 2, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18, 3, 3^2 = 9$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 18\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Οι διαιρέτες του $6 = 2 \cdot 3$ θα είναι :

$$1, 2, 2 \cdot 3 = 6, 3$$

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

Παίρνω όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στο A και στο B και μόνο αυτά!!!

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \\ &= \{1, 2, 3, 6\} = \Gamma \end{aligned}$$

2.

Στο παρακάτω πίνακα να συμπληρώσετε με το σύμβολο "ν" εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο

	-3,5	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2,\bar{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
$\in \mathbb{N}$									
$\in \mathbb{Z}$									
$\in \mathbb{Q}$									
$\in \mathbb{R}$									

$$-3,5 = -\frac{35}{10} = -\frac{35:5}{10:5} = \frac{-7}{2} \in \mathbb{Q}$$

Ο αριθμός -3,5 είναι ρητός γιατί γράφεται ως πηλίκο δυο ακεραίων αριθμών

Ο αριθμός μηδέν είναι φυσικός αριθμός. Οπότε $0 \in \mathbb{N}$

Θα αποδείξω ότι ο αριθμός $\sqrt{10}$ είναι άρρητος.

Έστω ο αριθμός $\sqrt{10}$ είναι ρητός. Οπότε θα έχει την μορφή:

$$\sqrt{10} = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$$

Αν κάνω όλες τις δυνατές απλοποιήσεις ανάμεσα στα α, β θα προκύψει η μορφή:

$$\sqrt{10} = \frac{\mu}{\nu}, \text{Μ.Κ.}\Delta(\mu, \nu) = 1$$

Τα μ, ν έχουν Μ.Κ.Δ τη μονάδα όταν ο μοναδικός θετικός κοινός διαιρέτης των μ, ν είναι η μονάδα!!!

$$\sqrt{10} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow (\sqrt{10})^2 = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \Rightarrow 10 = \frac{\mu^2}{\nu^2} \Rightarrow 10\nu^2 = \mu^2 \Rightarrow \mu^2 = 2 \cdot 5\nu^2$$

Οπότε το μ^2 είναι άρτιος αριθμός. Έστω το μ δεν είναι άρτιος αριθμός τότε θα είναι περιττός. Οπότε θα έχει την μορφή:

$$\mu = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{N}$$

$$\mu^2 = (2\kappa + 1)^2 = (2\kappa)^2 + 2 \cdot 2\kappa \cdot 1 + 1^2 = \underbrace{4\kappa^2 + 4\kappa}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } 4\kappa} + 1 =$$

$$\begin{array}{l} \text{Θέτω: } \omega = 2\kappa(\kappa + 1) \\ \omega \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$4\kappa(\kappa + 1) + 1 = 2 \cdot 2\kappa(\kappa + 1) + 1 = 2\omega + 1$$

Συνεπώς μ^2 περιττός αριθμός, άτοπο γιατί μ^2 άρτιος. Συνεπώς ο μ είναι άρτιος. Οπότε θα έχει την μορφή:

$$\mu = 2\lambda, \lambda \in \mathbb{N}$$

$$10\nu^2 = \mu^2 \xRightarrow{\mu=2\lambda, \lambda \in \mathbb{N}} 10\nu^2 = (2\lambda)^2 \Rightarrow 10\nu^2 = 4\lambda^2 \Rightarrow \cancel{2} \cdot 5\nu^2 = \cancel{2} \cdot 2\lambda^2 \Rightarrow 5\nu^2 = 2\lambda^2$$

Οπότε το $5\nu^2$ είναι άρτιος αριθμός. Έστω το ν δεν είναι άρτιος αριθμός τότε θα είναι περιττός. Οπότε θα έχει την μορφή:

$$\nu = 2\rho + 1, \rho \in \mathbb{N}$$

$$5\nu^2 \stackrel{\nu=2\rho+1, \rho \in \mathbb{N}}{=} 5(2\rho + 1)^2 = 5[(2\rho)^2 + 2 \cdot 2\rho \cdot 1 + 1^2] =$$

$$5 \left(\underbrace{4\rho^2 + 4\rho}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } 4\rho} + 1 \right) = 5[4\rho(\rho + 1) + 1] = 5 \cdot 4\rho(\rho + 1) + \underbrace{5}_{4+1} =$$

$$\underbrace{5 \cdot 4\rho(\rho + 1) + 4}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } 4} + 1 = 4[5\rho(\rho + 1) + 1] + 1 = 2 \cdot 2[5\rho(\rho + 1) + 1] + 1$$

Βγάζω κοινό παράγοντα το 4

$$\begin{array}{l} \text{Θέτω } \gamma = 2[5\rho(\rho + 1) + 1] \\ \gamma \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$= 2\gamma + 1$$

Οπότε το $5\nu^2$ είναι περιττός άτοπο γιατί είναι άρτιος αριθμός.

