

Contents

List of Figures	vii
List of Tables	xi
Chapter 1. Fonksiyonlar	1
1. Fonksiyon, Tanım ve Değer Kümeleri	1
2. Fonksiyonların Grafikleri	4
3. Düşey Doğru Testi	6
4. Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar	7
5. Tam Değer Fonksiyonu	8
6. Bazı Özel Fonksiyonlar	10
7. Fonksiyonların Bileşimi, Kaydırma ve Ölçeklendirme	31
8. Bilgisayarda veya hesap makinesinde grafik çizimi	46
Chapter 2. Limit ve Süreklilik	51
9. Değişim Oranı ve Limit	51
10. Fonksiyonların limiti	55
11. Sağ-Sol Limit ve Sonsuzlukta Limit	72
12. Sonsuz Limit ve Düşey Asimptot	84
13. Süreklilik	92
Chapter 3. Türev	107
14. Fonksiyonun Türevi	107
15. Türev Almadaki Kurallar	113
16. Trigonometrik - Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	121
17. Logartima, Üstel, Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonlarının Türevi	124
18. Parametrik Denklemleri Verilen Fonksiyonların Türevi	127
19. Kapalı Fonksiyonların Türevi	130
20. Değişimin Oranı Olarak Türev	132
21. Lineerleştirme ve Diferansiyel	143

Chapter 4. Türevin Uygulamaları	147
22. Fonksiyonun Ekstremleri	147
23. Ortalama Değer Teoremi	154
24. Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi	160
25. Konkavlık ve Eğri çizimleri	164
26. Belirsiz Şekiller ve L'Hôpital Kuralı	181
27. Optimizasyon Problemlerine Uygulanması	186
28. Newton Yöntemi	206
Chapter 5. İntegral	209
29. Belirsiz İntegral	209
30. Değişken Değiştirme Yöntemi	212
31. Kısmi İntegrasyon Yöntemi	219
32. İndirgeme Bağlılıkları	224
33. Basit Kesirlere Ayırma	230
34. Trigonometrik İntegraller	233
35. İrrasyonel fonksiyonların İntegrali	243
36. Belirli İntegraller	247
37. Aralığın Parçalanması	253
38. İntegrallenebilen Fonksiyonlar için Önemli Özellikler	261
Chapter 6. Belirli İntegrallerin Uygulamaları	269
39. Alan Hesabı	269
40. Kesit Yöntemi ile Hacim Hesabı	280
41. Dönel Cisimlerin Hacimlerinin Hesaplanması	283
42. Eğri Uzunluğu Hesabı	292
43. Dönel Yüzeylerin Alan Hesabı	297
44. Moment ve Ağırlık Merkezi	304
Chapter 7. Genelleşmiş İntegraller	311
45. Birinci Tip Genelleşmiş İntegraller (Sınırsız aralık,sınırlı fonksiyon)	312
46. İkinci Tip Genelleşmiş İntegraller (Sınırlı aralık,sınırsız fonksiyon)	315
47. Üçüncü Tip Genelleşmiş İntegraller (Sınırsız aralık,sınırsız fonksiyon)	322
Chapter 8. Diziler ve Seriler	323
48. Diziler	323
49. Seriler	330
50. Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri	335

51. Kuvvet Serileri	339
52. Taylor ve Maclaurin Serileri	343
Bibliography	349
Bibliography	349

List of Figures

1.1 Fonksiyon	1
1.2 Tanım kümesi - Değer kümesi	2
2.1 $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktalar.	4
3.1 Düşey Doğru Testi	7
4.1 $y = x $ fonksiyonu	8
5.1 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu	9
5.2 $\lceil x \rceil$ fonksiyonu	10
6.1 $f(x) = mx$ fonksiyonu ve $f(x) = n$ fonksiyonu	10
6.2 $f(x) = x^n, n = 1, 2, 3, 4, 5$ fonksiyonu	11
6.3 $a = -1, a = -2$ durumunda kuvvet fonksiyonu	12
6.4 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ durumlarında kuvvet fonksiyonu	13
6.5 Polinom fonksiyonlar	14
6.6 Rasyonel Fonksiyonlar	15
6.7 Cebirsel Fonksiyonlar	16
6.8 Bazı önemli açıların trigonometrik değerleri	17
6.9 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$ fonksiyonları	18
6.10 Üstel fonksiyon	19
6.11 Logaritmik Fonksiyonlar	20
6.12 Birebir ve birebir olmayan fonksiyon -yatay doğru testi	21
6.13 f fonksiyonu ve tersi f^{-1}	22
6.14 $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ ve $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ fonksiyonunun grafiği	23
6.15 $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ve $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ fonksiyonunun grafiği	23
6.16 $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R$ ve $\arctan : R \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ fonksiyonunun grafiği	24

6.17	$\cot : (0, \pi) \rightarrow R$ ve $\operatorname{arccot} : R \rightarrow (0, \pi)$ fonksiyonunun grafiği	24
6.18	$y = \cosh x$ fonksiyonun grafiği - $y = \sinh x$ fonksiyonun grafiği	25
6.19	$y = \tanh x$ fonksiyonun grafiği - $y = \coth x$ fonksiyonun grafiği	25
6.20	$y = \sec hx$ fonksiyonun grafiği - $y = \csc hx$ fonksiyonun grafiği	26
6.21	$\arcsin hx$ fonksiyonu	27
6.22	$\arccos h$ fonksiyonunu	27
6.23	$\arctan h$ fonksiyonu	28
6.24	$\operatorname{arccoth}$ fonksiyonu	29
6.25	$\operatorname{arcsech}$ fonksiyonu	30
6.26	$\operatorname{arccsch}$ fonksiyonu	31
7.1	İki fonksiyonun toplamı	32
7.2	$\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ ve $\sqrt{x(1-x)}$ fonksiyonu	33
7.3	$f \circ g$ fonksiyonu	34
7.4	Fonksiyonunun grafiğinin yukarıya doğru ve aşağıya doğru kaydırılması	35
7.5	Fonksiyonunun grafiğinin sola doğru ve sağa doğru kaydırılması	36
7.6	Fonksiyonun x eksenindeki yansıması ve y eksenindeki yansıması	38
7.7	Fonksiyonun grafiğinin düşey olarak genişletilmesi ve sıkıştırılması	40
7.8	Fonksiyonun grafiğinin yatay olarak genişletilmesi ve sıkıştırılması	41
7.9	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiği	42
7.10	$f(2x) = 16x^4 - 32x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiği	43
7.11	$f(-2x) = 16x^4 + 32x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiği	44
7.12	$\frac{1}{2}f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{2}$ fonksiyonunun grafiği	45
7.13	$3\frac{f(-2x)}{2} = -\frac{x^4 - 4x^3 + 10}{2}$ fonksiyonunun grafiği	46
8.1	$f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ fonksiyonunun $x \in [-10, 10], y \in [-10, 10]$, $x \in [-4, 4], y \in [-50, 10]$, $x \in [-4, 10], y \in [-60, 60]$ bölgesinde grafikleri	
8.2	$y = x, y = -x + 3\sqrt{2}$, ve $y = \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonlarının $x \in [-6, 6], y \in [-6, 8]$, $x \in [-6, 6], y \in [-4, 4]$, $x \in [-3, 3], y \in [0, 4]$ bölgesinde grafikleri	
8.3	$y = \frac{1}{2-x}$ fonksiyonunun $x \in [-10, 10], y \in [-10, 10]$ ve $x \in [-6, 6], y \in [-4, 4]$ bölgesinde grafikleri	48
8.4	$y = \sin(100x)$ fonksiyonunun $x \in [-12, 12], y \in [-1, 1]$, $x \in [-6, 6], y \in [-1, 1]$, $x \in [-0.1, 0.1], y \in [-1, 1]$ bölgesinde grafikleri	48
8.5	$y = \cos x + \frac{\sin(50x)}{50}$ fonksiyonunun $x \in [-6, 6], y \in [-1, 1]$ ve $x \in [-0.6, 0.6], y \in [0.8, 1.02]$ bölgesinde grafikleri	49
9.1	Değişimin ortalama oranı	53

9.2 Meyve sineklerinin 50 günlük üreme grafiği	54
9.3 Meyve sineklerinin 23. günde sinek üremesinin artışı	55
10.1 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktası dışında grafiği	56
10.2 Fonksiyonun limiti fonksiyonun o noktada aldığı değere bağlı değildir.	58
10.3 Limiti olmayan fonksiyonlar	59
10.4 ϵ ve δ ilişkisi	60
10.5 δ ve ϵ sınırları	61
10.6 δ değerinin bulunması	63
10.7 Sadelleştirme Yöntemi	66
10.8 Sandviç teoremi	67
10.9 Sandviç Teoreminin uygulaması	68
10.10 $ \theta \leq \sin(\theta) \leq \theta $ eşitsizliği	69
10.11 $1 \leq 1 - \cos(\theta) \leq \theta $ eşitsizliği	69
10.12 $\frac{\sin \theta}{\theta}$ grafiği	70
11.1 $y = \frac{x}{ x }$ fonksiyonunun grafiği	72
11.2 Sağ taraflı limit	73
11.3 Sol taraflı limit	74
11.4 $y = \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ fonksiyonunun yatay asimptotu	81
11.5 $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun yatay asimptotu	82
11.6 $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$ fonksiyonu	83
12.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ geometiksel ifadesi	84
12.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ geometiksel ifadesi	85
12.3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ geometiksel ifadesi	86
12.4 $y = \frac{x+3}{x+2}$ fonksiyonu için yatay ve düşey asimptotlar	88
12.5 $y = -\frac{8}{x^2-4}$ fonksiyonu için yatay ve düşey asimptotlar	89
12.6 $y = \sec x$, $y = \tan x$ fonksiyonlarının sonsuz sayıda asimptotu vardır	90
12.7 $y = \csc x$, $y = \cot x$ fonksiyonlarının sonsuz sayıda asimptotu vardır	90
12.8 $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$ fonksiyonunun asimptotları	91
12.9 f ve g fonksiyonlarının orjinin yakınındaki grafikleri ve daha büyük $ x $ değerleri için grafikleri	92

13.1	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ yoktur	93
13.2	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır fakat $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	93
13.3	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır ve $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	94
13.4	$\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında sürekliliği	95
13.5	$ x $ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekliliği	96
13.6	$U(x)$ fonksiyonunun sürekliliği	96
13.7	Değişimin ortalama oranı	97
13.8	Kaldırılabilir süreksizlik	98
13.9	Sıçrama süreksizliği	99
13.10	sonsuz süreksizlik	100
13.11	Salınım Süreksizliği	100
13.12	f fonksiyonu ve onun sürekli genişletmesi F	102
13.13	Ara değer Teoremi	103
13.14	Bolzano Teoremi	103
13.15	$f(x) = x^3 + x^2 - 1$ fonksiyonunun $x \in [0, 1]$ aralığında kökü vardır.	104
13.16	$f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 3 \\ x-2, & -3 \leq x < 0 \end{cases}$ fonksiyonun $x \in [-3, 3]$ aralığında kökü yoktur.	104
14.1	$P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen tanjant ve sekant doğruları	107
14.2	$y = \frac{1}{x}, x \neq 0$ doğrusunun $x = x_0$ noktasındaki eğimi	108
14.3	$y = f(x) = x $ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevi	111
14.4	Değişimin ortalama oranı	112
25.1	$f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$	169
25.2	$f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$	170

List of Tables

CHAPTER 1

Fonksiyonlar

Değişebilen büyüklükler arasında bazı bağlantılar vardır. Örneğin çemberin alanı $A = \pi r^2$ dir böylece yarıçap değiştikçe alan da değişir veya hareket eden bir objenin yer değiştirmesi onun hızına bağlıdır. Yatırımcının kar payı parayı bankada tuttuğu zamana bağlıdır gibi. Bu gibi bağlantıların özel olarak adına fonksiyon denir ve bu bölümde fonksiyon tanımı özellikleri ve bazı özel fonksiyonları ele alacağız.

1. Fonksiyon, Tanım ve Değer Kümeleri

Tanım 1.1. A ve B iki küme olsun. Herbir $x \in A$ için nin bir ve yalnız bir $f(x) \in B$ elemanını eşleyen f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir.

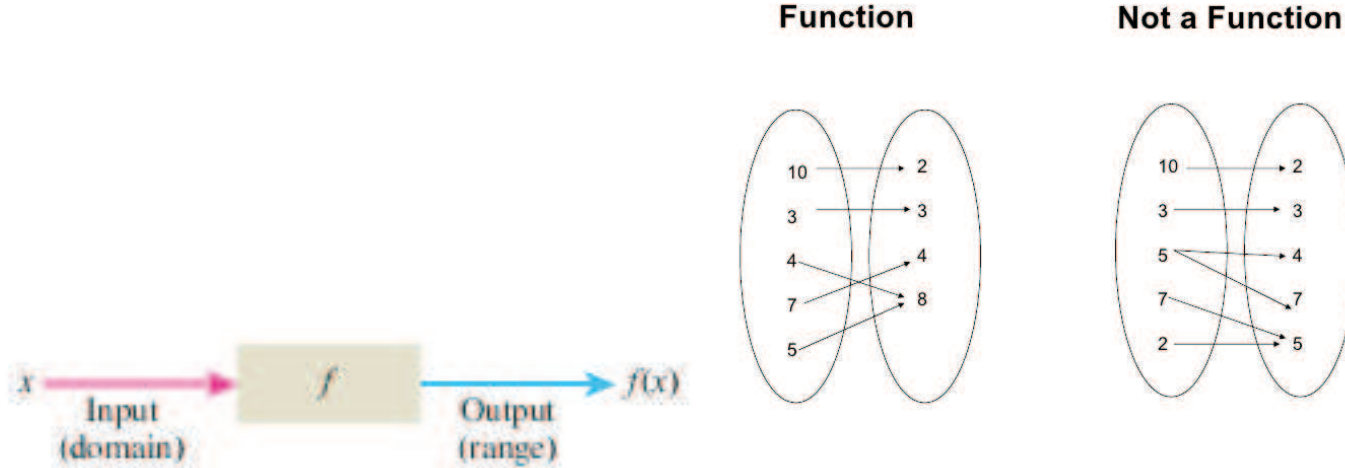


FIGURE 1.1. Fonksiyon

A dan B ye bir fonksiyon genellikle

$$f : A \rightarrow B \text{ veya } A \xrightarrow{f} B$$

ile gösterilir. Burada A kümesine tanım kümesi B kümesine de değer kümesi denir.



FIGURE 1.2. Tanım kümesi - Değer kümesi

Örnek 1.2. Her bir reel sayıyı 2 katına eşitleyen fonksiyonu bulunuz.

Çözüm

$$f : x \longrightarrow 2x \text{ veya } f(x) = 2x \text{ veya } y = 2x$$

□

Eğer f fonksiyonu, tanım kümesinin x elemanını değer kümesinin y elemanı ile eşleştirirse x in f altındaki görüntüsüne y denir ve $y = f(x)$ biçiminde gösterilir. x tanım kümesinde değiştikçe, ona bağlı olarak y değeri de değer kümesinde değişir. Bu nedenle $y = f(x)$ bağıntısı yardımıyla bir fonksiyon tanımlandığında x elemanına bağımsız değişken, y elemanına bağımlı değişken adı verilir.

Örnek 1.3. Bir karenin çevresi ve alanı onun bir kenar uzunluğunun fonksiyonu olabilir mi?

Çözüm Bir karenin bir uzunluğuna x diyelim. Buna göre karenin alanı $A = x^2$ karenin çevresi $\Ç = 4x$ dir. Buna göre herbir x değeri için bir tek A ve bir tek $\Ç$ değeri vardır. Bu yüzden karenin çevresi ve alanı onun kenar uzunluğunun bir fonksiyonudur.



X

□

Örnek 1.4. Bir dikdörtgenin alanı, onun çevresinin bir fonksiyonu mudur? Ve bir karenin alanı onun çevresinin bir fonksiyonu olur mu?

Çözüm Bir dikdörtgenin alanı, onun çevresinin bir fonksiyonu değildir. Çünkü çevresi aynı olan dikdörtgenlerin alanları farklı olabilir. Örneğin çevresi 40 cm olan iki dikdörtgen farklı alanlara sahip olabilir. Eni 4, boyu 16 cm olan dikdörtgenin alanı $A = 4 * 16 = 64 \text{ cm}^2$ olduğu halde, eni 9, boyu 11 cm olan dikdörtgenin alanı $A = 9 * 11 = 99 \text{ cm}^2$ olur. Görüldüğü gibi bir çevreye birden farklı alan karşılık gelmektedir. Kare için tersi doğrudur. □

Not 1.5. $x, f(x)$ ve f farklı şeylerdir. Zira x, A tanım kümesinin $f(x)$ de B değer kümesinin elemanıdır. f ise, A nın x elemanını B nın $f(x)$ elemanına dönüştüren bir bağıntıdır

Tanım 1.6. $f : A \rightarrow B$ fonksiyon ve $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$ ise f fonksiyonuna reel değerli fonksiyon denir. f fonksiyonun tanım kümesi genellikle belirtilmez. Aksi belirtilmedikçe bir fonksiyonun tanım kümesi, reel sayılar kümesinin $f(x)$ bir reel sayı olacak şekilde en geniş alt kümesi olarak anlaşılabacaktır.

Örnek 1.7. Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve değer kümelerini doğrulayınız.

Fonksiyon	Tanım Kümesi x	Değer Kümesi $y = f(x)$
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Çözüm Her bir x değeri için fonksiyonu tanımlayabileceğimizden tanım kümesi tüm reel sayılardır yani $\mathbb{R}$. $x^2 \geq 0$ olduğundan değer kümesi $[0, \infty)$ aralığıdır. $\sqrt{1-x^2}$ sayısının anlamlı olabilmesi için (kompleks sayılar hariç) $1-x^2 \geq 0$ olmalıdır. Buna göre $x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ olmalıdır. Tanım kümesi böylece $[-1, 1]$ aralığıdır. Bu aralıkta $1-x^2 \in [0, 1]$ dir. $\square$

2. Fonksiyonların Grafikleri

Verileri kullanmak ve yorumlamak için bu verileri grafik formunda göstermek oldukça kullanışlıdır. Kartezyen koordinat sisteminde f fonksiyonunun grafiğini $(x, f(x))$ temsil eder. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafik üzerindeki noktalarının elde edebilmek için fonksiyonun tanım kümesindeki $x_1, x_2, \dots$ sayılarını uygun bir şekilde seçeriz ve $f(x_1), f(x_2), \dots$ değerlerini hesaplarız ve bunlara karşılık gelen $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots$ noktalarını belirleriz ve sonra da bu noktaları düzgün bir eğri ile birleştiririz.

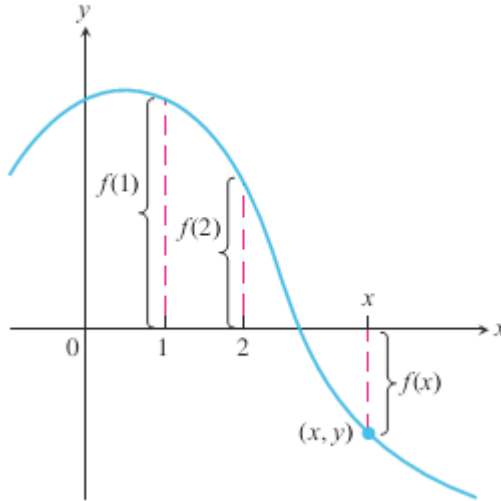
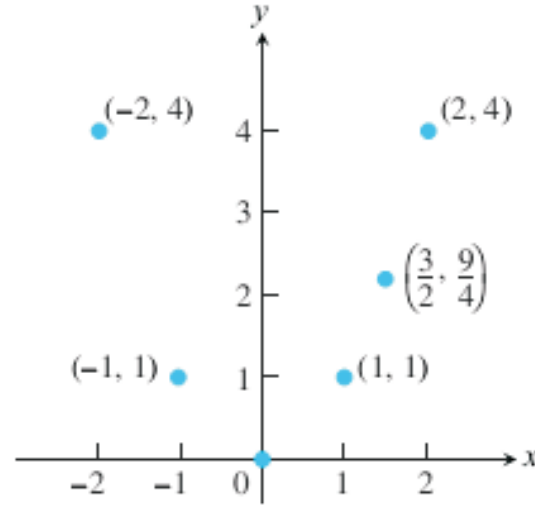


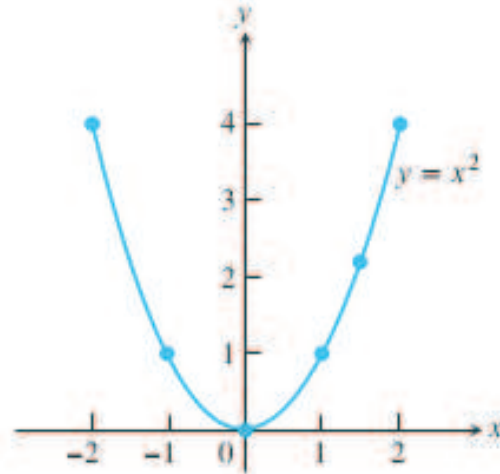
FIGURE 2.1. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktalar.

Örnek 2.1. $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

- Çözüm**
1. $y = x^2$ fonksiyonunu sağlayacak şekilde xy çiftlerini belirleyelim.
 2. (x, y) noktalarını kartezyen koordinat sisteminde gösteriniz.

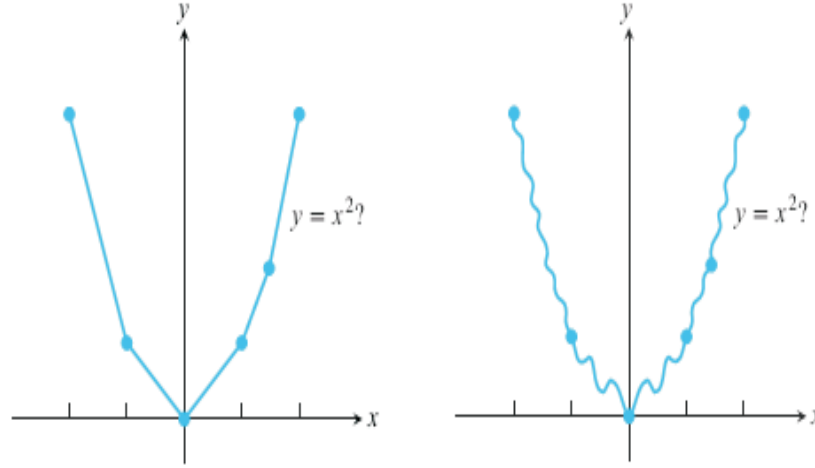


3. İşaretlenen noktalar üzerinden pürüzsüz bir birleştirme yapınız.



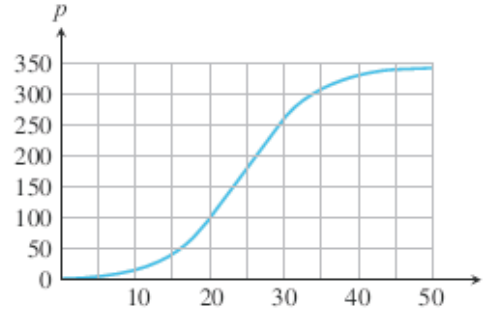
Soru?

$y = x^2$ grafiğinin aşağıdaki gibi olmadığını nasıl anlarız?



Bulmak için daha fazla nokta çizeriz. Ama asıl soru hala kalmakta nasıl birleştirme yapacağız veya işaretlediğimiz noktalar arasında fonksiyon neye benziyor sorusudur. Bu soruların cevabını daha sonra göreceğimiz türev konusunda vereceğiz. $\square$

Örnek 2.2. Aşağıdaki grafikte p ile gösterilen meyve sineklerinin nüfus artımıdır. Buna göre 20 ve 45 gün sonra nüfusu bulunuz. Tüm zaman aralığında nüfus artım aralığı nedir?



Çözüm Grafiğe göre 20 gün sonra nüfus 100 yani $p(20) = 100$ olurken 45 gün sonra da benzer şekilde yaklaşık nüfus yaklaşık 340 civarında olur yani $p(45) = 340$. $0 \leq t \leq 50$ aralığında nüfus yaklaşık olarak $[0, 345]$ aralığındadır. $\square$

3. Düşey Doğru Testi

Her eğribir fonksiyon belirtmez. Fonksiyon tanımına göre tanım kümesindeki her bir değer için bir tek değer karşılık gelmektedir. Diğer bir ifade ile $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini en çok bir noktada kesmesi gerekmektedir. Diğer bir deyişle düşey bir doğru en çok bir noktada bir grafiği kesiyorsa bu durumda o grafik bir fonksiyonun grafiğidir. Bunu belirleyen teste de düşey doğru testi denir.

