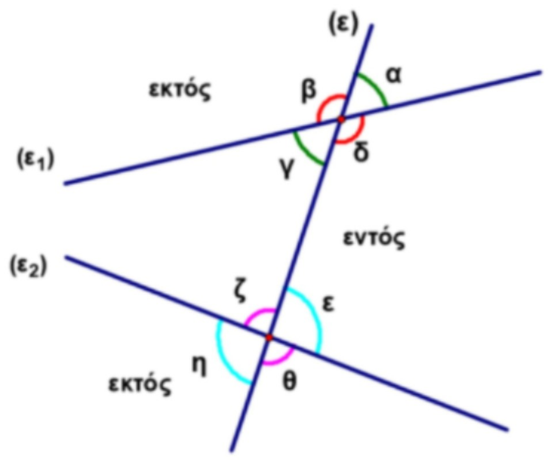
ΟΝΟΜΑ:…….. **ΤΜΗΜΑ:**……..

ΦΥΛΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ – ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΙΣ §4.1 – §4.4



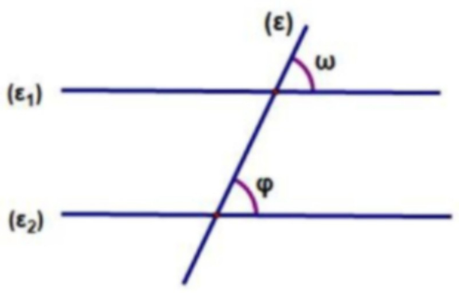
ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

- Οι γωνίες α, β, θ και η λέγονται **εκτός**
- Οι γωνίες γ, δ, ζ και ε λέγονται **εντός**
- Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας (ε) λέγονται **επί τα αυτά μέρη**
- Δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της τέμνουσας (ε) λέγονται **εναλλάξ**

Αν δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται από μια τρίτη ευθεία (ε), τότε σχηματίζουν:

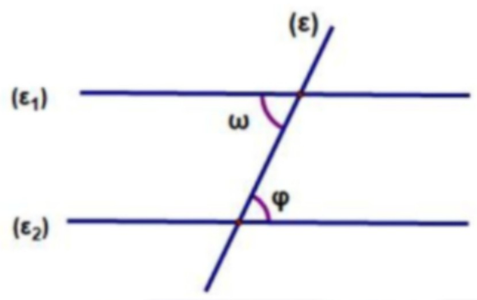
i. εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες
ii. εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
iii. εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές

i.



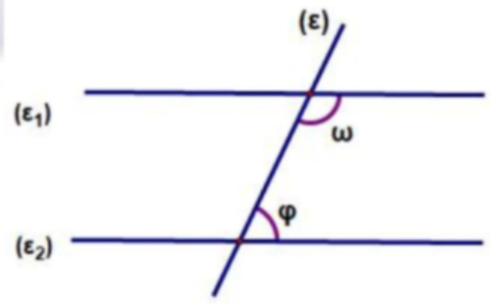
$$\left.\begin{array}{c}(\varepsilon_1)\|(\varepsilon_2) \text{ και} \\ \omega \text{ και } \varphi \text{ εντός εκτός και επί τα αυτά}\end{array}\right\} \Rightarrow \omega=\varphi$$

ii.



$$\left.\begin{array}{c}(\varepsilon_1)\|(\varepsilon_2) \text{ και} \\ \omega \text{ και } \varphi \text{ εντός εναλλάξ}\end{array}\right\} \Rightarrow \omega=\varphi$$

iii.

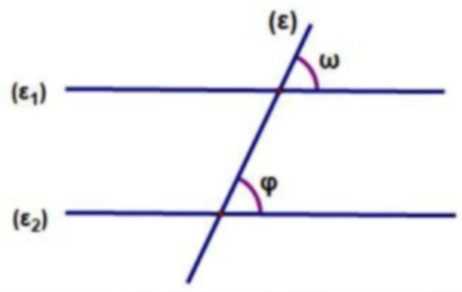


$$\left.\begin{array}{c}(\varepsilon_1)\|(\varepsilon_2) \text{ και} \\ \omega \text{ και } \varphi \text{ εντός και επί τα αυτά}\end{array}\right\} \Rightarrow \omega+\varphi=180^\circ$$