Συνεπώς το ν είναι άρτιος αριθμός. Επειδή μ, ν είναι άρτιοι θα έχουν ως κοινό διαιρέτη το 2. Άτοπο γιατί τα μ, ν έχουν μοναδικό θετικό κοινό διαιρέτη την μονάδα. Συνεπώς ο αριθμός $\sqrt{10}$ δεν είναι ρητός άρα είναι άρρητος.

$$-\frac{13}{5} = \frac{-13}{5} \in \mathbb{Q}$$

Ο αριθμός $-\frac{13}{5}$ είναι ρητός γιατί γράφεται ως πηλίκο δυο ακεραίων αριθμών

Ο π είναι άρρητος αριθμός

$$\text{Θέτω: } y = 2, \bar{3} \Leftrightarrow y = 2,333...$$

$$y = 2,333... \Leftrightarrow 10y = 10 \cdot 2,333... \Leftrightarrow 10y = 23,333...$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10y = 23,333... \\ y = 2,333... \end{array} \right\} (-)$$

$$10y - y = 23,333... - 2,333... \Leftrightarrow 9y = 21 \Leftrightarrow y = \frac{21:3}{9:3} \Leftrightarrow y = \frac{7}{3}$$

$$2,\bar{3} = \frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$$

Ο αριθμός $2,\bar{3}$ είναι ρητός γιατί γράφεται ως πηλίκο δυο ακεραίων αριθμών

$$\frac{20}{5} = 4 \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{100} = 10 \in \mathbb{N}$$

$$-5 \in \mathbb{Z}$$

	-3,5	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2,\bar{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
$\in \mathbb{N}$		✓					✓	✓	
$\in \mathbb{Z}$		✓						✓	✓
$\in \mathbb{Q}$	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓
$\in \mathbb{R}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

3.

Να αποδείξετε ότι: $A \cap B \subseteq A$

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Γνωρίζω ότι $X \subseteq Y$ αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του A ανήκουν και στο Y .

Το σύνολο $A \cap B$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στο A και στο B και μόνο αυτά.

Αν $x \in A \cap B$ τότε θα έχω $x \in A$ και $x \in B$. Οπότε $x \in A$

Συνεπώς όλα τα στοιχεία του συνόλου $A \cap B$ ανήκουν στο

A . Οπότε $A \cap B \subseteq A$

4.

Να αποδείξετε ότι: $A \subseteq A \cup B$

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

Γνωρίζω ότι $X \subseteq Y$ αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του A ανήκουν και στο Y.

Το σύνολο $A \cup B$ αποτελείται απο όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στο A ή στο B και μόνο αυτά.

Η πρόταση p ή q ισχύει μόνο όταν ισχύει η πρόταση p ή ισχύει η πρόταση q ή ισχύουν οι p και q ταυτόχρονα.

Αν $x \in A$ τότε η πρόταση $x \in A$ ή $x \in B$ είναι αληθής γιατί είναι αληθής τουλάχιστον η μια απο αυτές. Συνεπώς $x \in A \cup B$. Συνεπώς όλα τα στοιχεία του συνόλου A ανήκουν στο $A \cup B$. Οπότε $A \subseteq A \cup B$

5.

$\text{Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cap B = A$

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Γνωρίζω ότι $X \subseteq Y$ αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία του A ανήκουν και στο Y.

Το σύνολο $A \cap B$ αποτελείται απο όλα τα στοιχεία που βρίσκονται στο A και στο B και μόνο αυτά.

Αν $x \in A \cap B$ τότε θα έχω $x \in A$ και $x \in B$. Οπότε $x \in A$

Συνεπώς όλα τα στοιχεία του συνόλου $A \cap B$ ανήκουν στο A. Οπότε $A \cap B \subseteq A$

Αν $x \in A$ και $A \subseteq B$ προκύπτει ότι όλα τα στοιχεία του A είναι και στοιχεία του B. Οπότε $x \in B$. Επειδή $x \in A$ και $x \in B$ προκύπτει ότι $x \in A \cap B$. Συνεπώς όλα τα στοιχεία του συνόλου A ανήκουν στο $A \cap B$. Οπότε $A \subseteq A \cap B$.

Γνωρίζω ότι $X = Y$ αν και μόνο αν ισχύει $X \subseteq Y$ και $Y \subseteq X$

Επειδή $A \cap B \subseteq A$ και $A \subseteq A \cap B$ προκύπτει ότι $A \cap B = A$