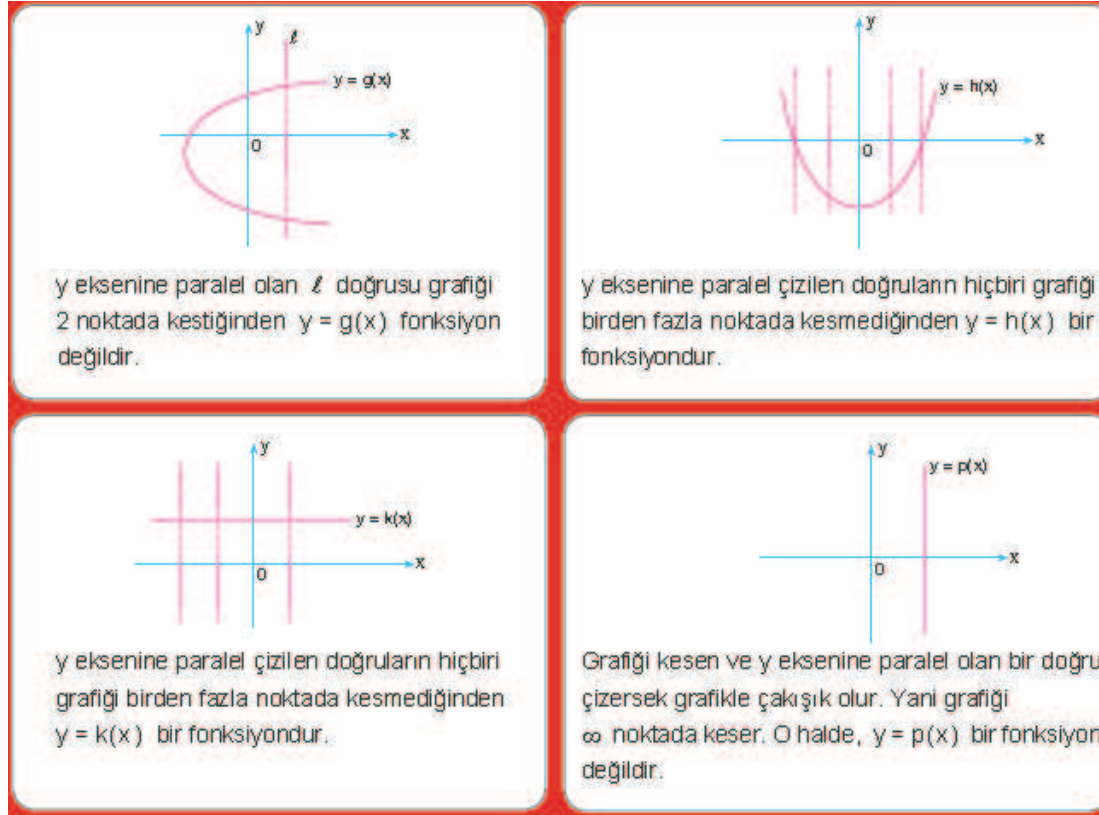


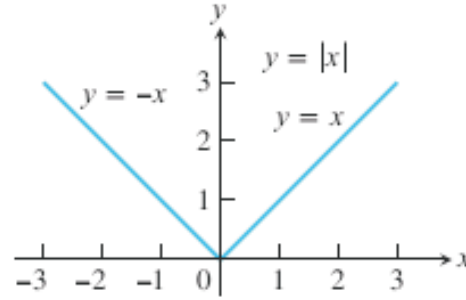
FIGURE 3.1. Düşey Doğru Testi

4. Parçalı Tanımlı Fonksiyonlar

Tanım 4.1. Bir fonksiyon tanım kümesinin farklı parçaları olan iki veya daha fazla sayıda ifade ile tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonlara parçalı tanımlı fonksiyonlar denir.

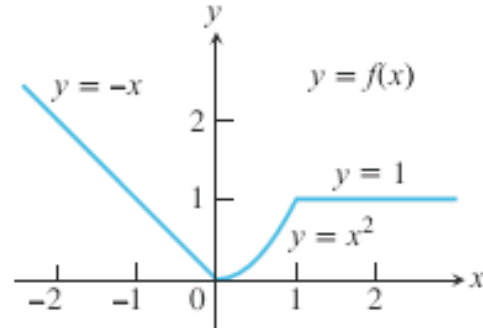
Örnek 4.2. $y = |x|$ fonksiyonu parçalı tanımlı bir fonksiyondur.

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

FIGURE 4.1. $y = |x|$ fonksiyonu

Örnek 4.3. Aşağıdaki fonksiyon da parçalı tanımlı bir fonksiyondur.

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



5. Tam Değer Fonksiyonu

Tanım 5.1. Bir x reel sayısının tam değeri ondan küçük en büyük tam sayı değeri veya kendisidir. $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilir. Bu fonksiyona taban fonksiyonu da denir.

$$\lfloor x \rfloor = n, n \leq x < n + 1$$

Örnek 5.2. $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$, $\lfloor 1.9 \rfloor = 1$, $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -1.2 \rfloor = -2$, $\lfloor -0.3 \rfloor = -1$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$

Örnek 5.3. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \dots \\ -2, -2 \leq x < -1 \\ -1, -1 \leq x < 0 \\ 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \\ 2, 2 \leq x < 3 \\ \dots \end{cases}$$

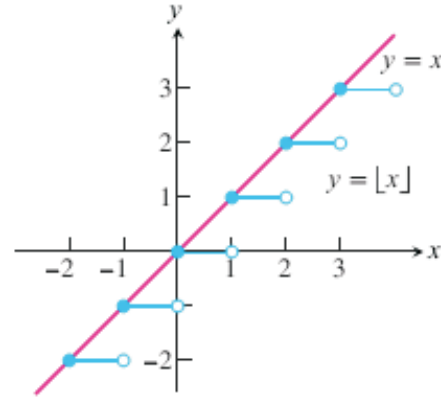
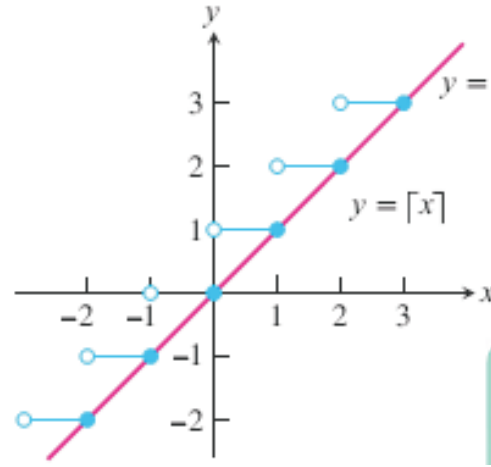


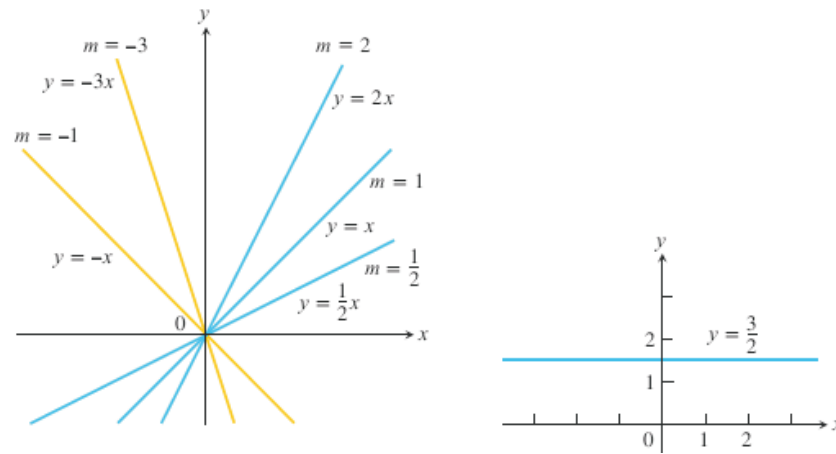
FIGURE 5.1. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu

x den büyük en küçük tam sayı ve ya kendisine eşit olan değere de tavan fonksiyonu veya yuvarlama fonksiyonu denir ve $\lceil x \rceil$ ile gösterilir. Aşağıdaki grafik ile fonksiyon verilmiştir.

FIGURE 5.2. $\lceil x \rceil$ fonksiyonu

6. Bazı Özel Fonksiyonlar

Tanım 6.1. (Lineer Fonksiyonlar) m, n sabit olmak üzere $f(x) = mx + n$ formunda yazılan tüm fonksiyonlara lineer fonksiyon denir. $n = 0$ durumunda $f(x) = mx$ fonksiyonu orjinden geçer. m eğiminin sıfır olması durumunda da fonksiyon sabit fonksiyondur.

FIGURE 6.1. $f(x) = mx$ fonksiyonu ve $f(x) = n$ fonksiyonu

Tanım 6.2. (Kuvvet Fonksiyonu) $f(x) = x^a$, a sabit, fonksiyonuna kuvvet fonksiyonu denir. a sabitinin durumuna göre bazı önemli durumlar vardır.

1) $a = n$ pozitif tam sayı durumu $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ fonksiyonunun grafikleri aşağıdaki gibidir.

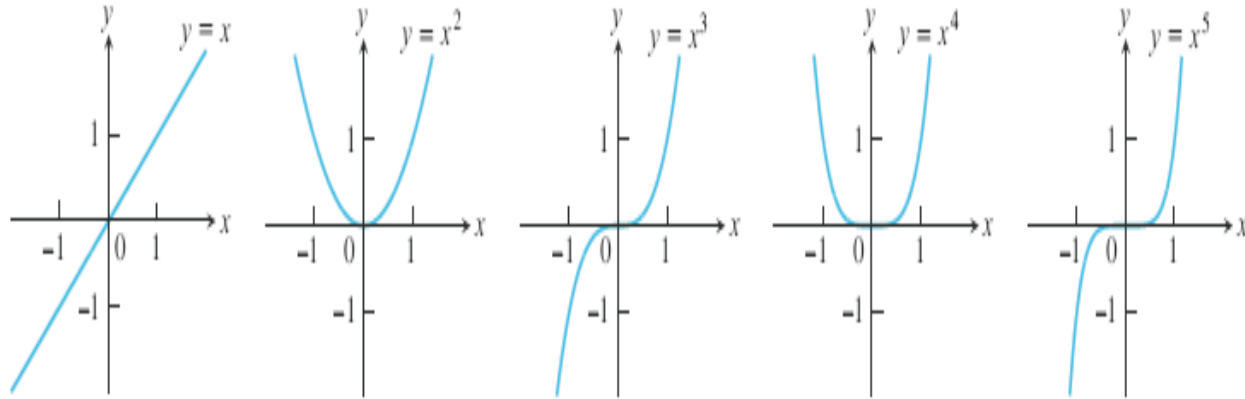


FIGURE 6.2. $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ fonksiyonu

2) $a = -1, a = -2$ durumunda $f(x) = \frac{1}{x}$ $xy = 1$ hiperbolünü tanımlar ve tanım kümesi $x \neq 0$ için tanımlanır.

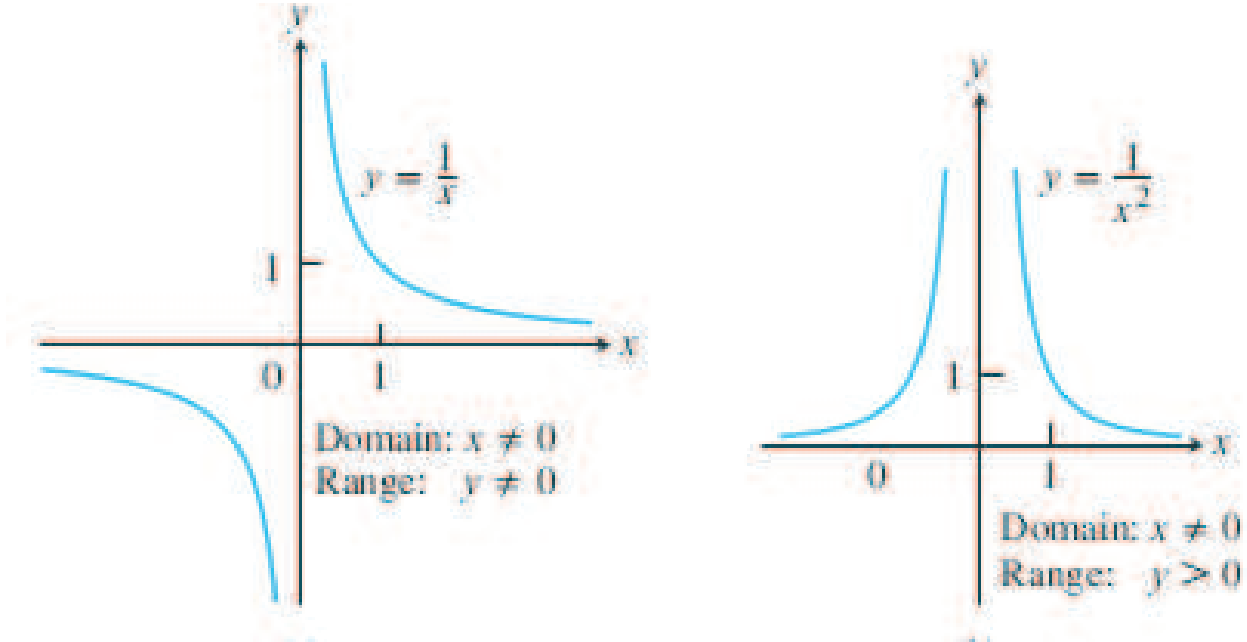
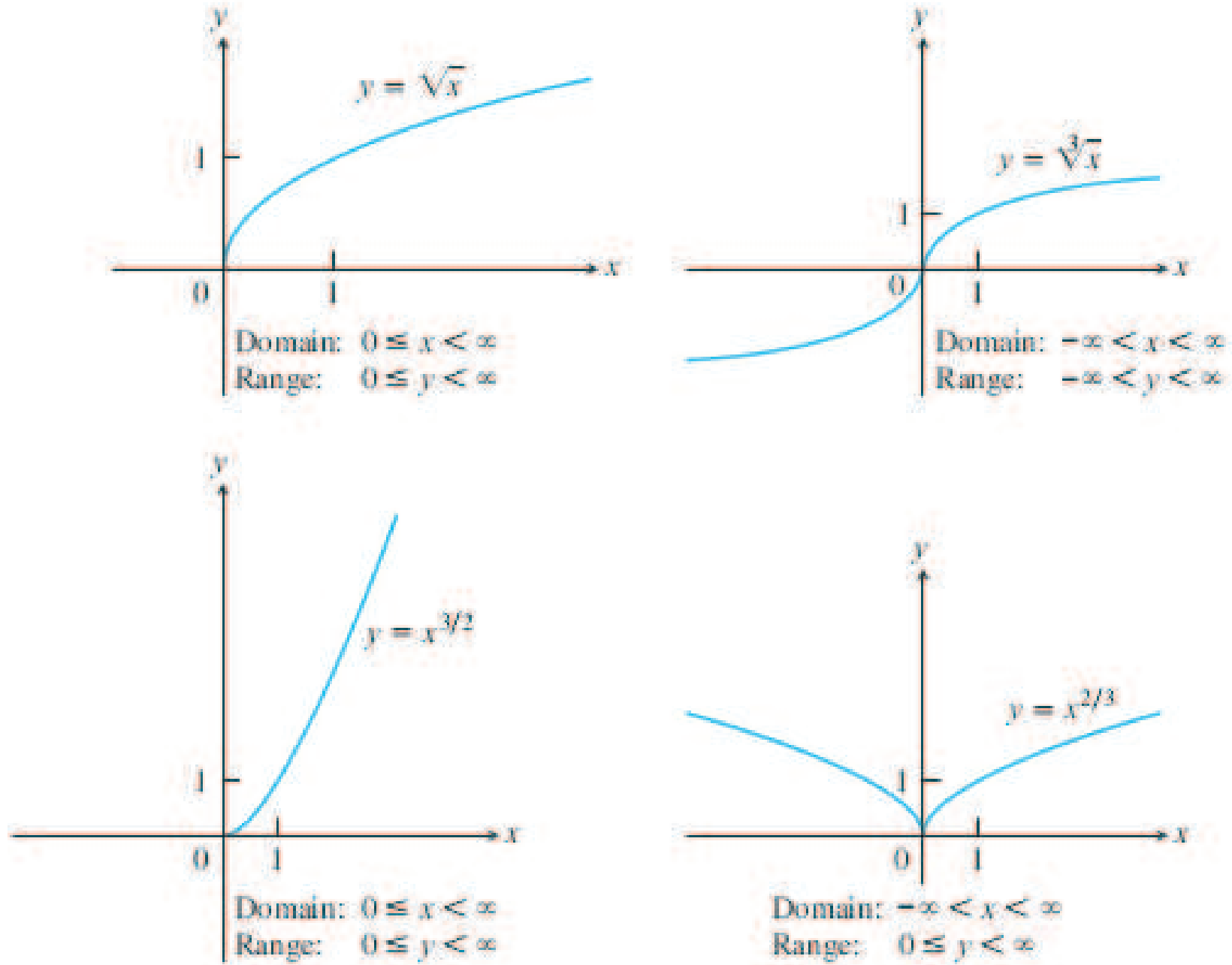


FIGURE 6.3. $a = -1, a = -2$ durumunda kuvvet fonksiyonu

3) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ durumlarında fonksiyonlara karekök veya küpkök fonksiyonu da denir.

FIGURE 6.4. $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ durumlarında kuvvet fonksiyonu

Tanım 6.3. (Polinom fonksiyonlar) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ formunda olan fonksiyonlara polinom fonksiyonlar denir. $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sayılarına polinomun katsayıları denir ve $a_n \neq 0$ olmak üzere n sayısına polinomun derecesi denir. $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ formundaki 2.dereceden polinom fonksiyona kuadretik fonksiyon da denir ve $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 3.dereceden fonksiyonuna da kübik fonksiyon denir. Polinom fonksiyonlarının grafiklerinin çizimini daha sonraki bölümlerde öğreneceğiz.

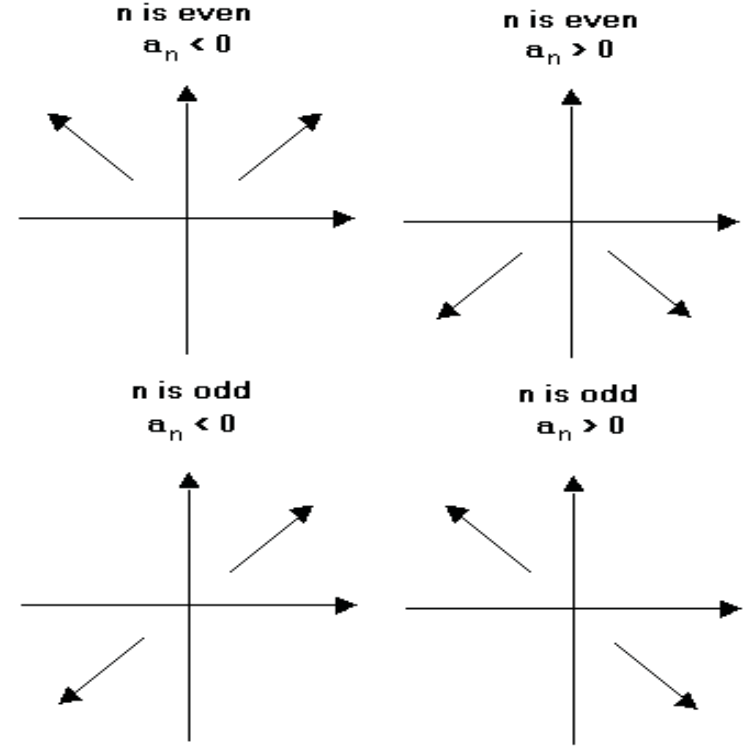
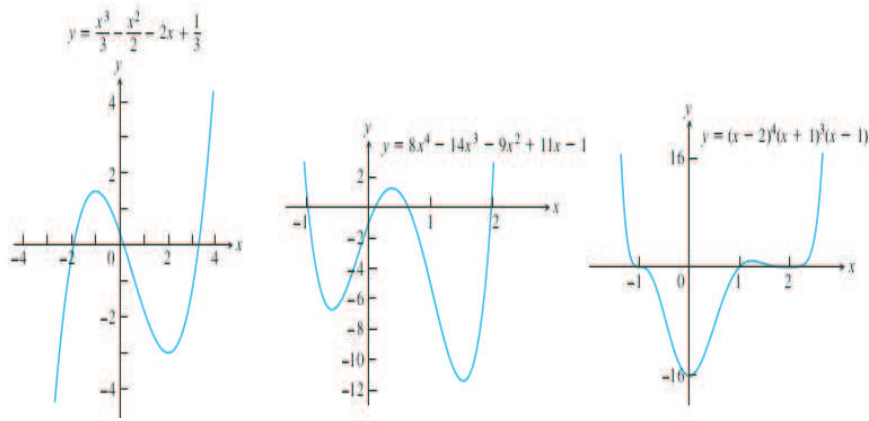


FIGURE 6.5. Polinom fonksiyonlar

Tanım 6.4. (Rasyonel Fonksiyonlar) $p(x)$ ve $q(x) \neq 0$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ formundaki fonksiyonlara rasyonel fonksiyonlar denir.

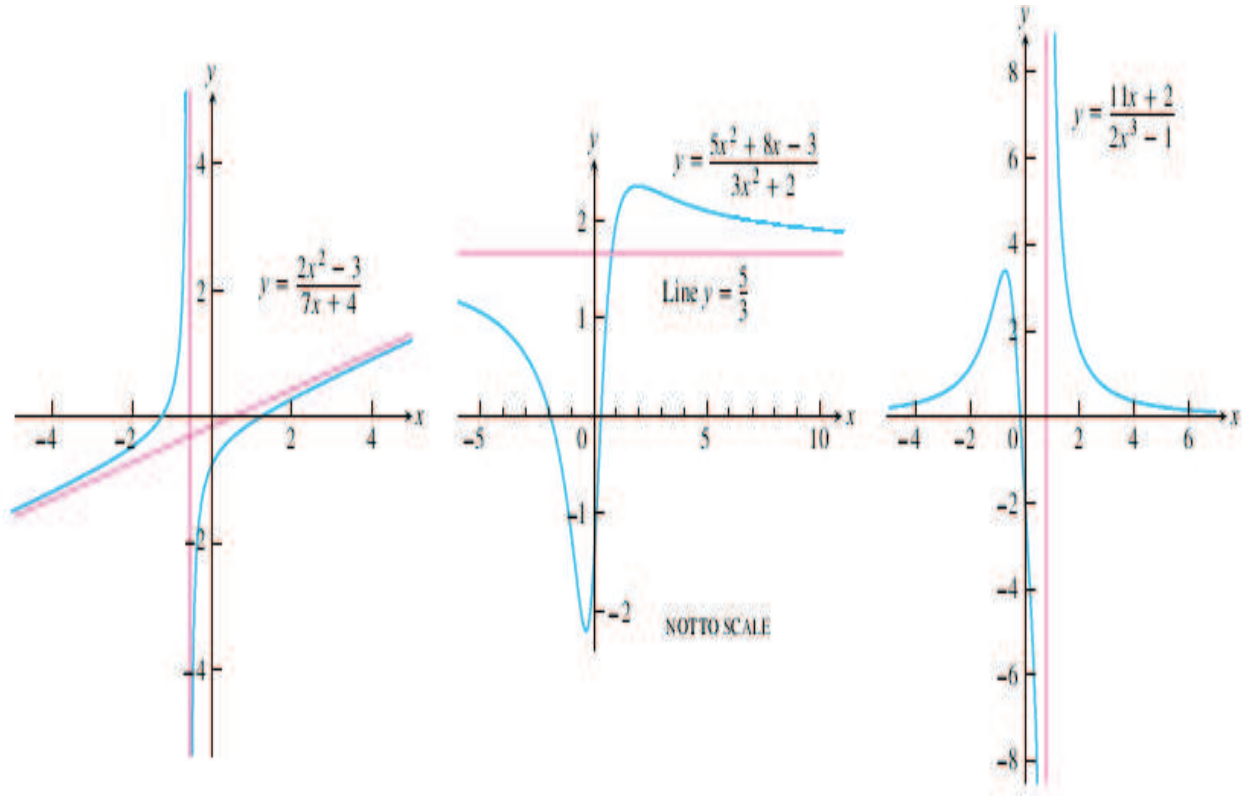


FIGURE 6.6. Rasyonel Fonksiyonlar

Tanım 6.5. (Cebirsel Fonksiyonlar) Polinomların cebirsel işlemleri ile yani toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök alma işlemleri ile oluşturulan fonksiyonlara cebirsel fonksiyonlar denir.