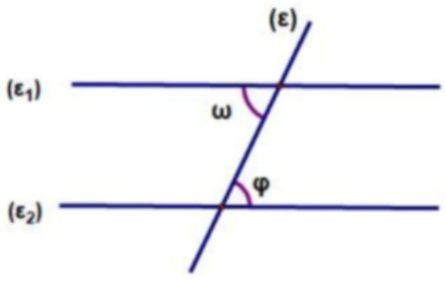
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται από μια τρίτη ευθεία (ε) και σχηματίζουν:

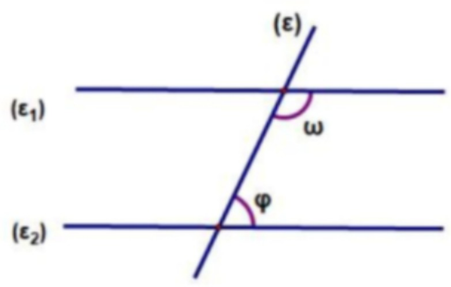
εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες
ή εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
ή εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές
τότε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.



$$\left.\begin{array}{c}\omega=\varphi \text{ και} \\ \omega \text{ και } \varphi \text{ εντός εκτός και επί τα αυτά}\end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon_1)\|(\varepsilon_2)$$



$$\left.\begin{array}{c}\omega=\varphi \text{ και} \\ \omega \text{ και } \varphi \text{ εντός εναλλάξ}\end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon_1)\|(\varepsilon_2)$$



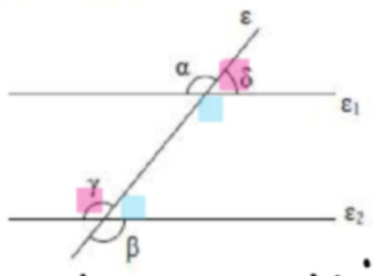
$$\left.\begin{array}{c}\omega+\phi=180^\circ \text{ και} \\ \omega \text{ και } \phi \text{ εντός και επί τα αυτά}\end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon_1)\|(\varepsilon_2)$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες στην ίδια ευθεία (ε_3), τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες. $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_3)$ και $(\varepsilon_2)\perp(\varepsilon_3) \Rightarrow (\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$
- Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία (ε_3), τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_3)$ και $(\varepsilon_2)//(\varepsilon_3) \Rightarrow (\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$
- Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες και μία ευθεία (ε) τέμνει την μία, τότε θα τέμνει και την άλλη. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ και (ε) τέμνει $(\varepsilon_1) \Rightarrow$ (ε) τέμνει (ε_2)
- Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες και μία ευθεία (ε) είναι κάθετη στην μία, τότε θα είναι κάθετη και στην άλλη. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ και $(\varepsilon)\perp(\varepsilon_1) \Rightarrow (\varepsilon)\perp(\varepsilon_2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

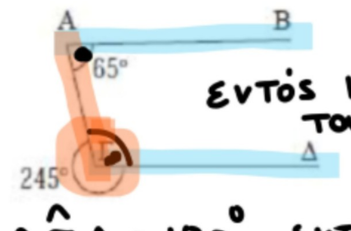
1. i) Πώς ονομάζονται οι γωνίες α και β του παρακάτω σχήματος; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους;
ii) Τι ισχύει για τις γωνίες γ̂ και δ̂;



i) α, β εκτός και εναλλάξ
$\hat{\alpha}=\hat{\beta}$

ii) γ, δ εντός, εκτός εναλλάξ
$\hat{\gamma}+\hat{\delta}=180^\circ$

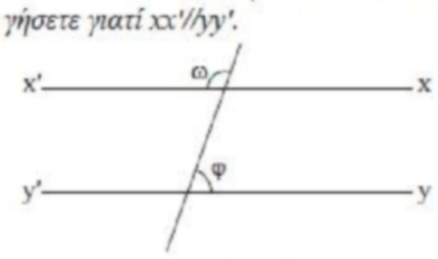
2. Να εξηγήσετε γιατί η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.