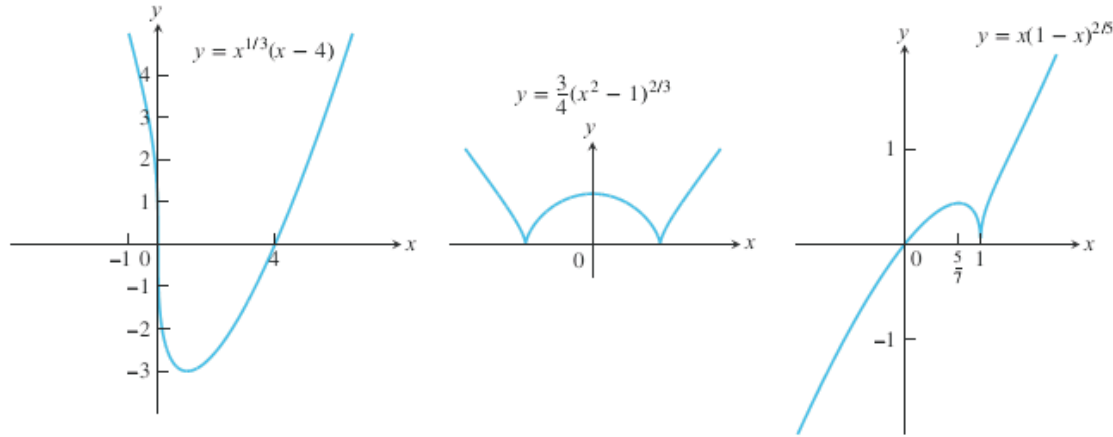
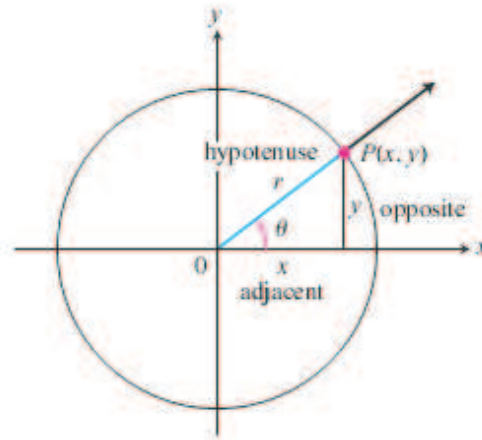


FIGURE 6.7. Cebirsel Fonksiyonlar

Tanım 6.6. (Trigonometrik-Periyodik Fonksiyonlar) $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$ fonksiyonlarına sırasıyla sinüs, cosinüs, tanjant, cotanjant, sekant ve cosecant fonksiyonları denir.



Şekle göre

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}, \cot \theta = \frac{x}{y}, \sec \theta = \frac{r}{x}, \csc \theta = \frac{r}{y}$$

olarak vedrilir. Bazı önemli açıların trigonometrik değerleri aşağıda verilmiştir.

Degrees	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radians)	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

FIGURE 6.8. Bazı önemli açların trigonometrik değerleri

Bir $f(x)$ fonksiyonu için $f(x) = f(x + p)$ eşitiliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon en küçük p değerine de periyod denir.

$\sin x$, $\cos x$ fonksiyonları 2π , $\tan x$, $\cot x$ fonksiyonları π periyotludur. $\sin^{2n-1}(ax + b)$, $\cos^{2n-1}(ax + b)$ fonksiyonları $2\pi/|a|$, $\sin^{2n}(ax + b)$, $\cos^{2n}(ax + b)$ fonksiyonları $\pi/|a|$, $\tan^n(ax + b)$, $\cot^n(ax + b)$ fonksiyonları $\pi/|a|$ periyotludur.

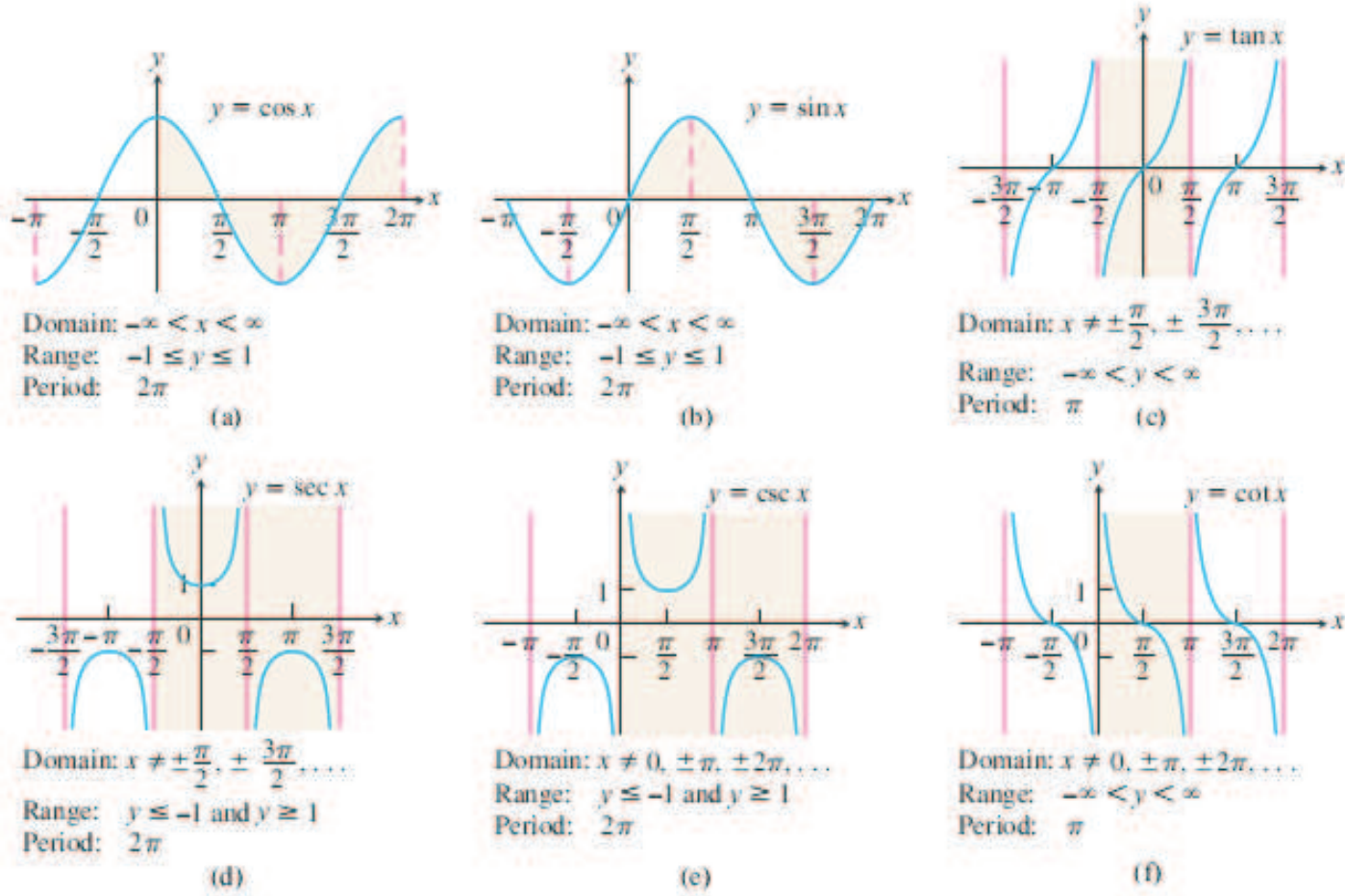


FIGURE 6.9. $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$ fonksiyonları

Örnek 6.7. $f(x) = x - [x]$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon mudur? p bir tamsayı olmak üzere

$$f(x + p) = x + p - [x + p] = x + p - ([x] + [p]) = x + p - ([x] + p) = x - [x]$$

olduğundan her bir tamsayı fonksiyonunun periyodur.

Trigonometrik fonksiyonlar ile ilgili bazı özdeşlikler:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Tanım 6.8. (Üstel ve Exponansiyel Fonksiyonlar) $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ fonksiyonuna *üstel fonksiyon* denir $a = e$ olması durumunda fonksiyona *exponansiyel fonksiyon* denir. Tüm üstel fonksiyonların tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ aralığındadır ve görüntü kümesi de $(0, \infty)$.

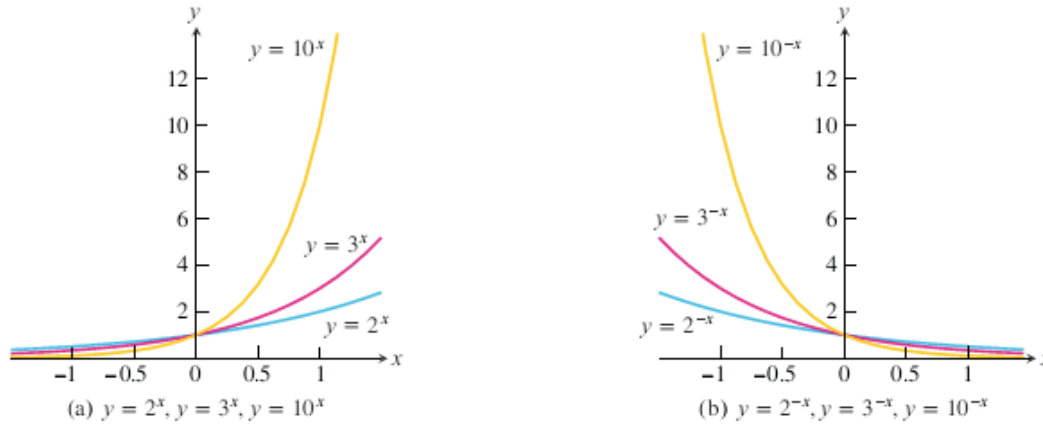


FIGURE 6.10. Üstel fonksiyon

Tanım 6.9. (Logaritmik Fonksiyonlar) $a \neq 1$ pozitif sabit olmak üzere $f(x) = \log_a x$ fonksiyonuna *logaritmik fonksiyon* denir. Logaritmik fonksiyonlar üstel fonksiyonların tersidir. Tanım bölgeleri $(0, \infty)$ ve görüntü kümeleri de $(-\infty, \infty)$ dır.

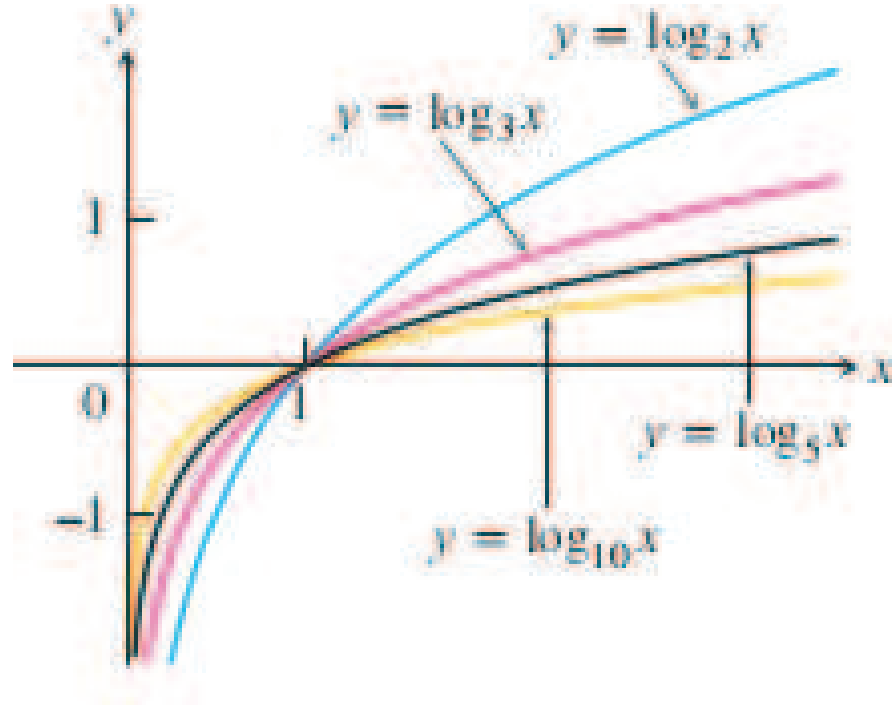


FIGURE 6.11. Logaritmik Fonksiyonlar

Tanım 6.10. (Transandant Fonksiyonlar) Cebirsel olmayan fonksiyonlardır. Trigonometrik, üstel, logaritmik, ters trigonometrik ve diğer fonksiyonları içerir.

Örnek 6.11. Aşağıdaki fonksiyonların türlerini belirleyiniz.

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^5 \rightarrow 5.\text{dereceden polinom}$$

$$f(x) = 7^x \rightarrow \text{üstel fonksiyon}$$

$$f(z) = z^7 \rightarrow \text{kuvvet fonksiyonu}$$

$$y(t) = \sin(t - 0.25\pi) \rightarrow \text{trigonometrik fonksiyon}$$

Tanım 6.12. $x < y$ olduğunda $f(x) < f(y)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna artan fonksiyon $x < y$ olduğunda $f(x) > f(y)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna azalan fonksiyon denir. Diğer bir deyişle fonksiyonun grafiği soldan sağa doğru yükseliyorsa veya artıyorsa fonksiyona artan; soldan sağa doğru düşüşe geçiyorsa ya da azalıyorsa azalan fonksiyondur.

Örnek 6.13. Aşağıdaki fonksiyonların artan azalan fonksiyon durumunu belirleyiniz.

Fonksiyon	Artan Aralık	Azalan Aralık
$y = x^2$	$0 \leq x < \infty$	$-\infty < x \leq 0$
$y = x^3$	$-\infty < x < \infty$	Hiçbir yerde
$y = \frac{1}{x}$	Hiçbir yerde	$\{-\infty < x < 0\} \cup \{0 < x < \infty\}$
$y = \frac{1}{x^2}$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$y = \sqrt{x}$	$0 < x < \infty$	Hiçbir yerde

Tanım 6.14. Eger f fonksiyonunun görüntü kümesindeki her bir sayı tanım kümesinde bir tek sayıya karşılık geliyorsa fonksiyona birebir fonksiyon denir. Geometrik olarak bir fonksiyonunun grafiğini kesen her bir yatay doğru bu grafiği en fazla bir noktada kesiyorsa bu durumda fonksiyon birebirdir.

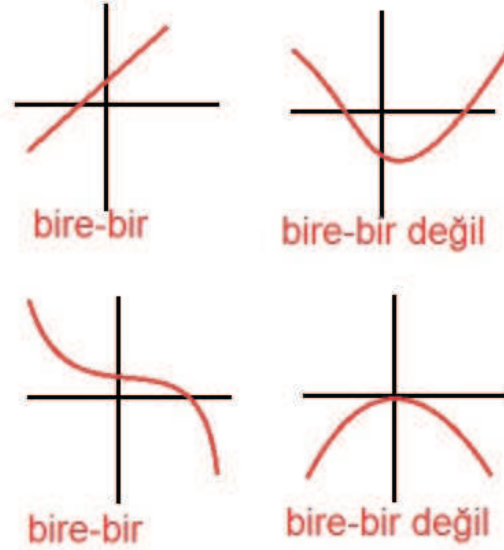


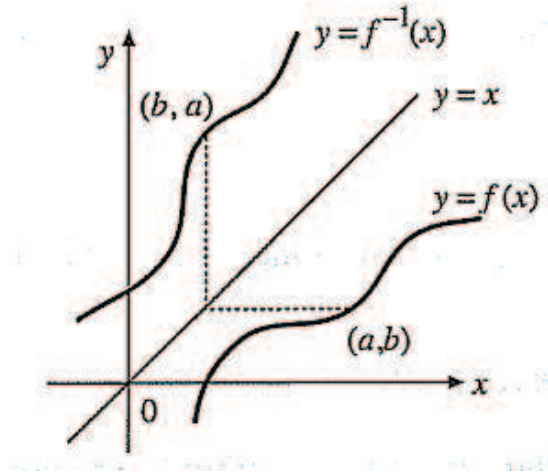
FIGURE 6.12. Birebir ve birebir olmayan fonksiyon -yatay doğru testi

Tanım 6.15. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için $f(X) = Y$ sağlanıyorsa örten fonksiyon denir.

Tanım 6.16. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir örten olsun.

$$(g \circ f)(x) = x, (f \circ g)(y) = y$$

eşitliklerin i sağlayan g fonksiyonuna f nin tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir. $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunu elde etmek için $y = f(x)$ fonksiyonunda x yerine y , y yerine x yazarak elde edilir. Fonksiyonun tersi $y = x$ eksenine göre simetriktir.

FIGURE 6.13. f fonksiyonu ve tersi f^{-1}

Örnek 6.17. $f(x) = 5x - 7$ lineer fonksiyonun tersini bulunuz.

Çözüm

$$y = 5x - 7 \rightarrow x = 5y - 7 \rightarrow y = \frac{x + 7}{5} = f^{-1}(x)$$

□

Tanım 6.18. (Ters Trigonometrik Fonksiyonlar) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[-\pi/2, \pi/2]$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arksinüs fonksiyonu denir ve arcsin veya $\sin^{-1}$ ile gösterilir. arcsin fonksiyonunun tanım kümesi $[-1, 1]$ aralığı değer kümesi de $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığıdır.

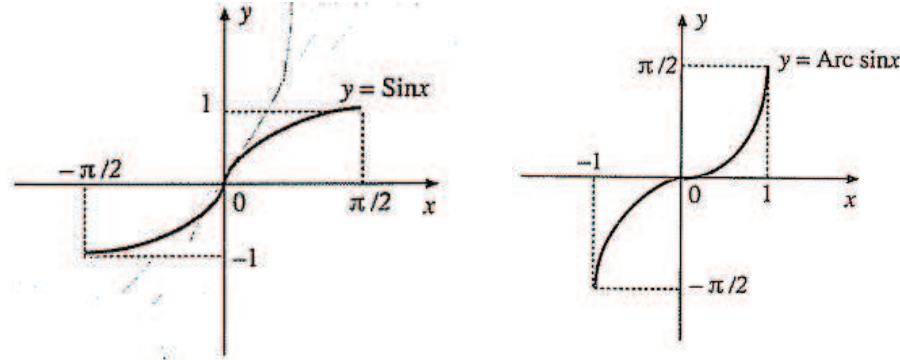


FIGURE 6.14. $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ ve $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ fonksiyonunun grafiği

Benzer şekilde $f(x) = \cos x$ fonksiyonu $[0, \pi]$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arkcosinüs fonksiyonu denir ve $\arccos$ veya $\cos^{-1}$ ile gösterilir. $\arccos$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-1, 1]$ aralığı değer kümesi de $[0, \pi]$ aralığıdır.

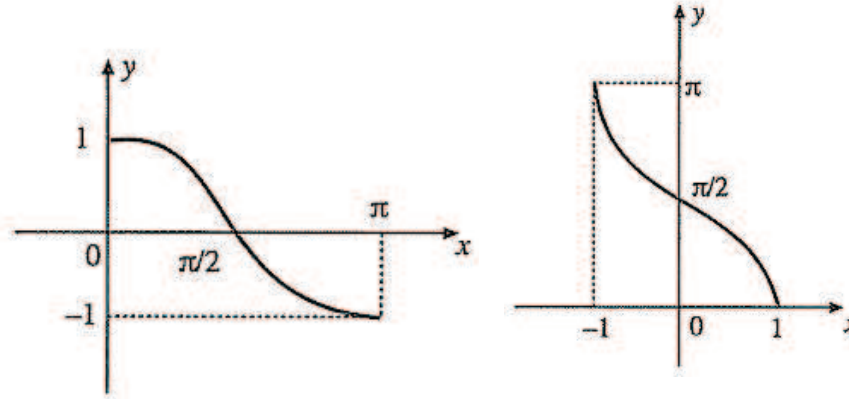


FIGURE 6.15. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ve $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ fonksiyonunun grafiği

$f(x) = \tan x$ fonksiyonu $(-\pi/2, \pi/2)$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arktanjan fonksiyonu denir ve $\arctan$ veya $\tan^{-1}$ ile gösterilir. $\arctan$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, değer kümesi de $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığıdır.

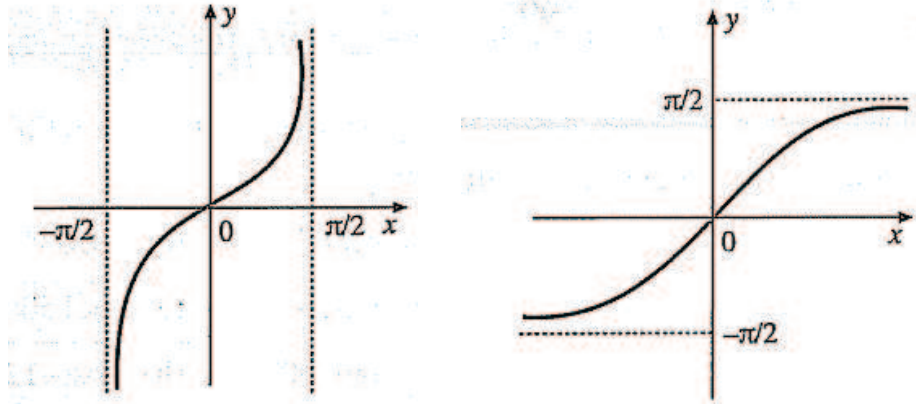


FIGURE 6.16. $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ fonksiyonunun grafiği

Benzer şekilde $f(x) = \cot x$ fonksiyonu $(0, \pi)$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arkcotanjant fonksiyonu denir ve arccot veya $\cot^{-1}$ ile gösterilir. arccot fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, değer kümesi de $(0, \pi)$ aralığıdır.

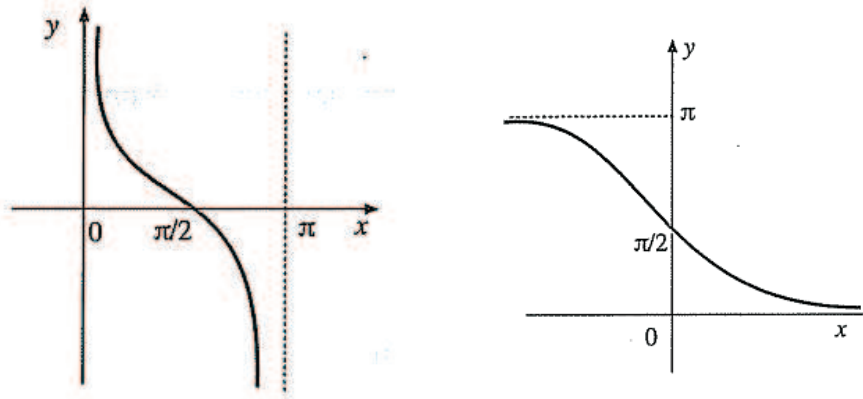


FIGURE 6.17. $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ fonksiyonunun grafiği

Tanım 6.19. (Hiperbolik Fonksiyonlar) Simetrik bir küme üzerinde her bir $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{çift fonksiyon}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{tek fonksiyon}}$$

olarak yazabiliriz. $f(x) = \exp x$ fonksiyonunun çift ve tek parçalarına sırasıyla hiperbolik kosinüs ve hiperbolik sinüs fonksiyonu denir ve

$$\cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}, \sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}$$

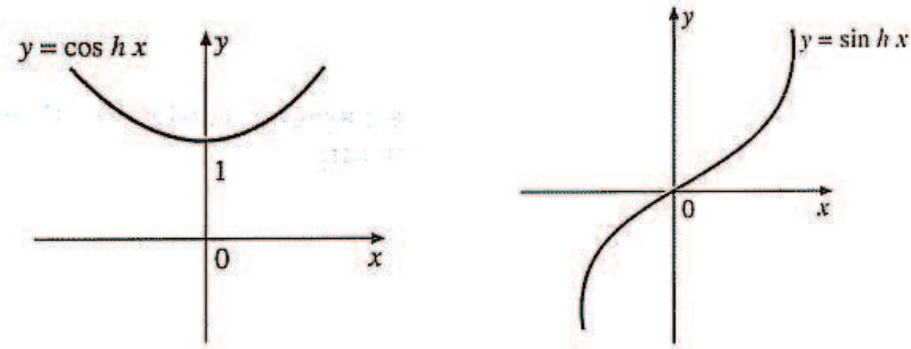


FIGURE 6.18. $y = \cosh x$ fonksiyonun grafiği - $y = \sinh x$ fonksiyonun grafiği

Trigonometrik fonksiyonlarda olduğu gibi

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)} = \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\exp x + \exp(-x)}{\exp x - \exp(-x)} = \frac{\exp(2x) + 1}{\exp(2x) - 1}$$

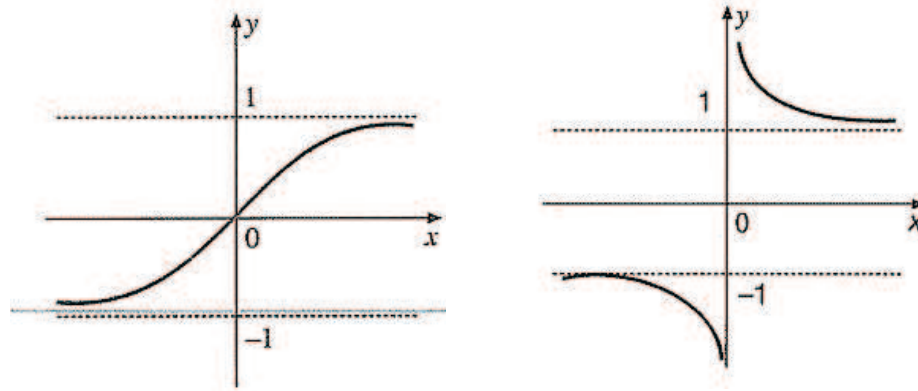


FIGURE 6.19. $y = \tanh x$ fonksiyonun grafiği - $y = \coth x$ fonksiyonun grafiği

$$\begin{aligned}\sec hx &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{\exp x + \exp(-x)} = \frac{2 \exp(x)}{\exp(2x) + 1} \\ \csc hx &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{\exp x - \exp(-x)} = \frac{2 \exp(x)}{\exp(2x) - 1}\end{aligned}$$

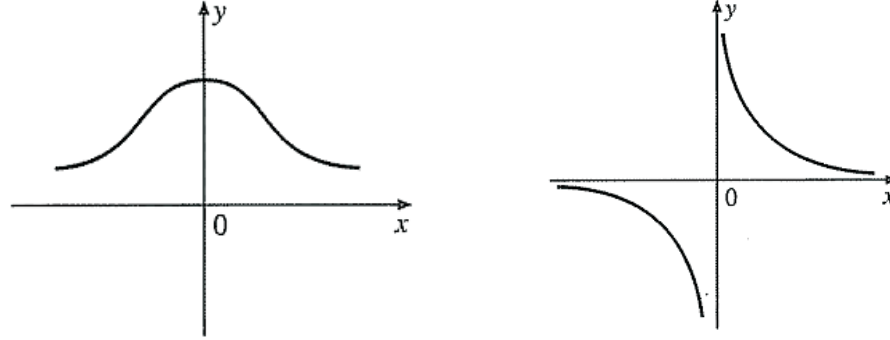


FIGURE 6.20. $y = \sec hx$ fonksiyonun grafiği - $y = \csc hx$ fonksiyonun grafiği

Hiperbolik fonksiyonlar ile ilgili bazı özdeşlikler:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ 1 - \tanh^2 x &= \sec^2 hx \\ \coth^2 x - 1 &= \csc^2 hx \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \cosh^2 x &= \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1) \\ \sinh^2 x &= \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1) \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x\end{aligned}$$

Tanım 6.20. (Ters Hiperbolik Fonksiyonlar) $f(x) = \sinh x$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ bölgesine birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arksinüs hiperbolik fonksiyonu denir ve $\operatorname{arcsinh} x$ veya $\sinh^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\operatorname{arcsinh} hx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \forall x \in R$$

ile tanımlanır. $\operatorname{arcsinh} x$ fonksiyonunun tanım ve değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.

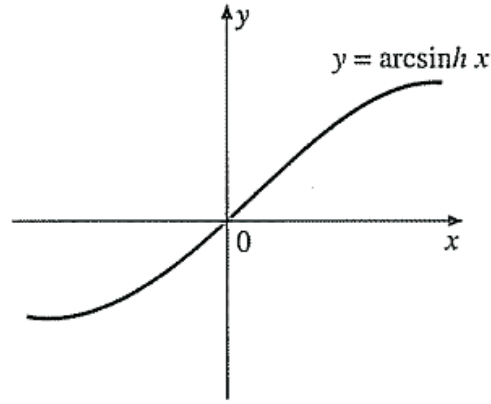


FIGURE 6.21. $\operatorname{arcsinh} x$ fonksiyonu

Benzer şekilde $f(x) = \cosh x$ fonksiyonu $[0, \infty]$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine ark-cosinüs hiperbolik fonksiyonu denir ve $\operatorname{arccosh}$ veya $\cosh^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \forall x \geq 1$$

ile tanımlanır. $\operatorname{arccosh} x$ fonksiyonunun tanım kümesi $[1, \infty)$ aralığı, değer kümesi de $[0, \infty)$ aralığıdır.

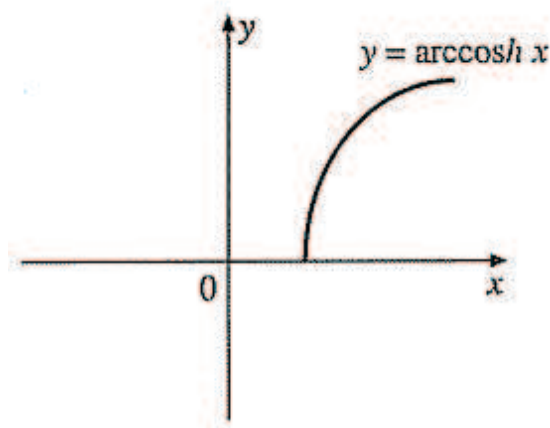


FIGURE 6.22. $\operatorname{arccosh} x$ fonksiyonunu

$f(x) = \tanh x$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ bölgesinde birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arktanjan hiperbolik fonksiyonu denir ve $\operatorname{arctanh}$ veya $\tanh^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \forall |x| < 1$$

ile tanımlanır. $\operatorname{arctanh}$ fonksiyonunun tanım kümesi $(-1, 1)$ reel sayılar kümesi, değer kümesi de $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.

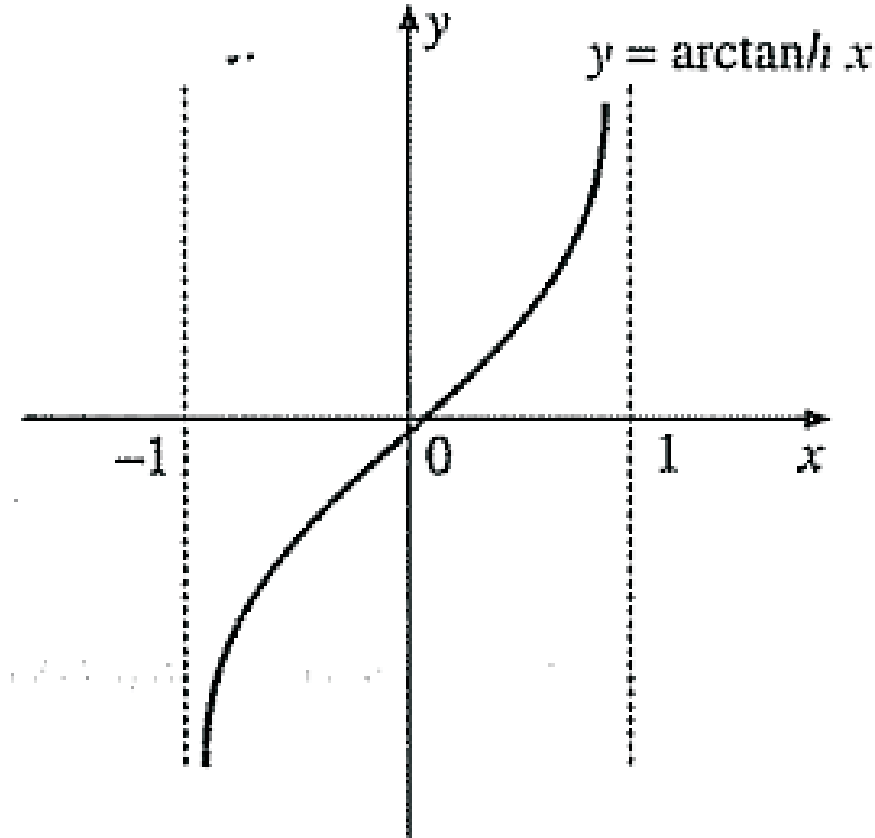


FIGURE 6.23. $\operatorname{arctanh}$ fonksiyonu

Benzer şekilde $f(x) = \coth x$ fonksiyonu $(0, \infty)$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arkcotanjant hiperbolik fonksiyonu denir ve $\operatorname{arccoth}$ veya $\coth^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right), \forall x > 1$$

. arccot fonksiyonunun tanım kümesi $(1, \infty)$ aralığı, değer kümesi de $(0, \infty)$ aralığıdır.

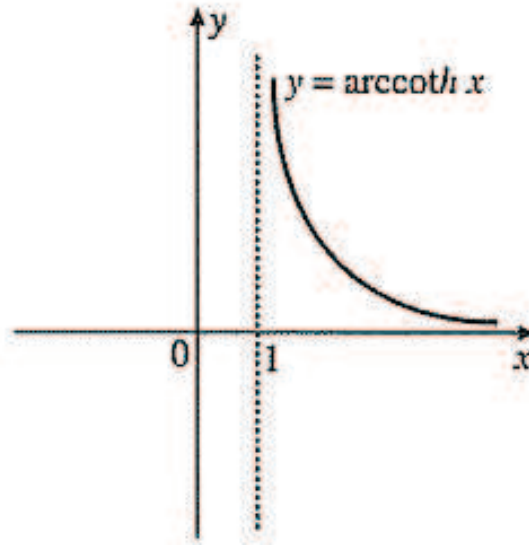
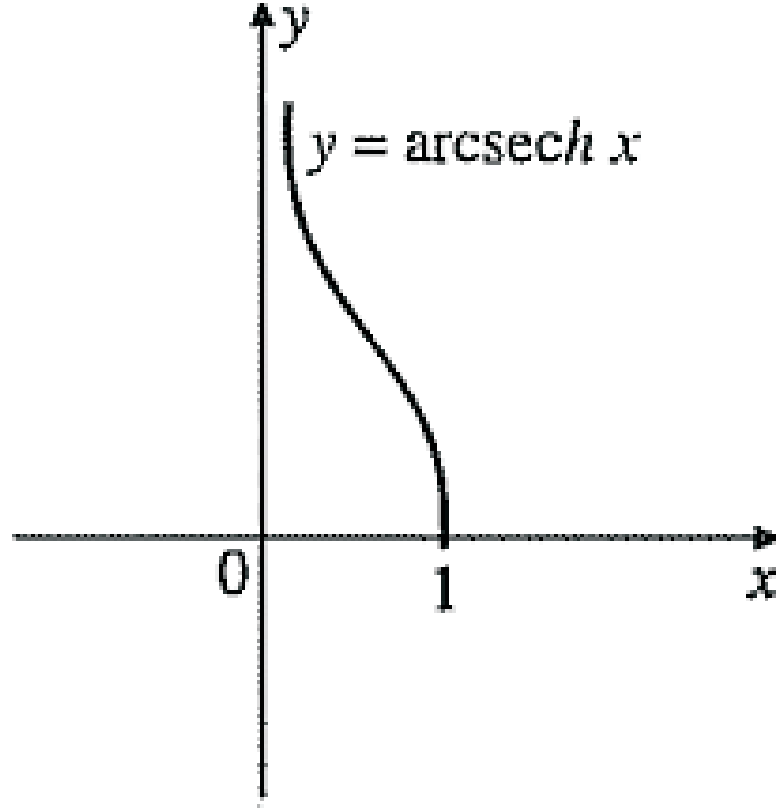


FIGURE 6.24. $\operatorname{arccoth}$ fonksiyonu

$f(x) = \operatorname{sech} x$ fonksiyonu $[0, \infty)$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arksekant hiperbolik fonksiyonu denir ve $\operatorname{arcsech}$ veya sech^{-1} ile gösterilir ve

$$\operatorname{arcsech} x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right), \forall 0 < x \leq 1$$

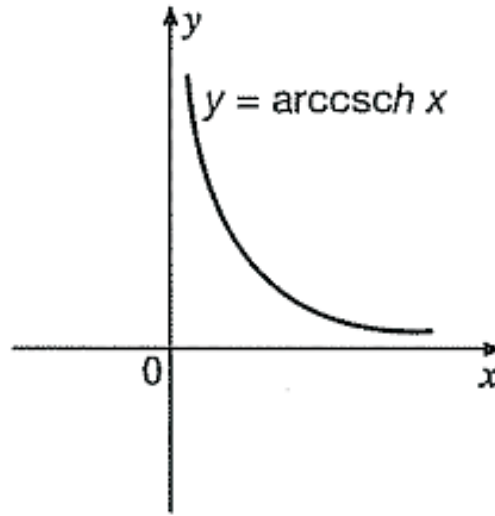
. $\operatorname{arcsech}$ fonksiyonunun tanım kümesi $(0, 1)$ aralığı, değer kümesi de $[0, \infty)$ aralığıdır.

FIGURE 6.25. $\operatorname{arcsech}$ fonksiyonu

$f(x) = \csc hx$ fonksiyonu $(0, \infty)$ bölgesine kısıtlanırsa birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun tersine arkkosekant hiperbolik fonksiyonu denir ve $\operatorname{arccsch}$ veya $\csc h^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\operatorname{arccsch} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right), \forall x \neq 0$$

$\operatorname{arccsch}$ fonksiyonunun tanım kümesi $(0, \infty)$ aralığı, değer kümesi de $(0, \infty)$ aralığıdır.

FIGURE 6.26. $\operatorname{arccsch}$ fonksiyonu

7. Fonksiyonların Bileşimi, Kaydırma ve Ölçeklendirme

Tanım 7.1. Sayılarda olduğu gibi fonksiyonlarda da toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri gerçekleştirilebilir. f ve g fonksiyonlar olmak üzere ve $x \in D(f) \cup D(g)$ için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

ve $g(x) \neq 0$ için

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

c sabit olmak üzere

$$c(f)(x) = cf(x)$$

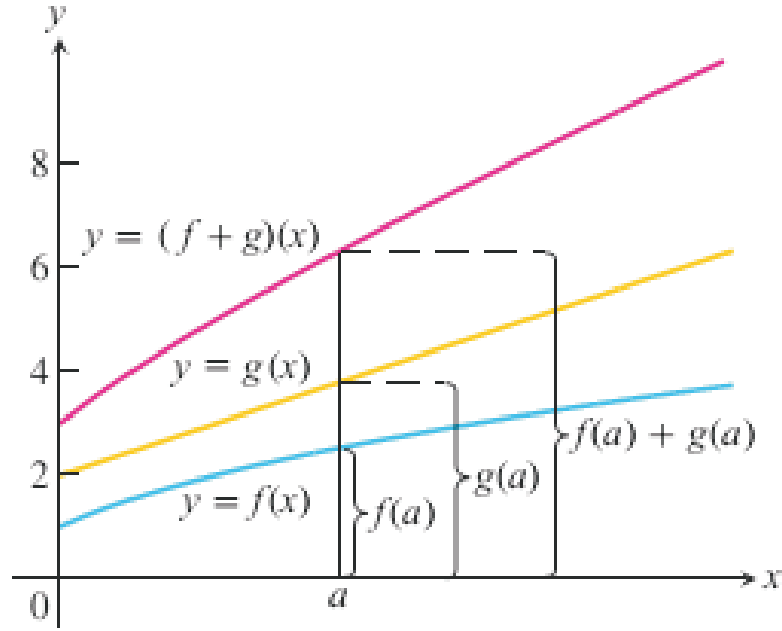
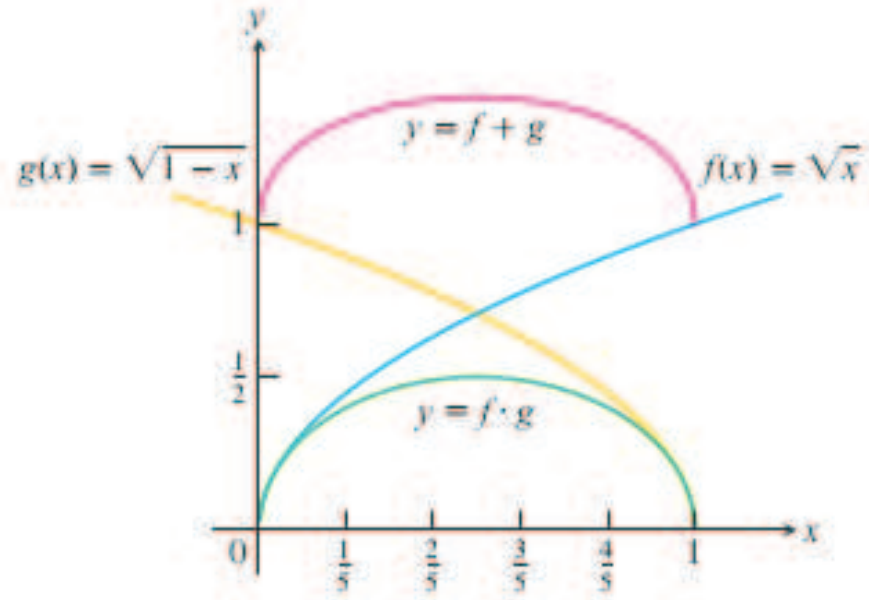


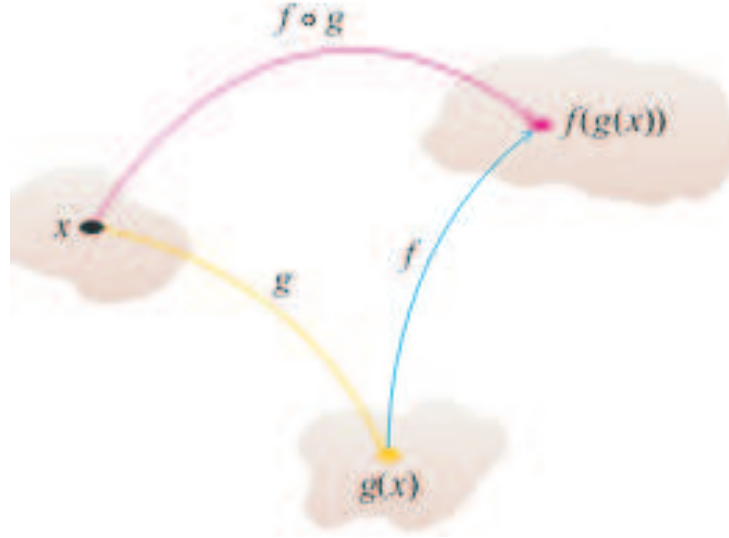
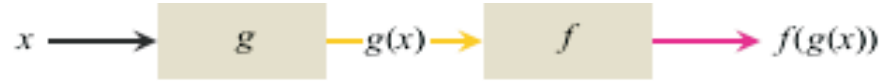
FIGURE 7.1. İki fonksiyonun toplamı

Örnek 7.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$ olmak üzere $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ fonksiyonlarını tanımlayınız. f fonksiyonunun tanım kümesi $D(f) = [0, \infty)$, g fonksiyonunun tanım kümesi $D(g) = (-\infty, 1]$. $D(f) \cup D(g) = [0, 1]$

Fonksiyon	Formül	Tanım Kümesi
$f+g$	$\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$f-g$	$\sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$\sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$	$[0, 1)$
$\frac{g}{f}$	$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$	$(0, 1]$

FIGURE 7.2. $\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ ve $\sqrt{x(1-x)}$ fonksiyonu

Tanım 7.3. f ve g fonksiyonlar olmak üzere $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının bileşkesi denir. $f \circ g$ fonksiyonun tanım kümesi x in g altındaki tanım kümesinden oluşur ki burda $g(x)$, f fonksiyonunun tanım kümesindedir.

FIGURE 7.3. $f \circ g$ fonksiyonu

Örnek 7.4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 1$ olmak üzere $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ fonksiyonlarını tanımlayınız.

Fonksiyon	Formül	Tanım Kümesi
$f \circ g$	$f(g(x)) = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$g \circ f$	$g(f(x)) = \sqrt{x+1} + 1$	$[0, \infty)$
$f \circ f$	$f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}}$	$[0, \infty)$
$g \circ g$	$g(g(x)) = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Tanım 7.5. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini yukarıya doğru kaydırmak için $f(x)$ fonksiyonunun formülüne pozitif bir sayı eklenmelidir. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini aşağıya doğru kaydırmak için $f(x)$ fonksiyonunun formülüne negatif bir sayı eklenmelidir.