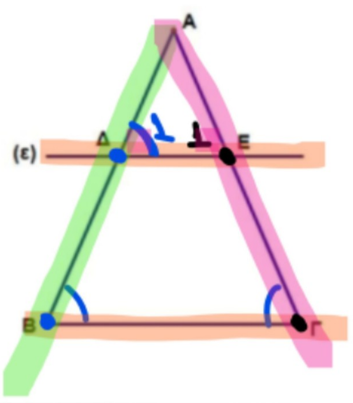
εντός και επί τα αυτά

Πρέπει
$B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ$ εντός και επί τα αυτά
$A\hat{\Gamma}\Delta + \hat{\Gamma}_{\epsilon\xi} = 360^\circ$
$A\hat{\Gamma}\Delta + 245^\circ = 360^\circ$
$A\hat{\Gamma}\Delta = 360^\circ - 245^\circ$
$A\hat{\Gamma}\Delta = 115^\circ$
Άρα $B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}\Delta = 65^\circ + 115^\circ = 180^\circ$
και $B\hat{A}\Gamma, A\hat{\Gamma}\Delta$ εντός και επί τα αυτά
οπότε $AB // \Gamma\Delta$.

3. Αν ω= 120° – θ και φ = 60° + θ να εξηγήσετε γιατί xx'//yy'.



1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

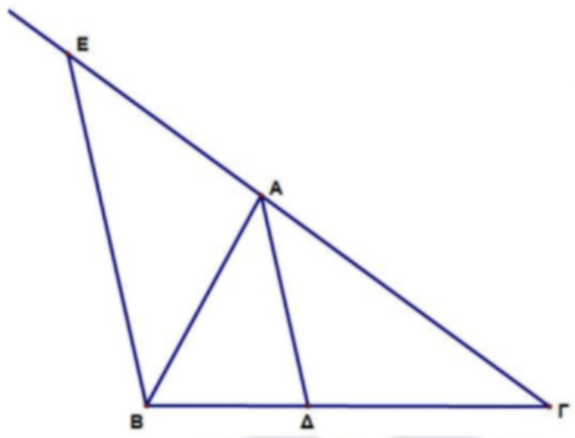


Ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \Rightarrow \begin{cases} AB = A\Gamma \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \end{cases}$

- $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά ($\Delta E // B\Gamma$)
- $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$ ως εντός, εκτός και επί τα αυτά ($\Delta E // B\Gamma$)

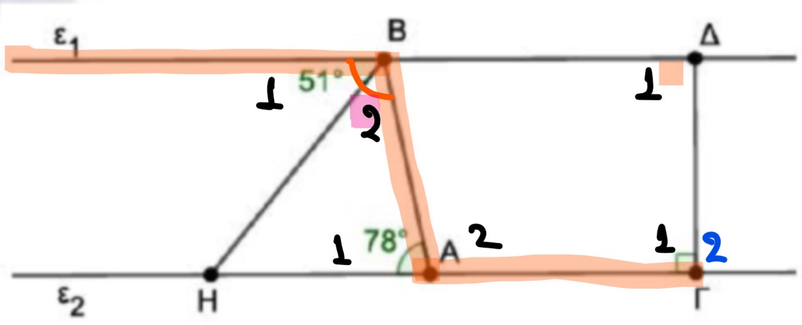
Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ δηλ. το $\overset{\Delta}{AE\Delta}$ είναι ισοσκελές

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΕ//ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ.



13821

Στο παραπάνω σχήμα η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\varepsilon_1$.
Επίσης δίνονται οι γωνίες $B\hat{A}H = 78^o$, $H\hat{B}\varepsilon_1 = 51^o$ και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$.
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε1 και ε2 είναι παράλληλες.
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.



// παράλληλες

α)