$y = f(x) + k$ Eğer $k > 0$ ise f nin grafiğini k birim yukarıya kaydırır
Eğer $k < 0$ ise f nin grafiğini $|k|$ birim aşağıya kaydırır

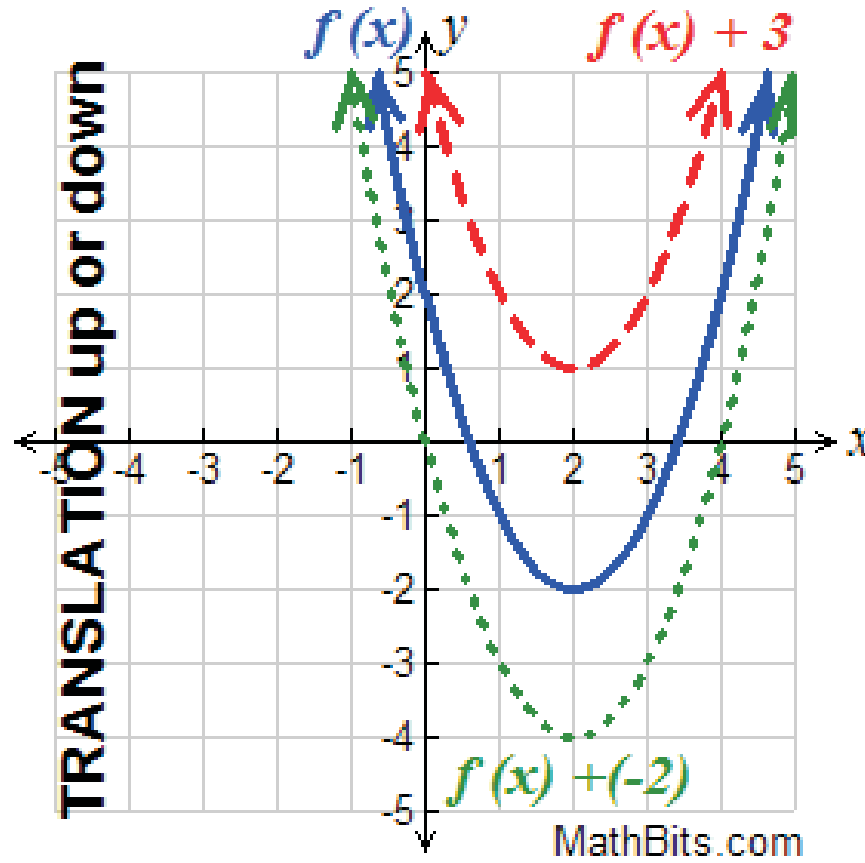


FIGURE 7.4. Fonksiyonunun grafiğinin yukarıya doğru ve aşağıya doğru kaydırılması

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini sola doğru kaydırmak için x e pozitif bir sayı eklenmelidir. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini sağa doğru kaydırmak için x e negatif bir sayı eklenmelidir.

$$y = f(x + h) \quad \begin{array}{l} \text{Eğer } h > 0 \text{ ise } f \text{ nin grafiğini } h \text{ birim sola kaydırır} \\ \text{Eğer } h < 0 \text{ ise } f \text{ nin grafiğini } |h| \text{ birim sağa kaydırır} \end{array}$$

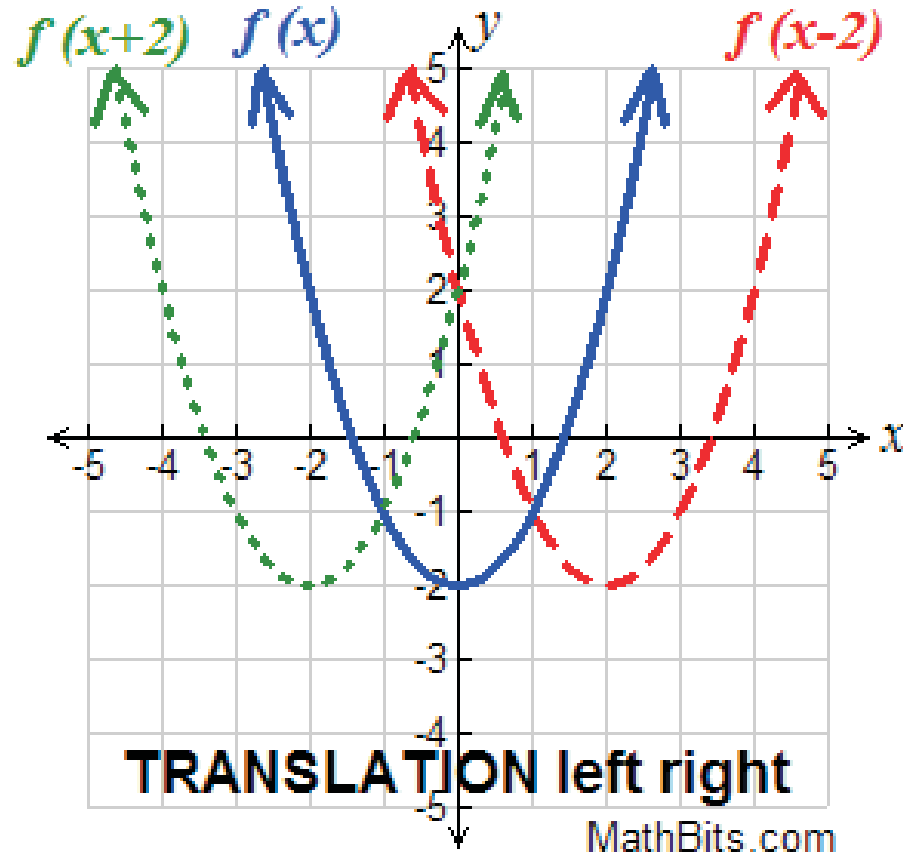


FIGURE 7.5. Fonksiyonunun grafiğinin sola doğru ve sağa doğru kaydırılması

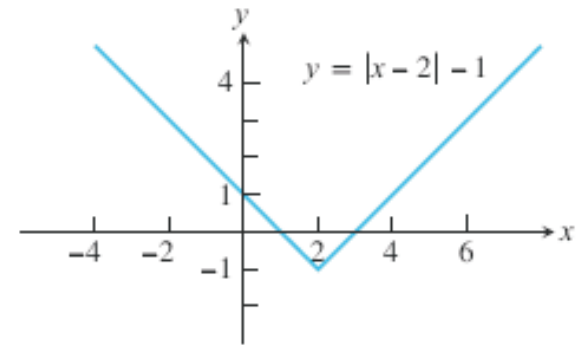
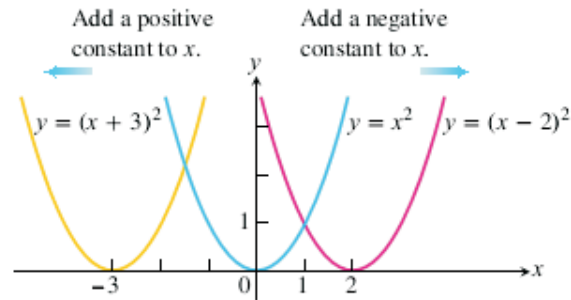
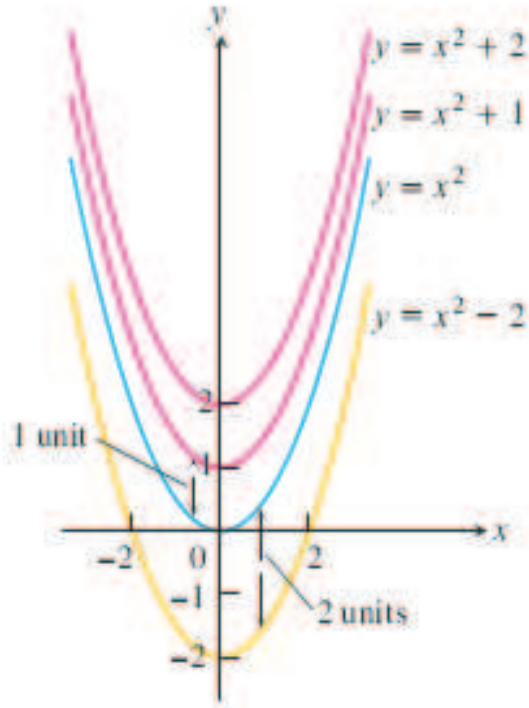
Örnek 7.6. $y = x^2$ fonksiyonuna 1 ekleyerek elde edilen $x^2 + 1$ fonksiyonunun grafiği 1 birim yukarı kaymıştır.

$y = x^2$ fonksiyonuna -2 ekleyerek elde edilen $x^2 - 2$ fonksiyonunun grafiği 2 birim aşağı kaymıştır.

x e 3 ekleyerek elde edilen $(x + 3)^2$ fonksiyonu, fonksiyonunun grafiğini 3 birim sola kaydırmıştır

x e -2 ekleyerek elde edilen $(x - 2)^2$ fonksiyonu, fonksiyonunun grafiğini 2 birim sağa kaydırmıştır.

$y = |x|$ fonksiyonuna önce x e -2 ekleyip sonra da elde edilen sonuçta -1 eklenmesi ile elde edilen $|x - 2| - 1$ fonksiyonu, grafiğin 2 birim sağa ve 1 birim aşağıya kaydırılmasıdır.



Tanım 7.7. $y = f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $-f(x)$ in grafiği fonksiyonun x eksenindeki yansımasıdır. $f(-x)$ in grafiği fonksiyonun y eksenindeki yansımasıdır.

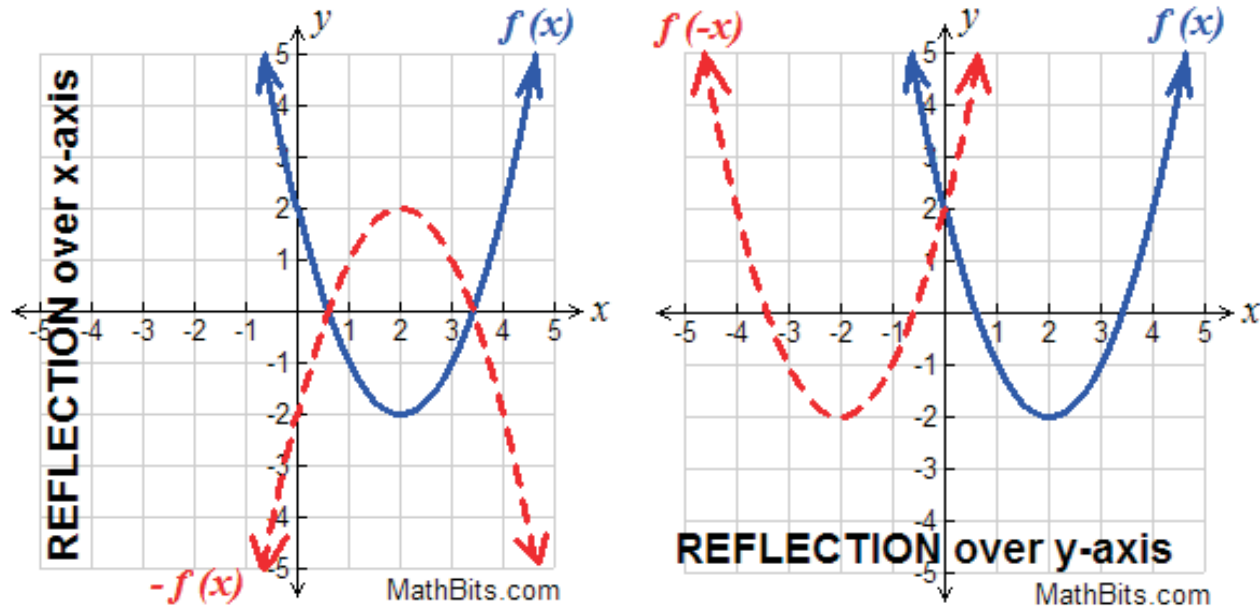
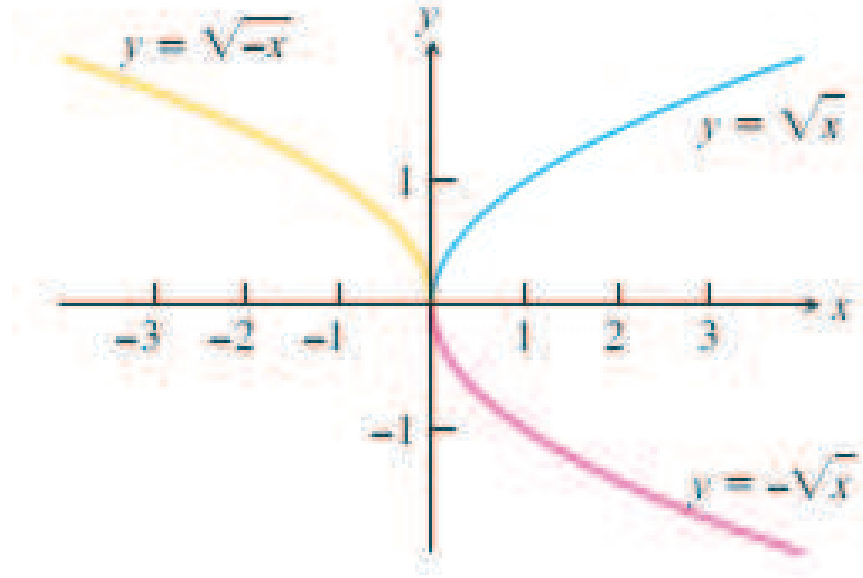


FIGURE 7.6. Fonksiyonun x eksenindeki yansıması ve y eksenindeki yansıması

Örnek 7.8. Aşağıdaki grafikte $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun x ve y eksenlerine göre yansımasıdır.



Tanım 7.9. $c > 1$ sabit sayısı için
 $y = cf(x)$ fonksiyonu f nin grafiğinin düşey olarak c çarpanı ile genişletir.
 $y = \frac{1}{c}f(x)$ fonksiyonu f nin grafiğinin düşey olarak $1/c$ çarpanı ile sıkıştırır.

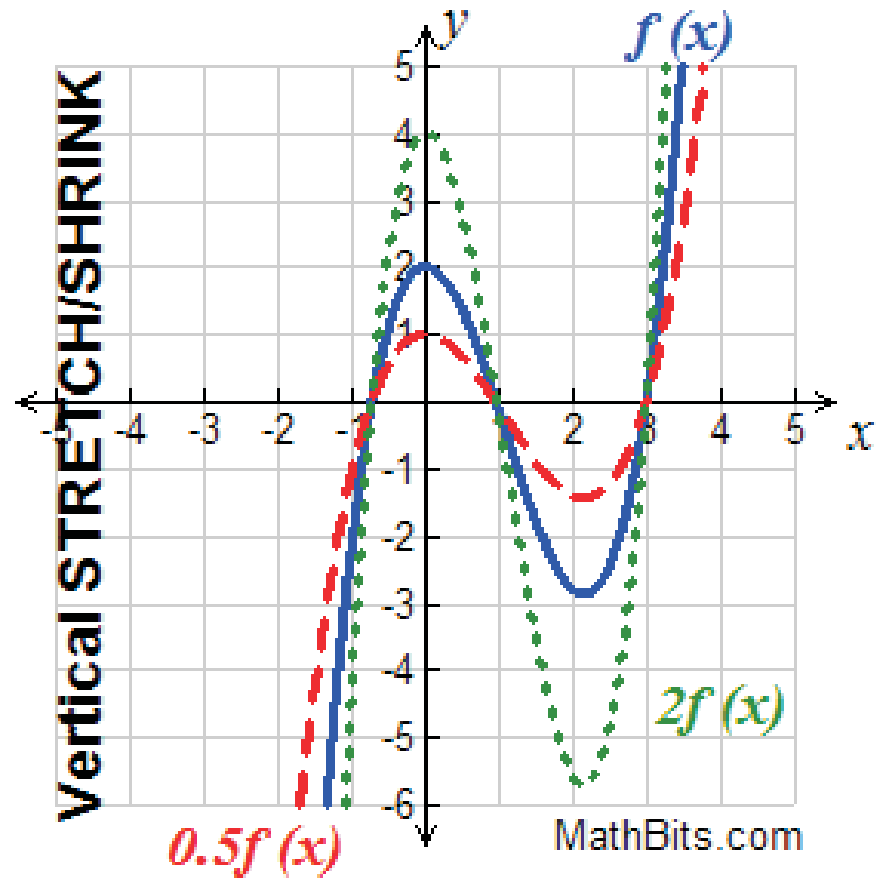


FIGURE 7.7. Fonksiyonun grafiğinin düşey olarak genişletilmesi ve sıkıştırılması

$y = f(cx)$ fonksiyonu f nin grafiğinin yatay olarak c çarpanı ile sıkıştırır.

$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ fonksiyonu f nin grafiğinin yatay olarak $1/c$ çarpanı ile genişletir.

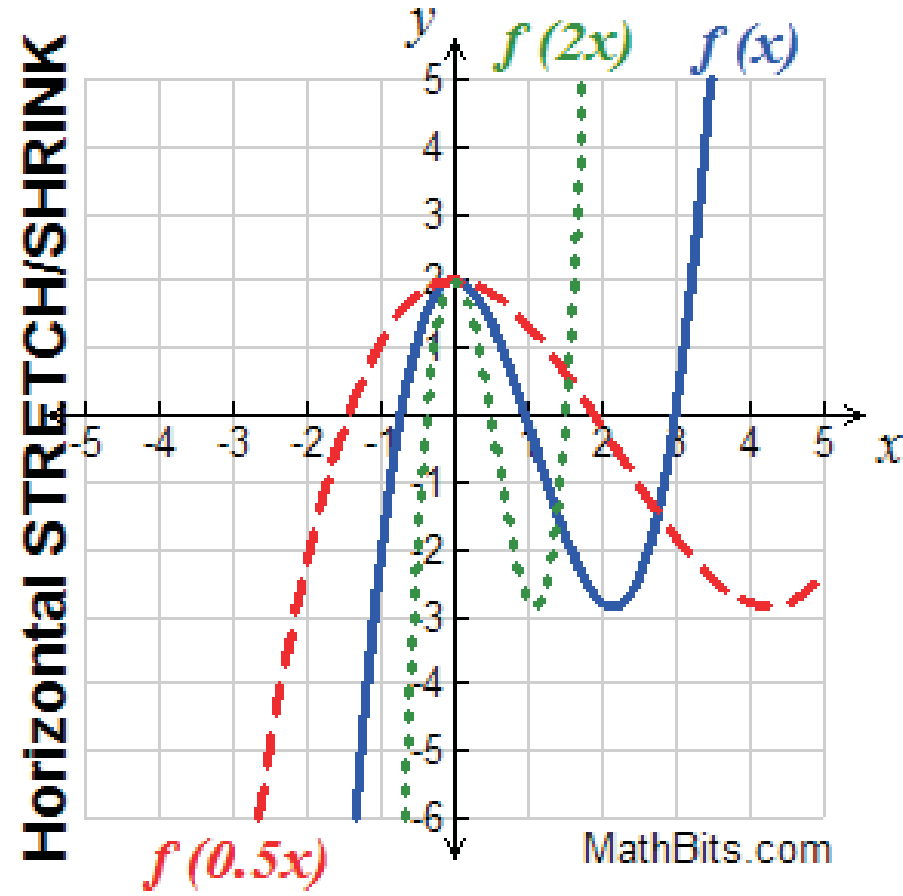
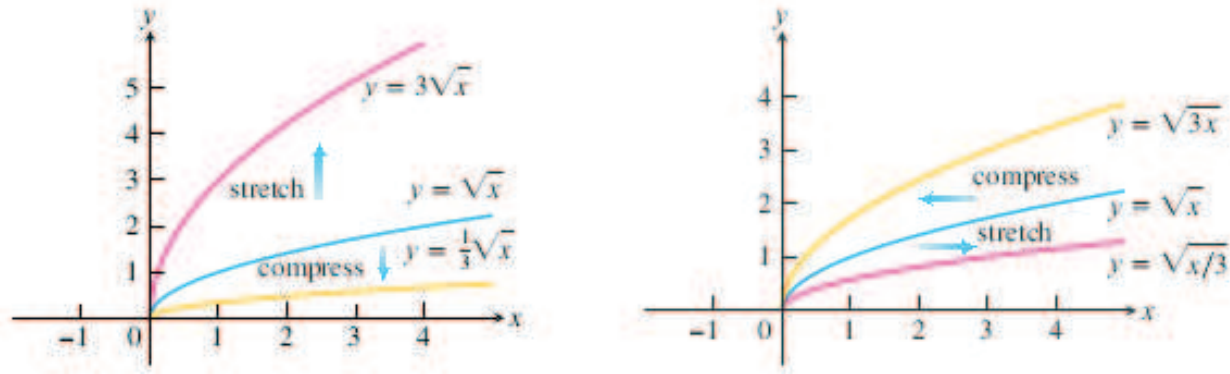


FIGURE 7.8. Fonksiyonun grafiğinin yatay olarak genişletilmesi ve sıkıştırılması

Örnek 7.10. Aşağıdaki grafikte $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun dikey ve yatay doğrultuda sıkışma ve genişlemeleri verilmiştir.



Örnek 7.11. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonu için

- 1) yatay eksende 2 kat sıkıştırılıp y -eksenindeki yansımaları elde ediniz.
- 2) düşey eksende 2 kat sıkıştırılıp x -eksenindeki yansımaları elde ediniz.

Çözüm $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiği

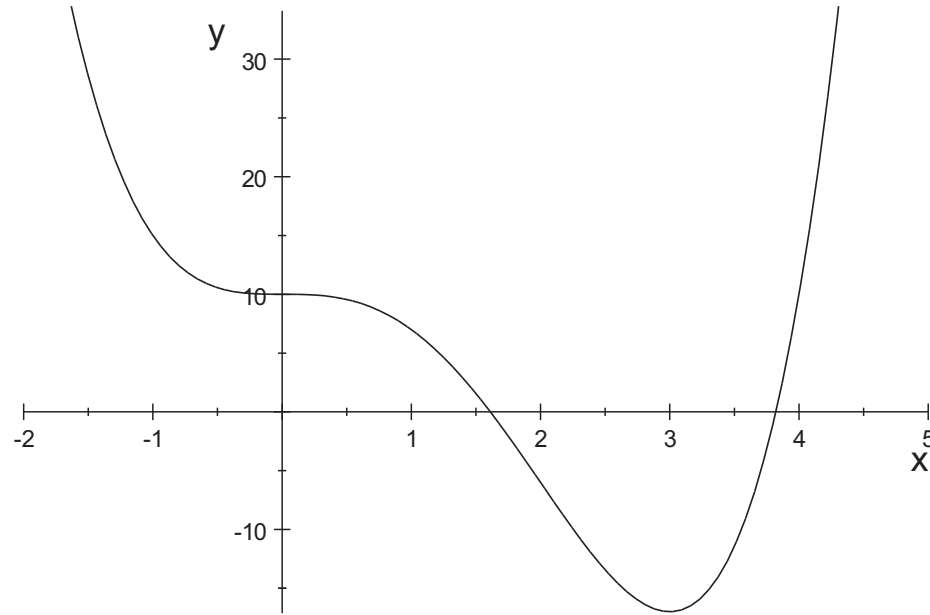


FIGURE 7.9. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiği

1) yatay ekseninde 2 kat sıkıştırmak $f(2x) = (2x)^4 - 4(2x)^3 + 10 = 16x^4 - 32x^3 + 10$

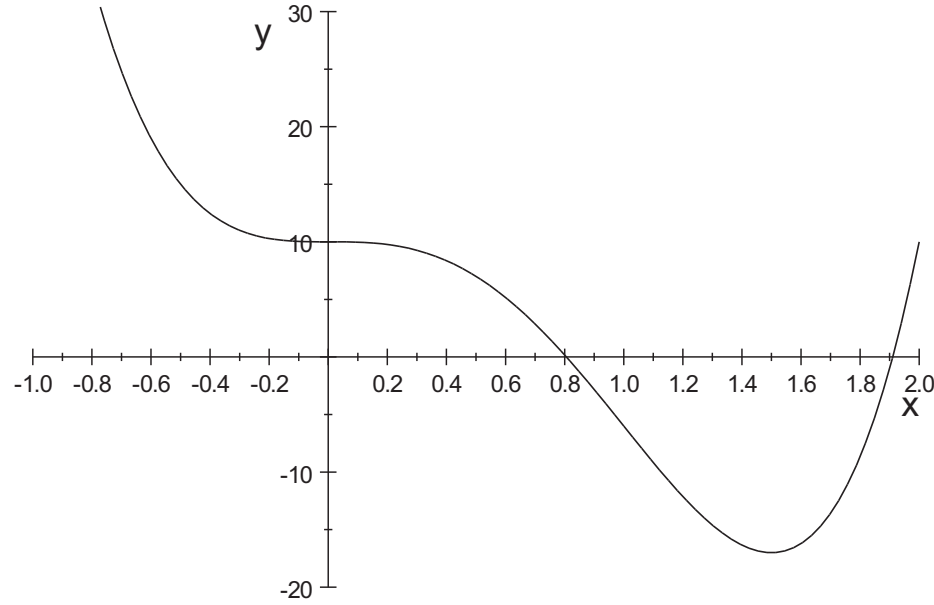


FIGURE 7.10. $f(2x) = 16x^4 - 32x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiği

ve y-eksenindeki yansıması $f(-2x) = (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10 = 16x^4 + 32x^3 + 10$

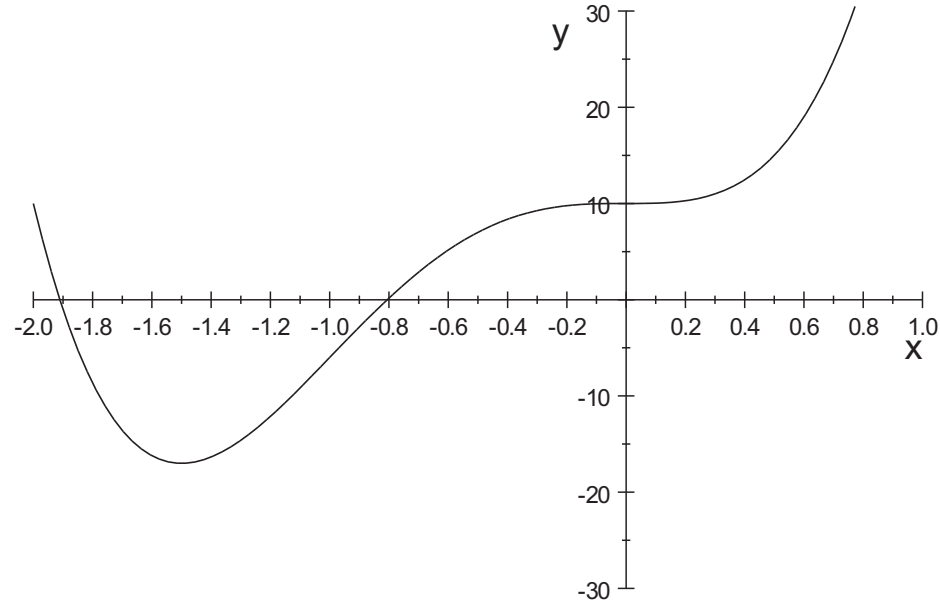


FIGURE 7.11. $f(-2x) = 16x^4 + 32x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiği

2)düşey ekseninde 2 kat sıkıştırmak $\frac{1}{2}f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{2}$

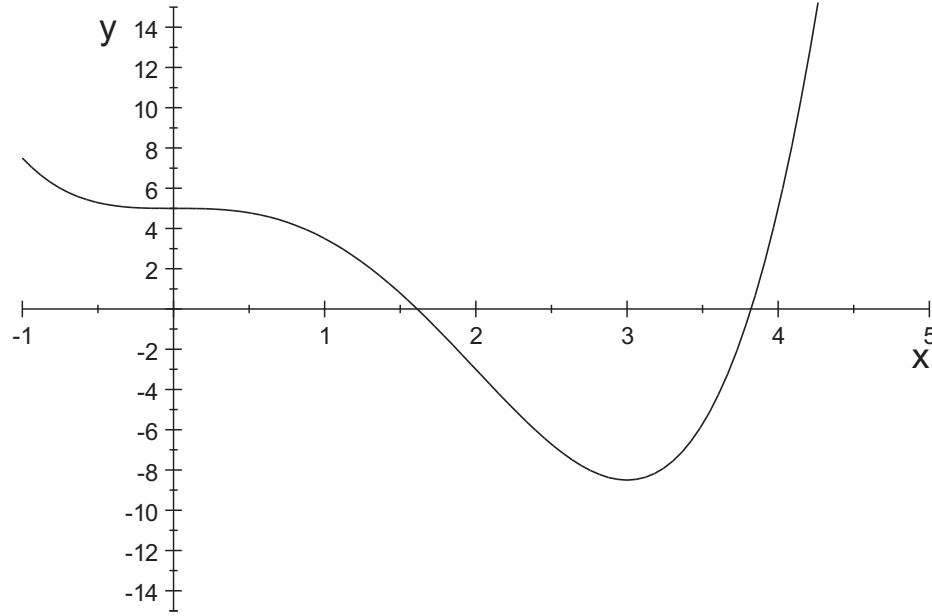


FIGURE 7.12. $\frac{1}{2}f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{2}$ fonksiyonunun grafiği

ve x-eksenindeki yansıması $-\frac{f(-2x)}{2} = -\frac{x^4 - 4x^3 + 10}{2}$

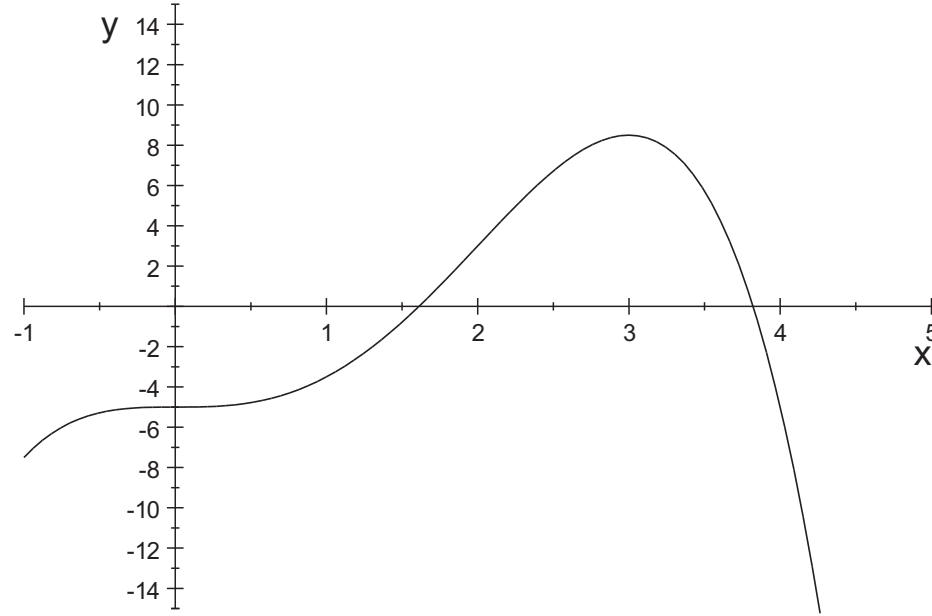


FIGURE 7.13. $\frac{f(-2x)}{2} = -\frac{x^4 - 4x^3 + 10}{2}$ fonksiyonunun grafiği

□

8. Bilgisayarda veya hesap makinesinde grafik çizimi

Komplike fonksiyonların çizimi için bilgisayar veya hesap makinesi kullanmak oldukça kullanışlıdır. Bazı fonksiyonların grafiklerinin çizimlerini de daha sonraki bölümlerde gösterilecektir. Bilgisayarda veya hesap makinesindeki grafik çizimlerinde görüntülenen ekranın ölçeklendirilmesi de oldukça önemlidir.

Örnek 8.1. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ fonksiyonunun $x \in [-10, 10], y \in [-10, 10]$ bölgesinde $x \in [-4, 4], y \in [-50, 10]$ bölgesinde ve $x \in [-4, 10], y \in [-60, 60]$ bölgesinde grafiklerini görüntüleyiniz.

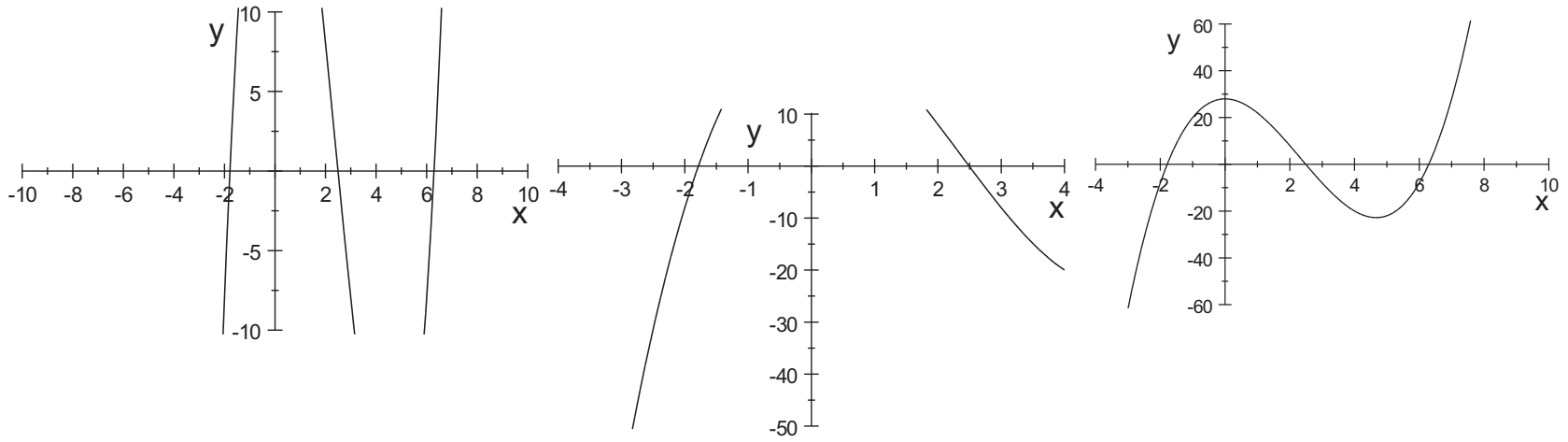


FIGURE 8.1. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ fonksiyonunun $x \in [-10, 10]$, $y \in [-10, 10]$, $x \in [-4, 4]$, $y \in [-50, 10]$, $x \in [-4, 10]$, $y \in [-60, 60]$ bölgesinde grafikleri

Örnek 8.2. $y = x$, $y = -x + 3\sqrt{2}$, ve $y = \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonlarının $x \in [-6, 6]$, $y \in [-6, 8]$ bölgesinde $x \in [-6, 6]$, $y \in [-4, 4]$ bölgesinde ve $x \in [-3, 3]$, $y \in [0, 4]$ bölgesinde grafiklerini görüntüleyiniz.

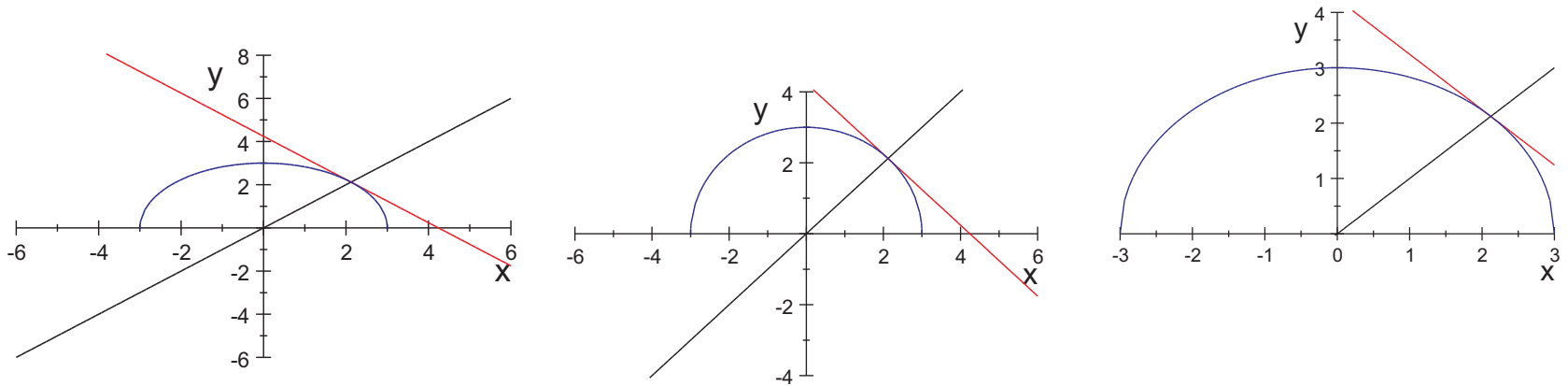


FIGURE 8.2. $y = x$, $y = -x + 3\sqrt{2}$, ve $y = \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonlarının $x \in [-6, 6]$, $y \in [-6, 8]$, $x \in [-6, 6]$, $y \in [-4, 4]$, $x \in [-3, 3]$, $y \in [0, 4]$ bölgesinde grafikleri

Örnek 8.3. $y = \frac{1}{2-x}$ fonksiyonunun $x \in [-10, 10]$, $y \in [-10, 10]$ bölgesinde ve $x \in [-6, 6]$, $y \in [-4, 4]$ bölgesinde grafiklerini görüntüleyiniz.

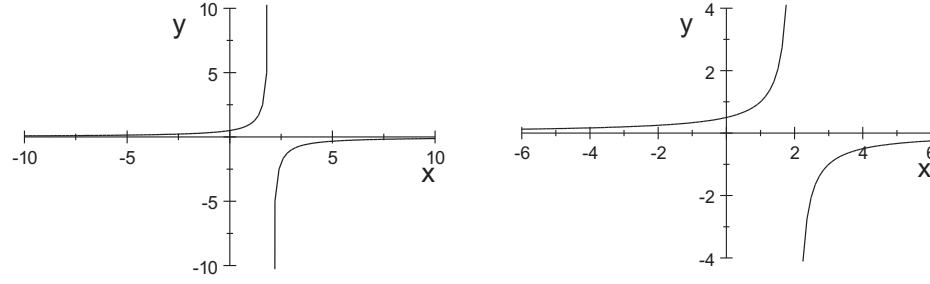


FIGURE 8.3. $y = \frac{1}{2-x}$ fonksiyonunun $x \in [-10, 10], y \in [-10, 10]$ ve $x \in [-6, 6], y \in [-4, 4]$ bölgesinde grafikleri

Örnek 8.4. $y = \sin(100x)$ fonksiyonunun $x \in [-12, 12], y \in [-1, 1]$ bölgesinde $x \in [-6, 6], y \in [-1, 1]$ bölgesinde ve $x \in [-0.1, 0.1], y \in [-1, 1]$ bölgesinde grafiklerini görüntüleyiniz.

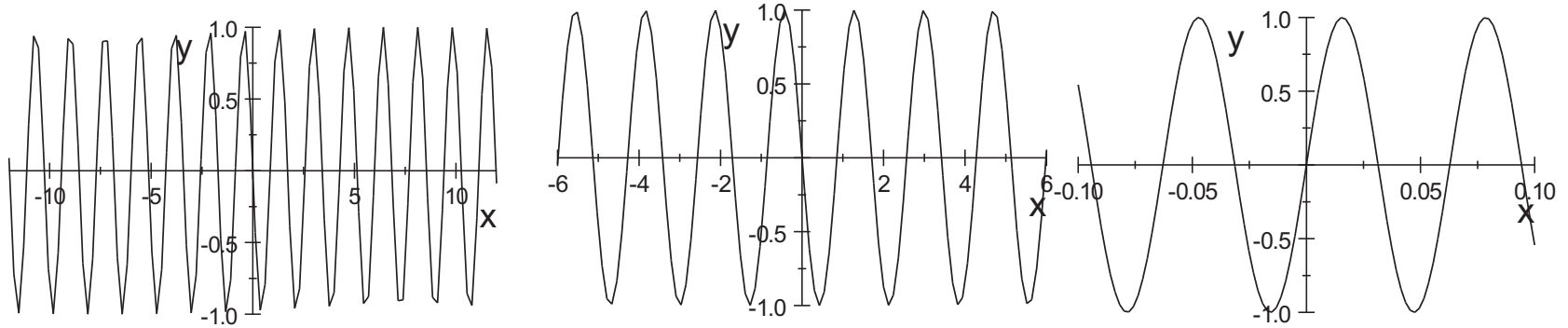


FIGURE 8.4. $y = \sin(100x)$ fonksiyonunun $x \in [-12, 12], y \in [-1, 1]$, $x \in [-6, 6], y \in [-1, 1]$, $x \in [-0.1, 0.1], y \in [-1, 1]$ bölgesinde grafikleri

Örnek 8.5. $y = \cos x + \frac{\sin(50x)}{50}$ fonksiyonunun $x \in [-6, 6], y \in [-1, 1]$ bölgesinde ve $x \in [-0.6, 0.6], y \in [0.8, 1.02]$ bölgesinde grafiklerini görüntüleyiniz.

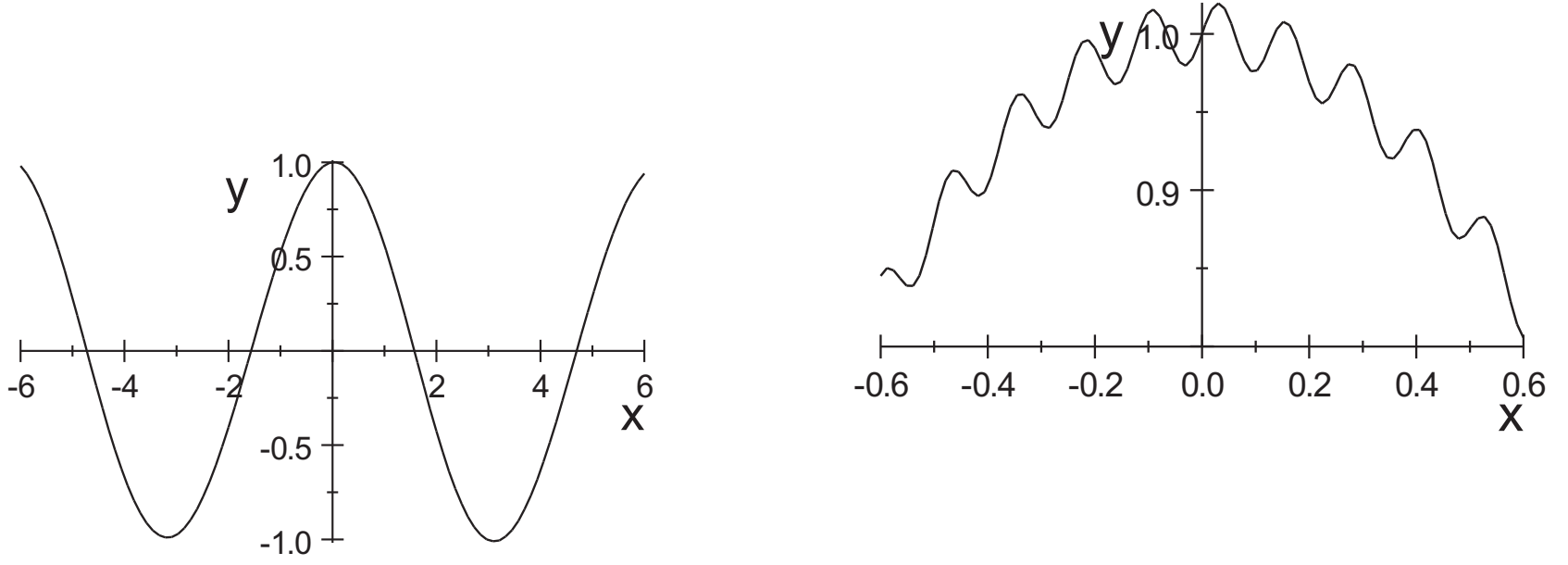


FIGURE 8.5. $y = \cos x + \frac{\sin(50x)}{50}$ fonksiyonunun $x \in [-6, 6]$, $y \in [-1, 1]$ ve $x \in [-0.6, 0.6]$, $y \in [0.8, 1.02]$ bölgesinde grafikleri

CHAPTER 2

Limit ve Süreklilik

Limit kavramı, genel matematiği cebir ve trigonometri kavramlarından ayıran önemli bir konudur. Bir eğrinin tanjantının bulunmasında veya bir nesnenin hızının bulunmasında kullanılır. Bu bölümde öncelikle sezgisel olarak ve sonrasında da kavramsal olarak limit tanımını vereceğiz. Ayrıca limiti kullanarak fonksiyonların değişim durumlarını tanımlayabiliriz. Örneğin bazı fonksiyonlar x in küçük değişimlerine karşılık küçük $f(x)$ değişimleri verirken bazı fonksiyonlar sıçrama oluşturur bazıları da düzensiz değişim gösterir. Limit kavramı, bu tür davranışların ayırt edilmesi için önemli bir yol gösterir. Limiti kullanan geometrik uygulamalar ise bir eğrinin tanjantını verir ki bu da daha sonra göreceğimiz fonksiyonun türevi konusuna kapı açar.

9. Değişim Oranı ve Limit

Bir nesnenin belirlenen bir zaman dilimindeki ortalama hızı, aldığı yolun geçen zamana oranıdır.

Örnek 9.1. *Yüksek bir dağın uçurum kıyısından bir taş düşmektedir. Buna göre*

- 1) *Bu taşın ilk 2 saniyedeki ortalama hızı nedir?*
- 2) *1. ve 2. saniyeler arasındaki ortalama hızı nedir?*
- 3) *$t = 1$ ve $t = 2$ saniyelerindeki anlık hız nedir?*

Çözüm 16. yüzyılın sonlarına doğru Galileo tarafından bulununan serbest düşme kuramına göre y yer değiştirmeyi ve t zamanı göstermek üzere yer değiştirme

$$y = 16t^2$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre verilen bir zaman dilimindeki ortalama hız, yer değiştirmedeki değişimi Δy ile gösterirsek ve zaman aralığının uzunluğunu Δt ile gösterirsek $\Delta y/\Delta t$ formülü ile buluruz. Buna göre

- 1) İlk 2 saniyedeki ortalama hız:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16 * 2^2 - 16 * 0^2}{2 - 0} = 32km/s$$

- 2) 1. ve 2. saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16 * 2^2 - 16 * 1^2}{2 - 1} = 48km/s$$

- 3) $[t_0, t_0 + h]$ aralığındaki anlık hız

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16 * (t_0 + h)^2 - 16 * t_0^2}{h}$$

formülü ile verilirken t_0 anındaki anlık hızı bulmak için $h = 0$ yazmalıyız ancak paydada h ifadesinin bulunması ve sıfıra bölüm tanımsız olduğu için bunu yapamayız. Peki anlık hızı nasıl buluruz? $t_0 = 1$ ve $t_0 = 2$ saniyelerindeki anlık hızı bulmak için bu saniyelerdeki artan kısa zaman aralıklarındaki ortalama hızı hesaplayarak bulabiliriz.

Ortalama hız: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16*(t_0+h)^2 - 16*t_0^2}{h}$		
h	$t_0 = 1$	$t_0 = 2$
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016

Görüldüğü üzere $t_0 = 1$ ve $t_0 = 2$ saniyelerindeki ortalama hız, aralık küçüldükçe $32km/s$ ve $64km/s$ değerlerine ulaşmaktadır. Bu ise $t_0 = 1$ ve $t_0 = 2$ saniyelerindeki anlık hızın $32km/s$ ve $64km/s$ olduğunu belirtir. Cebirsel olarak da

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{16 * (1 + h)^2 - 16 * 1^2}{h} = 32 + 16h \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{16 * (2 + h)^2 - 16 * 2^2}{h} = 64 + 16h\end{aligned}$$

elde ederiz. Böyle h değeri sıfıra çok yaklaştıkça $t_0 = 1$ ve $t_0 = 2$ saniyelerindeki ortalama hızda $32km/s$ ve $64km/s$ değerlerine yaklaşmaktadır. $\square$

Tanım 9.2. (Bir aralıkta, değişimin ortalama oranı) $y = f(x)$ fonksiyonu için, $[x_1, x_2]$ aralığındaki x değerlerine karşılık y değişiminin ortalama oranını

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, h \neq 0$$

formülü ile veririz.

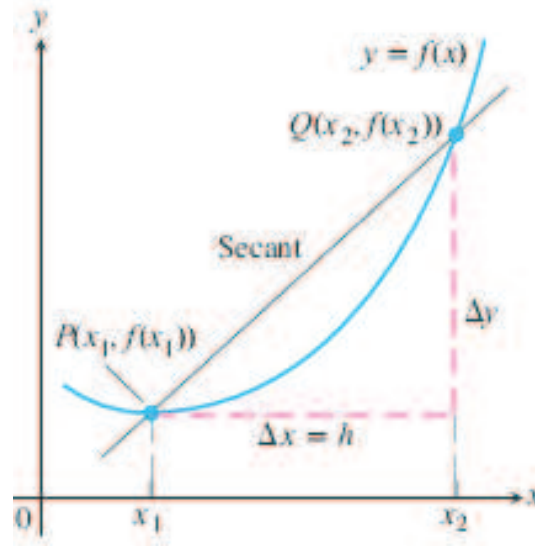


FIGURE 9.1. Değişimin ortalama oranı

Geometrik olarak $[x_1, x_2]$ aralığındaki $f(x)$ fonksiyonun değişimi $P(x_1, f(x_1))$ ile $Q(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun eğimidir. Geometride bir eğrinin iki noktasını birleştiren doğruya sekant doğrusu denir böylece $[x_1, x_2]$ aralığındaki $f(x)$ fonksiyonun değişimi PQ sekant doğrusunun eğimidir.

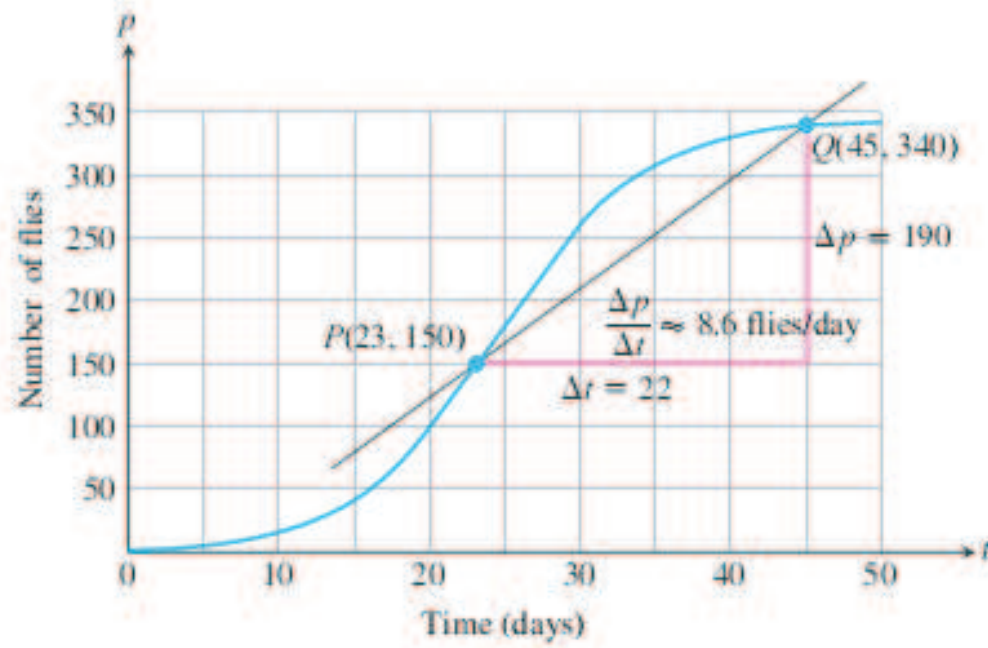


FIGURE 9.2. Meyve sineklerinin 50 günlük üreme grafiği

Örnek 9.3. Şekilde meyve sineklerinin 50 günlük üreme grafiği verilmiştir. Buna göre 23 ve 45 günler arası sineklerin ortalama üreme oranı nedir?