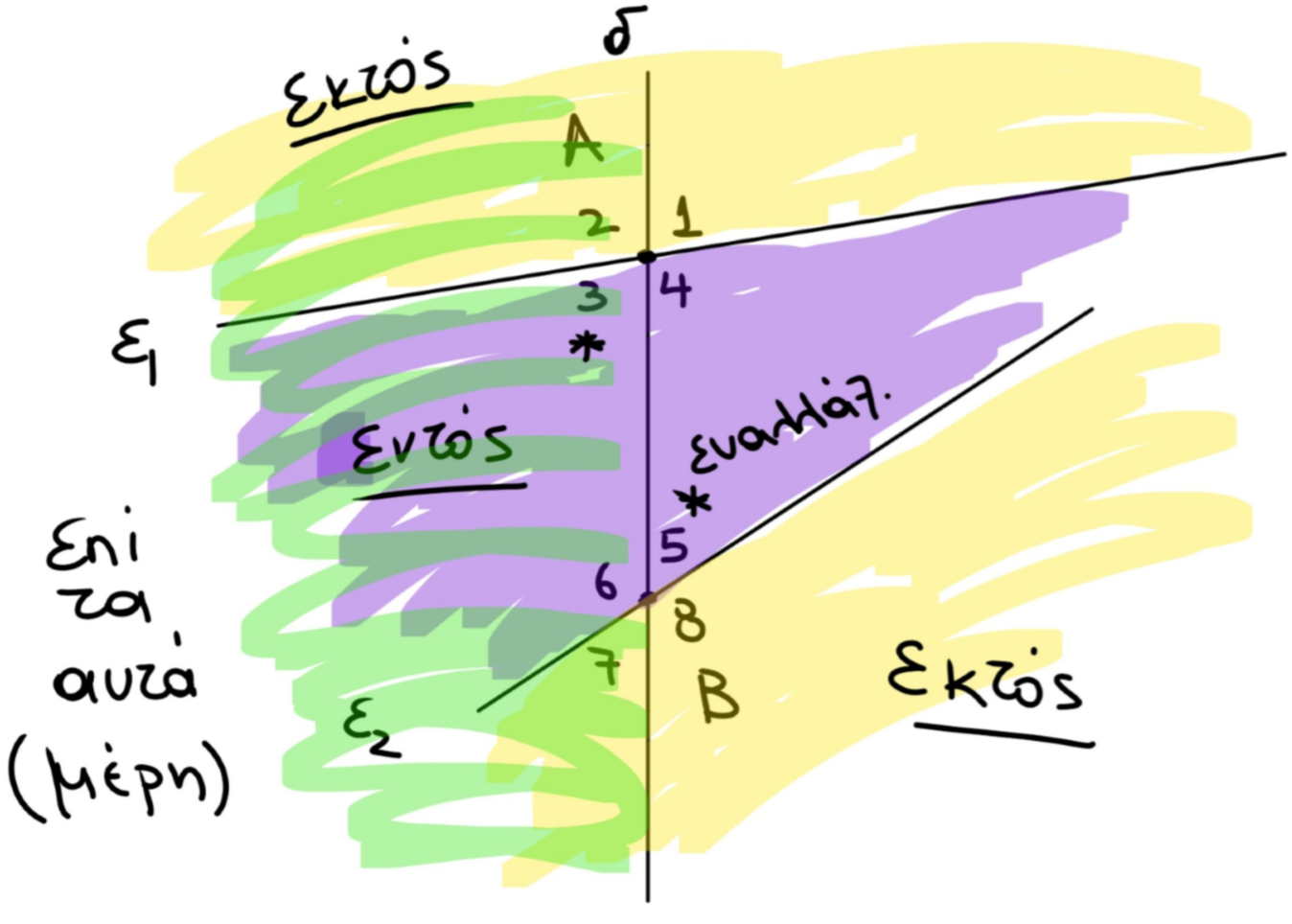
$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$	ΒΗ διχ. $A\hat{B}\varepsilon_1$
$\hat{B}_1 = 51^\circ$	δεδομένο
$\hat{B}_2 = 51^\circ$	

β) $\hat{B}_{ολ} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 51^\circ + 51^\circ = 102^\circ$
$\hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$
δηλ. $\hat{B}_{ολ} = \hat{A}_2$
και $\hat{B}_{ολ}, \hat{A}_2$ εντός εναλλάξ
οπότε $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$

γ) $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ$ εντός και επί τα αυτά
$\hat{\Delta}_1 + 90^\circ = 180^\circ$
$\hat{\Delta}_1 = 180^\circ - 90^\circ$
$\hat{\Delta}_1 = 90^\circ$

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2$ ως εντός εναλλάξ
$\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 90^\circ$
$\hat{\Delta}_1 = 90^\circ$

$\Delta\Gamma \perp (\varepsilon_2)$
$(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$
$\Rightarrow \Delta\Gamma \perp (\varepsilon_1)$
δηλ. $\hat{\Delta}_1 = 90^\circ$