23. günde sinek üreme hızı nedir?

Çözüm

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} \simeq 8.6 \text{ sinek/gün}$$

Tabi bu oran bize 23. günde sinek üremesinin artışı hakkında bilgi vermez. Bunun için daha yakın bir zaman aralığı seçeceğiz.

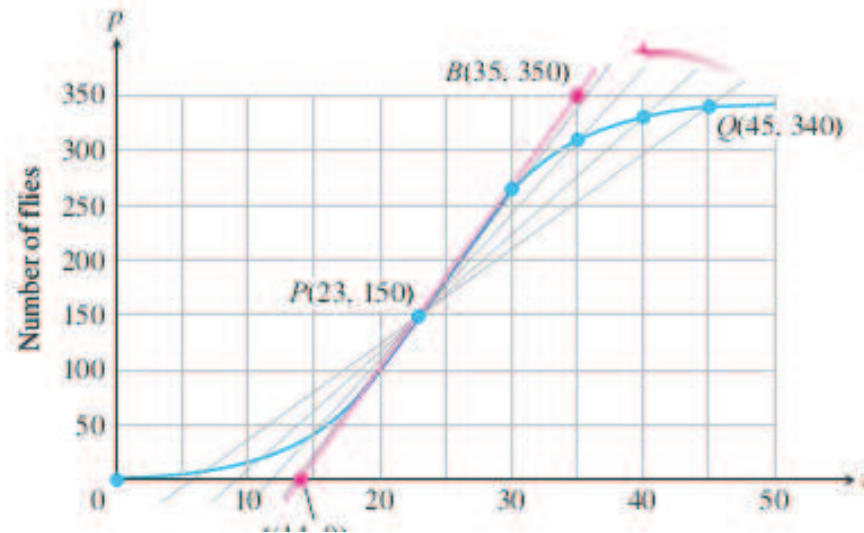


FIGURE 9.3. Meyve sineklerinin 23. günde sinek üremesinin artışı

Grafığe göre Q noktasını değiştirerek sekant doğrusunu da değiştirmiş olucaz:

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}, P(23, 150)$
$(45, 340)$	$\frac{340-150}{45-23} \simeq 8.6$
$(40, 330)$	$\frac{330-150}{40-23} \simeq 10.6$
$(35, 310)$	$\frac{310-150}{35-23} \simeq 13.3$
$(30, 265)$	$\frac{265-150}{30-23} \simeq 16.5$

Dahası P noktası üzerindeki sekant doğrusu gittikçe kırmızı doğruya yaklaşmaktadır. Bu doğru da $(14, 0)$ noktasında x eksenini kesmektedir. Böylece 23. günde sinek üreme hızı

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 0}{23 - 14} \simeq 16.7 \text{ sinek/gün}$$

□

10. Fonksiyonların limiti

Yukarıdaki örnekler bize limit hakkında fikir vermektedir. Şimdi ise fonksiyonun sezgisel tanımını verelim:

Tanım 10.1. $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasını içeren açık bir aralıkta tanımlansın. x_0 noktasına yaklaşan x değerleri için $f(x)$ fonksiyonu da L değerine yaklaşıyorsa x, x_0 değerine giderken f fonksiyonu L limitine yaklaşır denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir.

Örnek 10.2. (Bir fonksiyonun bir nokta etrafındaki yaklaşımı) $f(x) = (x^2 - 1) / (x - 1)$ fonksiyonunun $x = 1$ yakınındaki yaklaşımlarını bulunuz.

Çözüm Bu fonksiyon $x = 1$ hariç her noktada tanımlıdır ve paydada da $x = 1$ için payda sıfır olduğundan bu noktada tanımlayamayız. Bu fonksiyonu sadeleştirirsek

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1, x \neq 1$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

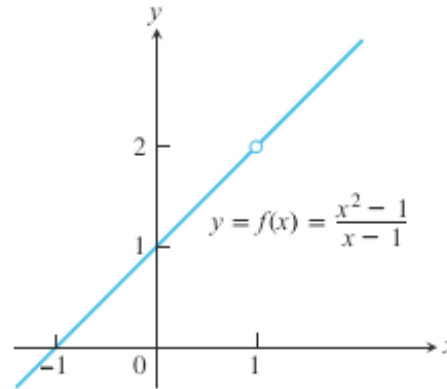


FIGURE 10.1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktası dışında grafiği

Fonksiyon $x = 1$ noktasında tanımlı olmamasına rağmen grafikten de görüldüğü üzere x değerleri 1 noktasına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu 2 değerine yaklaşır.

$x = 1$ noktası civarı	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, x \neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

Böylece $f(x)$ fonksiyonunun limiti 2'dir, x 1'e yaklaşırken,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

□

Örnek 10.3. Fonksiyonun limiti fonksiyonun o noktada aldığı değere bağlı değildir. Aşağıdaki grafiklerden ilki $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonudur ve limiti 2'dir. İkinci grafik $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$ fonksiyonudur ve $x = 1$ de 1 değerini almasına rağmen limiti 2'dir. Son grafik ise $h(x) = x + 1$ fonksiyonudur $x = 1$ de limiti de aldığı değer de 2'dir.

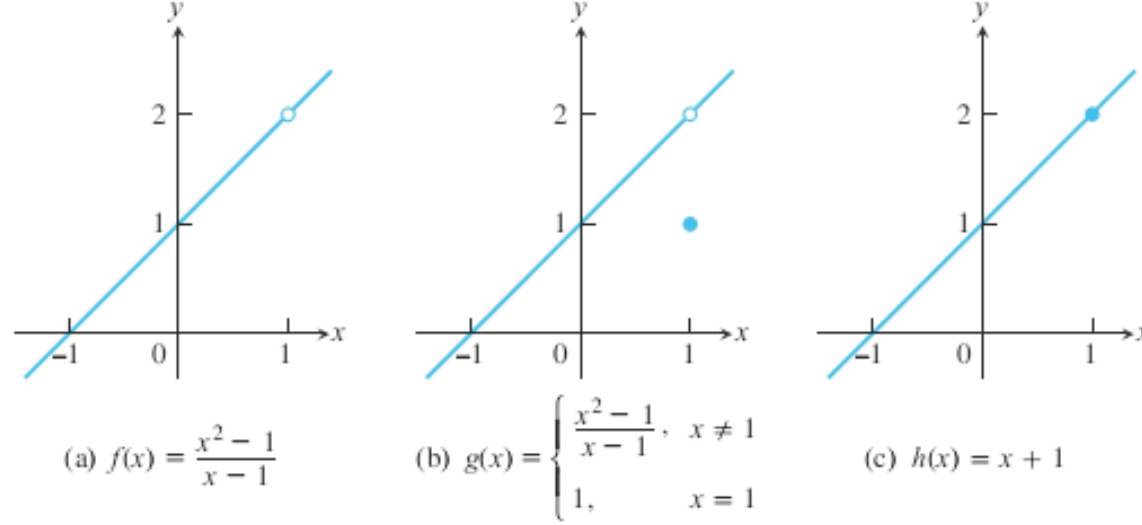


FIGURE 10.2. Fonksiyonun limiti fonksiyonun o noktada aldığı değere bağlı değildir.

Örnek 10.4. (Limiti olmayan fonksiyonlar) Aşağıdaki fonksiyonların $x = 0$ için limitlerini inceleyiniz.

1. $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – birim adım fonksiyonu (Heaviside fonksiyonu)
2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

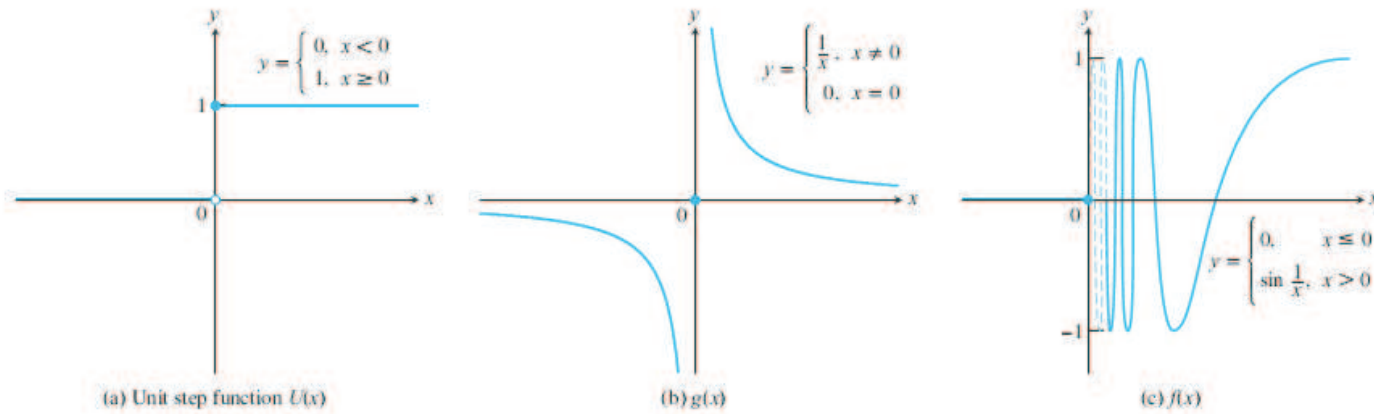


FIGURE 10.3. Limiti olmayan fonksiyonlar

- 1) Sıçrar: $x = 0$ noktasına soldan yaklaşıldığında fonksiyonun değeri 0 iken sağdan yaklaşıldığında 1 dir. Böylece $U(x)$ fonksiyonun yaklaşabileceği tek bir L limit değeri yoktur.
- 2) Limiti olamayacak şekilde çok hızlı büyür. x değerleri sıfıra çok yaklaştığında $g(x)$ fonksiyonunun değeri reel bir sayı değeri alamayacak şekilde çok büyür. Bu yüzden $g(x)$ fonksiyonun yaklaşabileceği tek bir L limit değeri yoktur.
- 3) Limiti olamayacak şekilde salınım gösterir: $x = 0$ noktasına yaklaştıkça fonksiyon -1 ve 1 değerleri arasında salınım gösterir ve fonksiyonun yaklaşabileceği tek bir L limit değeri yoktur.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere bir fonksiyonun limitini bulmak için grafik çizmek veya hesaplama yapmak her zaman kolay olmayabilir bu yüzden de aşağıda limit için formal bir tanım verdiğimiziz.

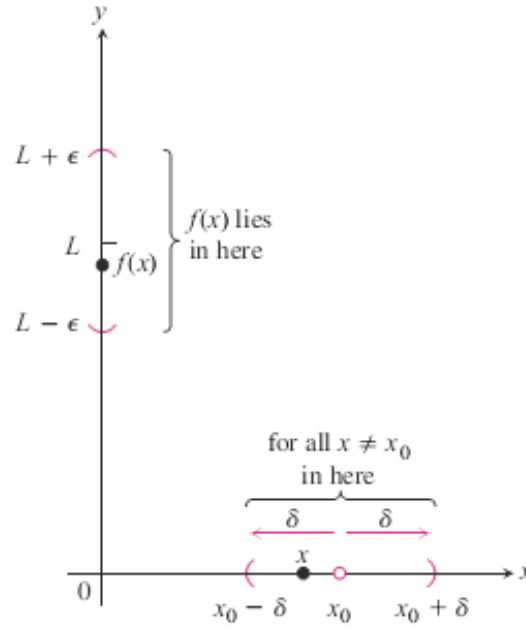
Tanım 10.5. (Limit Tanımı) Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

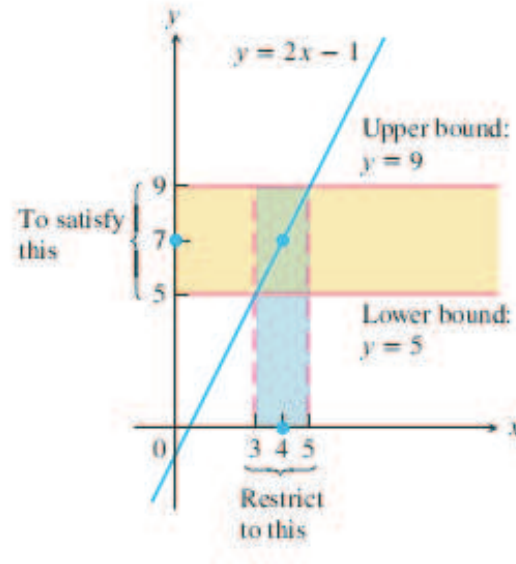
koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) \delta > 0$ sayısı mevcut ise x, x_0 a yaklaşıırken $f(x)$ fonksiyonu L limit değerine yaklaşıyordur denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir.

FIGURE 10.4. ϵ ve δ ilişkisi

Örnek 10.6. $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun $x_0 = 4$ civarında limiti 7dir. Buna göre limitin 2 birim yakınında olmasını sağlayan x aralığını bulalım

FIGURE 10.5. δ ve ε sınırları**Çözüm**

$$\begin{aligned}
 |f(x) - 7| &< 2 \Rightarrow |2x - 1 - 7| < 2 \\
 &\Rightarrow -2 < 2x - 8 < 2 \\
 &\Rightarrow 6 < 2x < 10 \\
 &\Rightarrow 3 < x < 5 \\
 &\Rightarrow -1 < x - 4 < 1
 \end{aligned}$$

Böylece $x_0 = 4$ noktasının 1 birim sağından ve solundan olan tüm x değerleri için fonksiyonun limiti 7 dir. □

Örnek 10.7. Limit tanımını kullanarak $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm Hatırlatma: $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$, $L = 2$ ve Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) \delta > 0$ sayısı bulmalıyız. δ sayısını bulmak için tersten giderek $|f(x) - 2| < \varepsilon$ eşitsizliği ile başlamalıyız.

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \Rightarrow |5x - 3 - 2| < \varepsilon \Rightarrow 5|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Amacımız $0 < |x - 1| < \delta$ koşulunu sağlayacak şekilde bir δ değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $\delta := \frac{\varepsilon}{5}$ olarak seçersek böyle bir δ değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $|x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$ ise $|5x - 3 - 2| = 5|x - 1| < \varepsilon$ elde ederiz ki bu da limit tanımımızdır. $\square$

Örnek 10.8. (Birim ve sabit fonksiyonların limitleri)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} x &= x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} k &= k\end{aligned}$$

olduğunu limit tanımı kullanarak gösteriniz.

Çözüm 1. Hatırlatma: $x_0, f(x) = x, L = x_0$ ve Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) \delta > 0$ sayısı bulmalıyız. δ sayısını bulmak için tersten giderek $|x - x_0| < \varepsilon$ eşitsizliği ile başlamalıyız. Amacımız $0 < |x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayacak şekilde bir δ değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $\delta := \varepsilon$ olarak seçersek böyle bir δ değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$ ise $|x - x_0| < \varepsilon$ elde ederiz ki bu da limit tanımımızdır.

2. Hatırlatma: $x_0, f(x) = k, L = k$ ve Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k - k| < \varepsilon$$

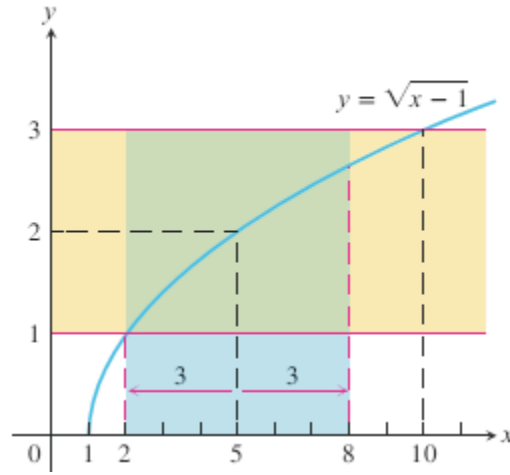
koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) \delta > 0$ sayısı bulmalıyız. $k - k = 0 < \varepsilon$ koşulu hertürlü sağlandığından herhangi bir pozitif δ değerini alabiliriz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $|x - x_0| < \delta$ ise $|k - k| < \varepsilon$ elde ederiz ki bu da limit tanımımızdır. $\square$

Örnek 10.9. (δ değerini cebirsel olarak bulmak) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1} = 2$ limitinde $\varepsilon = 1$ seçerek δ değerini bulunuz.

Çözüm 1. $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği ile başlayalım:

$$\begin{aligned}|\sqrt{x - 1} - 2| < \varepsilon = 1 &\Rightarrow 1 < \sqrt{x - 1} < 3 \Rightarrow 1 < x - 1 < 9 \Rightarrow 2 < x < 10 \\ &\Rightarrow -3 < x - 5 < 5\end{aligned}$$

2. -3 ve 5 alt ve üst sınırdan en küçük mutlak pozitif sayıyı δ olarak seç $|-3| = 3$ en küçük mutlak pozitif sayı olduğundan $\delta = 3$ olarak seçeriz.

FIGURE 10.6. δ değerinin bulunması

□

Teorem 10.10. (Polinomun limiti) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomun limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$$

Teorem 10.11. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ve $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomları için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \frac{a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0}{b_n x_0^n + b_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + b_1 x_0 + b_0}, q(x_0) \neq 0$$

Teorem 10.12. (Limit kuralları) Eğer L, M, k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

ise

1) İki fonksiyonun toplamının limiti, limitlerin toplamına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L + M$$

2) İki fonksiyonun farkının limiti, limitlerin farkına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L - M$$

3) İki fonksiyonun çarpımın limiti, limitlerin çarpımına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \cdot M$$

4) Bir fonksiyonun bir sabit ile çarpımının limiti, limitin bu sabit ile çarpımına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot L$$

5) İki fonksiyonun bölümünün limiti, limitlerin bölümüne eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

6) Bir fonksiyonun kuvvetinin limiti, limitin kuvvetine eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{r/s} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{r/s} = L^{r/s}$$

r, s tam sayılar, $s \neq 0$ ve s çift sayı ise $L > 0$ olmalıdır.

Örnek 10.13. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 4x^2 - 3) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{(4x^2 - 3)} = ?$$

Çözüm 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 4x^2 - 3) &= \lim_{x \rightarrow a} x^3 + \lim_{x \rightarrow a} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow a} (3) \text{ (Toplam - fark kuralı)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x^3 + 4 \lim_{x \rightarrow a} x^2 - \lim_{x \rightarrow a} (3) \text{ (sabit katsayı kuralı)} \\ &= a^3 + 4a^2 - 3 \text{ (polinom kuralı)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 5)} \text{ (Bolum kuralı)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^4 + \lim_{x \rightarrow a} x^2 - \lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 5} \\ &= \frac{a^4 + a^2 - 1}{a^2 + 5} \text{ (polinom kuralı)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{(4x^2 - 3)} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 - 3)} \text{ (kuvvet kuralı)} \\
&= \sqrt{4 \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 3} \text{ (Toplam - fark, sabit katsayı kuralı)} \\
&= \sqrt{4 \cdot 4 - 3} \text{ (polinom kuralı)} \\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}$$

□

Örnek 10.14. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$ ise $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} &= 1 \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 4} f(x) - \lim_{x \rightarrow 4} 5}{\lim_{x \rightarrow 4} x - \lim_{x \rightarrow 4} 2} = 1 \\
&\Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 4} f(x) - 5}{4 - 2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) - 5 = 2 \\
&\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7
\end{aligned}$$

□

Örnek 10.15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ limitini bulunuz.

Çözüm pay ve paydada polinom olmasına rağmen $x = 1$ yazamayız çünkü paydayı sıfır yapmaktadır. Böyle durumlarda sadeleştirme işlemini gerçekleştirmeliyiz.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{x} = 3$$

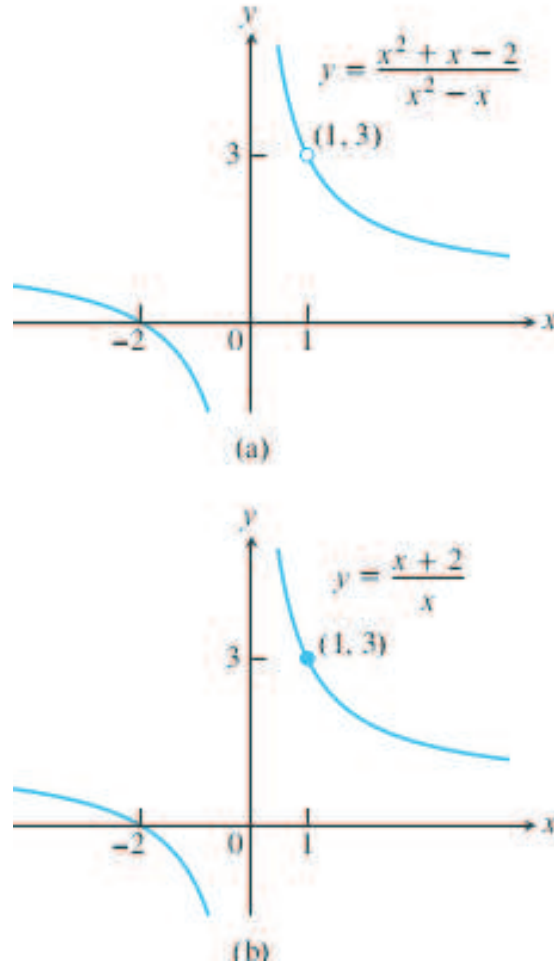


FIGURE 10.7. Sadeleştirme Yöntemi

Örnek 10.16. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ limitini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{4}$$

Örnek 10.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ limitini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2+100}+10} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

□

Teorem 10.18. (Sandviç teoremi) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

ise $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

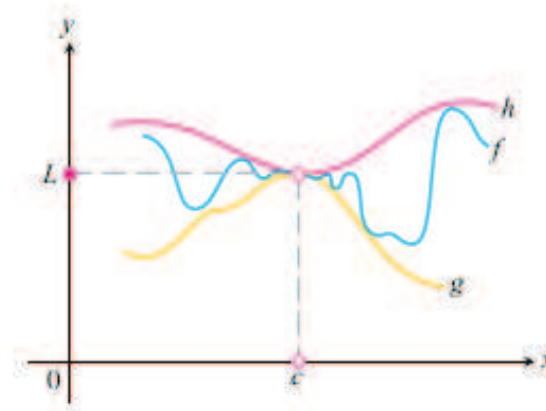


FIGURE 10.8. Sandviç teoremi

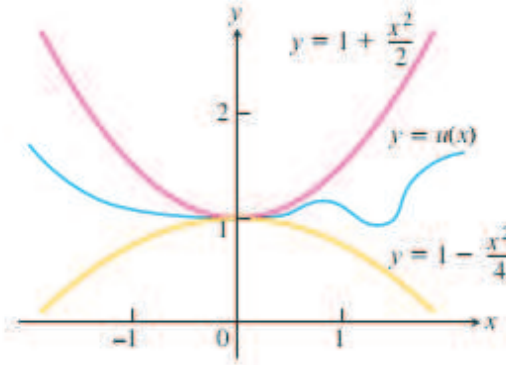


FIGURE 10.9. Sandviç Teoreminin uygulaması

Örnek 10.19. Şekile göre $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{x^2}{4} &\leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow \\
 \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{4} &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow \\
 \lim_{x \rightarrow 0} u(x) &= 1
 \end{aligned}$$

□

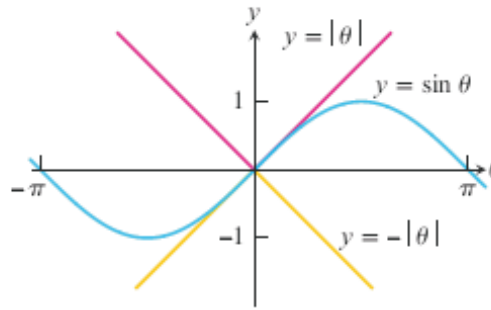
Örnek 10.20. (Sandviç Teoreminin uygulamaları)

- 1) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin(\theta)$ limitini hesaplayınız.
- 2) $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \cos(\theta))$ limitini hesaplayınız.
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ olduğunu Sandviç Teoremini kullanarak gösteriniz.