$\hat{A}_1, \hat{B}_5$ εντός, εκτός και επί τα αυτά

$\hat{A}_2, \hat{B}_7$ εκτός και επί τα αυτά

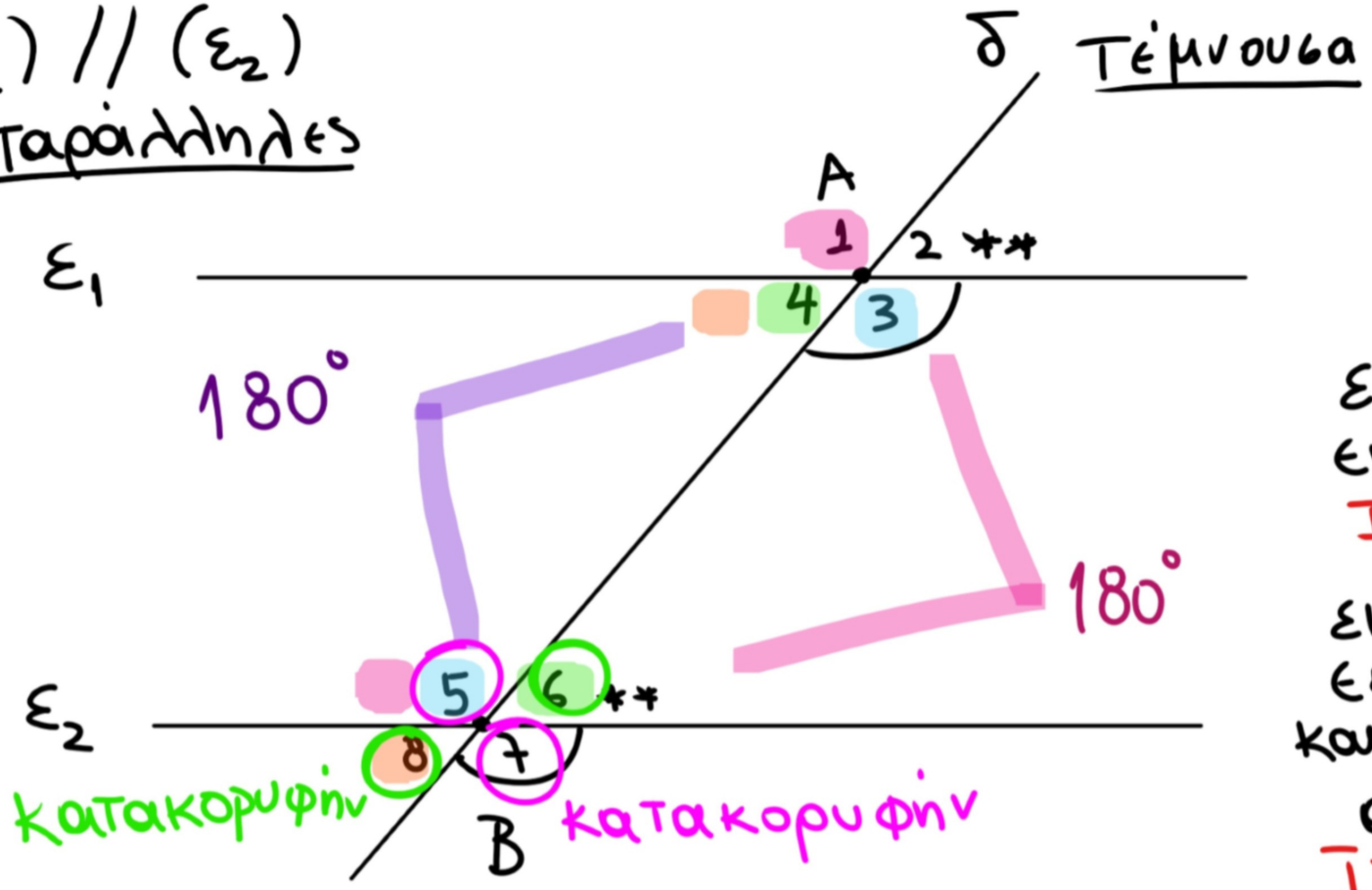
$\hat{A}_3, \hat{B}_6$ εντός και επί τα αυτά

$\hat{A}_2, \hat{B}_5$ εντός, εκτός εναλλάξ.

εκτός εντός

$(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$

Παράλληλες



Εντός εναλλάξ ΙΣΕΣ	$\hat{A}_3 = \hat{B}_5$ $\hat{A}_4 = \hat{B}_6$
Εντός εκτός και επί τα αυτά ΙΣΕΣ	$\hat{A}_4 = \hat{B}_8$ $\hat{A}_2 = \hat{B}_6$ $\hat{A}_3 = \hat{B}_7$
Εντός και επί τα αυτά 180°	$\hat{A}_4 + \hat{B}_5 = 180°$ $\hat{A}_3 + \hat{B}_6 = 180°$