Çözüm 1)

$$-|\theta| \leq \sin(\theta) \leq |\theta|$$

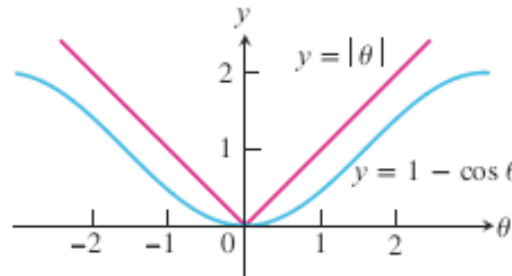
eşitsizliğinden ve $\lim_{\theta \rightarrow 0} (-|\theta|) = \lim_{\theta \rightarrow 0} (|\theta|) = 0$ olduğundan Sandviç Teoreminden $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin(\theta) = 0$ elde ederiz.

FIGURE 10.10. $-|\theta| \leq \sin(\theta) \leq |\theta|$ eşitsizliği

2)

$$0 \leq 1 - \cos(\theta) \leq |\theta|$$

eşitsizliğinden ve $\lim_{\theta \rightarrow 0} (|\theta|) = 0$ olduğundan Sandviç Teoreminden $\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \cos(\theta)) = 0$ elde ederiz.

FIGURE 10.11. $0 \leq 1 - \cos(\theta) \leq |\theta|$ eşitsizliği

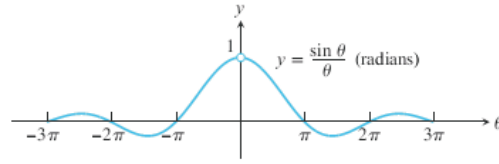
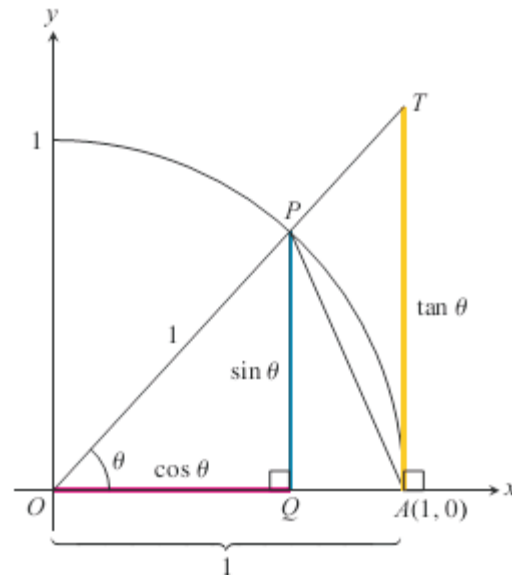
3)

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

eşitsizliğinden ve $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ olduğundan Sandviç Teoremini kullanarak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ olduğunu sonucuna varırız. $\square$

Teorem 10.21. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \theta - \text{radyan}$

2. LIMIT VE SÜREKLİLİK

FIGURE 10.12. $\frac{\sin \theta}{\theta}$ grafiği

PROOF. Şekile göre

$$\begin{aligned}
 \text{Alan} \left(O\overset{\triangle}{A}P \right) &< \text{Alan} \left(O\widehat{A}P \right) < \text{Alan} \left(O\overset{\triangle}{A}T \right) \\
 \text{Alan} \left(O\overset{\triangle}{A}P \right) &= \frac{1}{2} (1) \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2} \\
 \text{Alan} \left(O\widehat{A}P \right) &= \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{\theta}{2} \\
 \text{Alan} \left(O\overset{\triangle}{A}T \right) &= \frac{1}{2} (1) \tan \theta = \frac{\tan \theta}{2} \Rightarrow \\
 \frac{\sin \theta}{2} &< \frac{\theta}{2} < \frac{\tan \theta}{2} \Rightarrow \sin \theta > 0 \text{ olduğundan} \\
 1 &< \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{\tan \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \\
 1 &> \frac{\sin \theta}{\theta} > \cos \theta \Rightarrow \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 &> \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} > \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1 \Rightarrow \text{Sandviç Teo.} \\
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} &= 1
 \end{aligned}$$

□

Örnek 10.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm

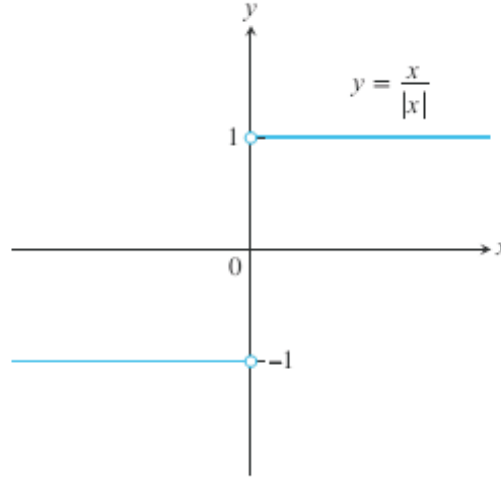
$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} = -1.0 = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x \frac{2}{2}} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

□

11. Sağ-Sol Limit ve Sonsuzlukta Limit

FIGURE 11.1. $y = \frac{x}{|x|}$ fonksiyonunun grafiği

$y = \frac{x}{|x|}$ fonksiyonunu düşündüğümüzde $x = 0$ noktasının sağ tarafında limit 1 olurken sol tarafında limit -1 dir ve gerçekte bu fonksiyonun limiti yoktur. Bir fonksiyonun limiti olmasa da sağ ve sol limit tanımlanabilir.

Tanım 11.1. Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) \delta > 0$ sayısı mevcut ise x, x_0 a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun sağ tarafı L limiti vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

ile gösterilir.

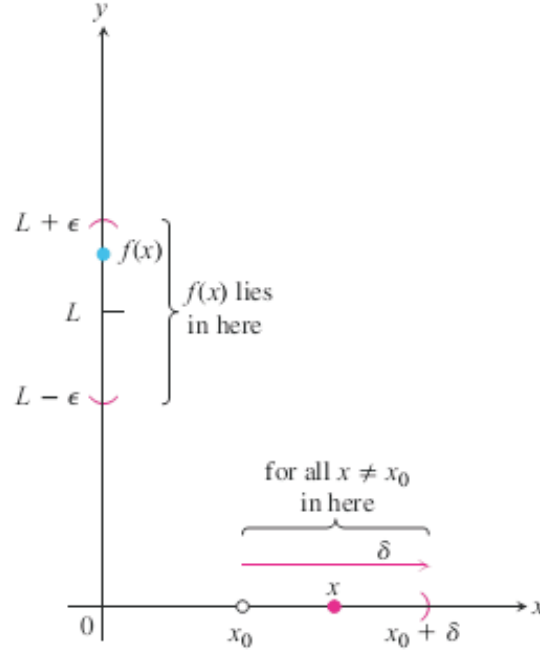


FIGURE 11.2. Sağ taraflı limit

Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) \delta > 0$ sayısı mevcut ise x, x_0 a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun sol taraflı L limiti vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

ile gösterilir.

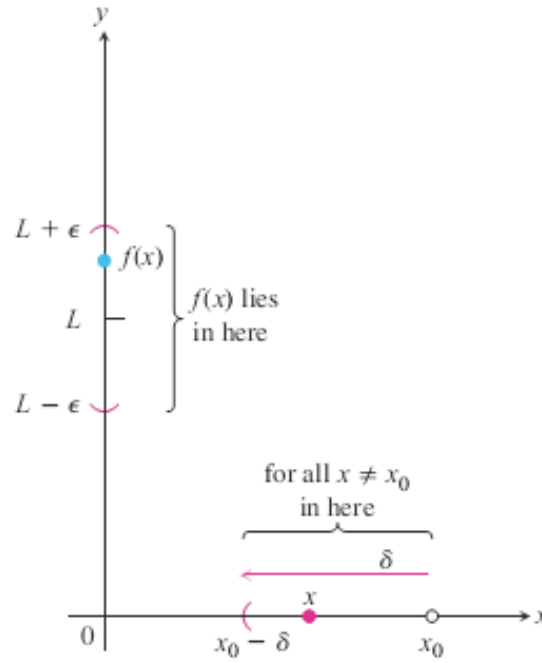
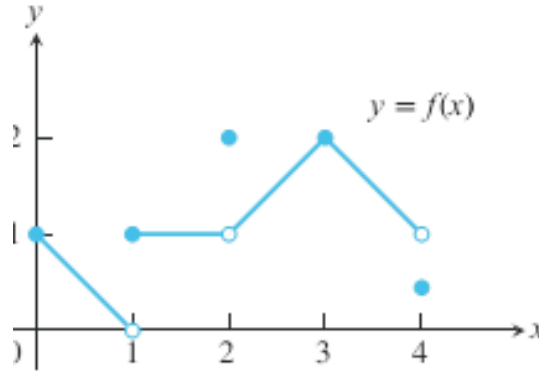


FIGURE 11.3. Sol taraflı limit

Teorem 11.2. x, x_0 a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun L limitinin var olması için gerek ve yeter koşul $f(x)$ fonksiyonunun sol ve sağ limitlerinin var ve bu limitlerin eşit olması gerekmektedir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ ve } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Örnek 11.3. Aşağıda grafiği verilen fonksiyon için $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ noktalarındaki sol ve sağ taraflı limitleri bulunuz.



Çözüm

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ mevcut değildir, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ mevcut değildir.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ mevcut değildir.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, $f(2) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$, $f(4) \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ mevcut değildir

□

Örnek 11.4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \geq 1 \\ -x^2 + 2x - 2, & x < 1 \end{cases}$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ limitlerini bulunuz.

Çözüm

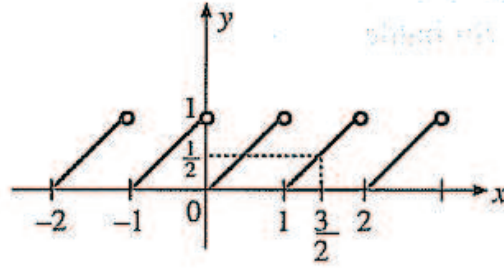
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 2x - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ mevcut değildir.}$$

□

Örnek 11.5. $f(x) = x - [x]$ fonksiyonun $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$ noktalarındaki sağ-sol taraflı limitini bulunuz ve bu noktalarda fonksiyonun limiti var mıdır?



Çözüm $2 \leq x < 2 + \delta$ için $\lfloor x \rfloor$ değeri 2 dir. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

$2 - \delta \leq x < 2$ için $\lfloor x \rfloor$ değeri 1 dir. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 2 - 1 = 1$$

Sağ ve sol taraflı limitler farklı olduğundan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ mevcut değildir. $\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2} + \delta$ için $\lfloor x \rfloor$ değeri 1 dir. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} (x - 1) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$\frac{3}{2} - \delta \leq x < \frac{3}{2}$ için $\lfloor x \rfloor$ değeri 1 dir. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (x - 1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Sağ ve sol taraflı limitler aynı olduğundan $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$. □

Örnek 11.6. Tanımı kullanarak $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm Hatırlatma: $x_0 = 0, f(x) = \sqrt{x}, L = 0$ ve Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < x < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) \delta > 0$ sayısı bulmalıyız. δ sayısını bulmak için tersten giderek $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ eşitsizliği ile başlamalıyız.

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \Rightarrow x < \varepsilon^2$$

Amacımız $0 < x < \delta$ koşulunu sağlayacak şekilde bir δ değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $\delta := \varepsilon^2$ olarak seçersek böyle bir δ değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $0 < x < \delta = \varepsilon^2$ ise $|\sqrt{x}| = |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ elde ederiz ki bu da sağ limit tanımımızdır. □

Uyarı 11.7. Daha önceden verilen sabit fonksiyonun limiti burda da aynı kalmaktadır. Yani: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k = k$

Tanım 11.8. ∞ sembolü Reel sayılarda ifade edilmez. Bu sembolü, bir fonksiyonun davranışının sonlu bir aralığın sınırlarını aştığında kullanırız.

Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) M$ sayısı mevcut ise x, ∞ a yaklaşıırken $f(x)$ fonksiyonunun L limiti vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

ile gösterilir. Yani, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ limitinden anlayacağımız, x değeri orijinden pozitif yöne doğru artarak uzaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu L limitine yaklaşır.

Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) N$ sayısı mevcut ise $x, -\infty$ a yaklaşıırken $f(x)$ fonksiyonunun L limiti vardır ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

ile gösterilir. Yani, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ limitinden anlayacağımız, x değeri orijinden negatif yöne doğru artarak uzaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu L limitine yaklaşır.

Örnek 11.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm Hatırlatma: $f(x) = \frac{1}{x}, L = 0$ ve Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) M$ sayısı bulmalıyız. M sayısını bulmak için tersten giderek $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ eşitsizliği ile başlamalıyız.

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Amacımız $x > M$ koşulunu sağlayacak şekilde bir M değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $M := \frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçersek böyle bir M değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $x > M = \frac{1}{\varepsilon}$ ise $\left| \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ elde ederiz ki bu da limit tanımımızdır.

Hatırlatma: $f(x) = \frac{1}{x}, L = 0$ ve Her bir $(\forall) \varepsilon > 0$ sayısı için

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde en az bir $(\exists) N$ sayısı bulmalıyız. N sayısını bulmak için tersten giderek $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ eşitsizliği ile başlamalıyız.

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Amacımız $x < N$ koşulunu sağlayacak şekilde bir N değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $N := -\frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçersek böyle bir N değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $x < N = -\frac{1}{\varepsilon}$ ise $\left|\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ elde ederiz ki bu da limit tanımımızdır. $\square$

Teorem 11.10. (Limit kuralları) Eğer L, M, k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M$$

ise

1) İki fonksiyonun toplamının limiti, limitlerin toplamına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = L + M$$

2) İki fonksiyonun farkının limiti, limitlerin farkına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = L - M$$

3) İki fonksiyonun çarpımın limiti, limitlerin çarpımına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = L \cdot M$$

4) Bir fonksiyonun bir sabit ile çarpımının limiti, limitin bu sabit ile çarpımına eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \cdot L$$

5) İki fonksiyonun bölümünün limiti, limitlerin bölümüne eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

6) Bir fonksiyonun kuvvetinin limiti, limitin kuvvetine eşittir:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{r/s} = \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \right)^{r/s} = L^{r/s}$$

r, s tam sayılar, $s \neq 0$ ve s çift sayı ise $L > 0$ olmalıdır.

Örnek 11.11. 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$ 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm 1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \pi\sqrt{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

□

Uyarı 11.12. $x \rightarrow \pm\infty$ için rasyonel polinom fonksiyonların limitlerini bulmak için pay ve paydayı, paydadaki en büyük dereceli terime bölünecektir.

Örnek 11.13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2}} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

□

Örnek 11.14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(\frac{11}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{11}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11}{x^2} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0 \end{aligned}$$

□

Uyarı 11.15. Yukarıdaki iki örnekten de görüldüğü üzere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, n = m \\ 0, m > n \end{cases}$$

Örnek 11.16. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x - x^2)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1\right)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\left(\sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right)} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1\right)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Örnek 11.17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$ limitini bulunuz.

Çözüm $t = 1/x$ yazarsak, $x \rightarrow \infty$ için $t \rightarrow 0$ dır. Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$$

□

Tanım 11.18. Bir fonksiyonun grafiğinin üzerindeki bir nokta orijinden uzaklaştıkça, fonksiyon ile belli bir doğrunun arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşıyorsa fonksiyonun grafiği bu doğruya asimptotik olarak yaklaşıyor denir ve bu doğruya da fonksiyonun asimptotu denir. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ veya } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

ise $y = b$ doğrusuna $f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotu denir.

Örnek 11.19. $\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ fonksiyonunun yatay asimptotu nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{x} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

olduğundan $y = \frac{5}{3}$ doğrusu yatay asimptottur.

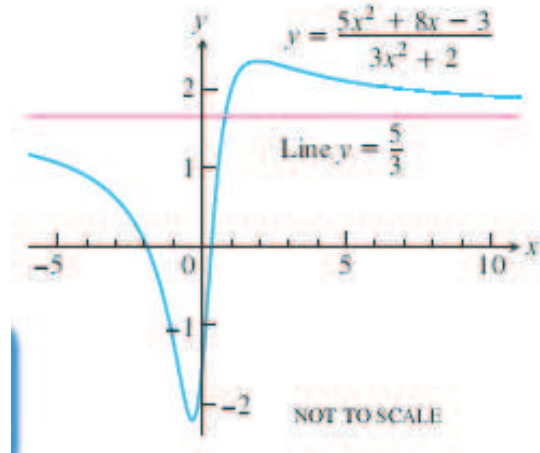


FIGURE 11.4. $\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ fonksiyonunun yatay asimptotu

□

Örnek 11.20. $\frac{3x^2-4x+5}{2x^2+x-1}$ fonksiyonunun yatay asimptotu nedir?

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3 - 4 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} + 5 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

olduğundan $y = \frac{3}{2}$ doğrusu yatay asimptottur. □

Örnek 11.21. *Sandviç Teoremini kullanarak $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.*

Çözüm

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \text{ ve } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$$

olduğundan $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ elde ederiz. Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$$

elde ederiz ki $y = 2$ doğrusu yatay asimptottur.

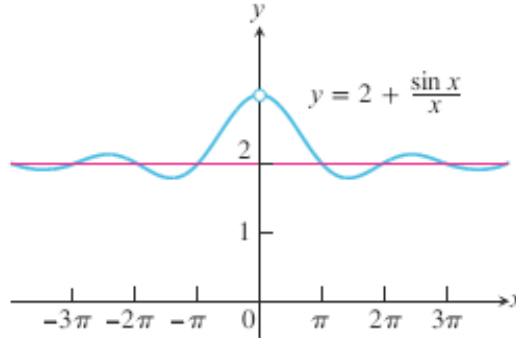


FIGURE 11.5. $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun yatay asimptotu

Tanım 11.22. Rasyonel bir fonksiyonda payın derecesi, payadanın derecesinden bir fazla ise fonksiyonun grafiği eğik asimptota sahiptir. Eğik asimptotu bulmak için payı, paydaya böldüğümüzde lineer bir bölüm ile kalan kısım elde edilir ki kalan terim $x \rightarrow \pm\infty$ için sifıra yakınsar. İşte bölüm olarak elde ettiğimiz lineer fonksiyon eğik asimptottur.

Örnek 11.23.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

fonksiyonun eğik asimptotunu bulunuz.

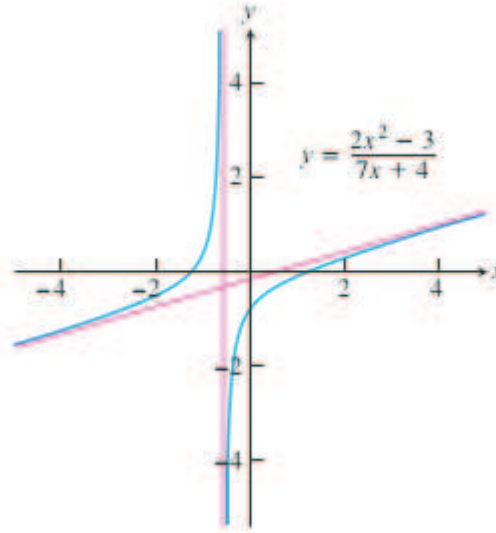


FIGURE 11.6. $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$ fonksiyonu

Çözüm

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{lineer fonksiyon}} - \underbrace{\frac{115}{49(7x + 4)}}_{\text{kalan}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{115}{49(7x + 4)} = 0$$

olduğundan $g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ fonksiyonu eğik asimptottur. Bu bize geometrik olarak şunu söyler,

$$f(x) \approx \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}, \text{ yeterince büyük } x \text{ değerleri için}$$

$$f(x) \approx \frac{115}{49(7x+4)}, \quad -\frac{4}{7} \text{ civarındaki } x \text{ değerleri için}$$

□

12. Sonsuz Limit ve Düşey Asimptot

x değeri x_0 a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu sonlu bir L sayısına yaklaşmak yerine orijinden oldukça uzağa gitmektedir.

Tanım 12.1. Her pozitif reel B sayısı için, en az bir $\delta > 0$ değeri vardır:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B$$

sağlanıyorsa, x değeri x_0 a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu sonsuzluğa yaklaşır denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

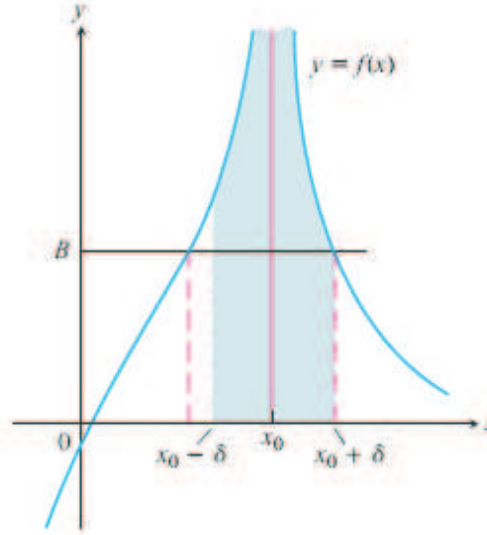


FIGURE 12.1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ geometiksel ifadesi

Her negatif reel $-B$ sayısı için, en az bir $\delta > 0$ değeri vardır:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B$$

sağlanıyorsa, x değeri x_0 a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu negatif sonsuzluğa yaklaşır denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

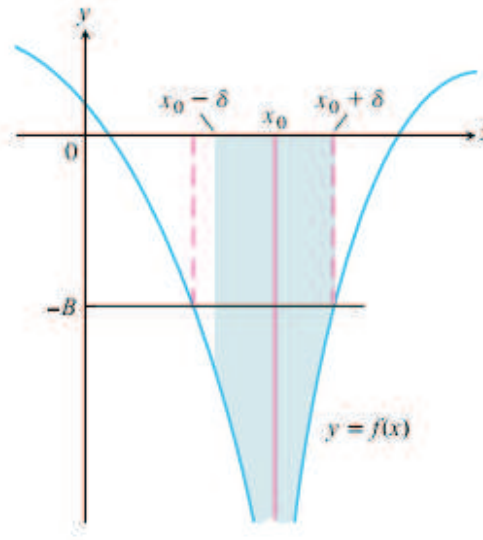
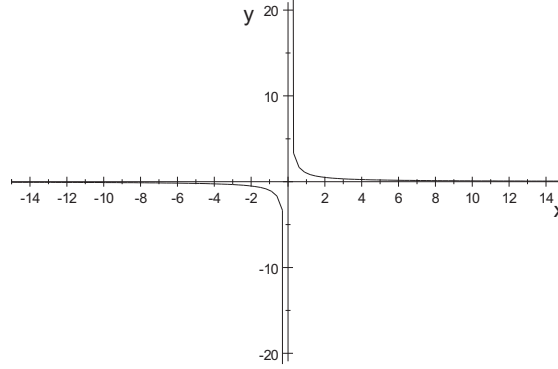


FIGURE 12.2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ geometiksel ifadesi

Örnek 12.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ olduğunu gösteriniz.

FIGURE 12.3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ geometiksel ifadesi

Çözüm Hatırlatma: $x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{x}$, ve Her pozitif reel B sayısı için, en az bir $\delta > 0$ değeri vardır:

$$x_0 < x < \delta + x_0 \Rightarrow f(x) > B$$

sağlanmalıdır. Yine tersten giderek bu δ sayısını bulalım:

$$\frac{1}{x} > B \Rightarrow x < \frac{1}{B}$$

Amacımız $0 < x < \delta$ koşulunu sağlayacak şekilde bir δ değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $\delta := \frac{1}{B}$ olarak seçersek böyle bir δ değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $0 < x < \delta = \frac{1}{B}$ ise $\frac{1}{x} > B$ elde ederiz ki bu da sağ limit tanımımızdır. Sol limit için: Her negatif reel $-B$ sayısı için, en az bir $\delta > 0$ değeri vardır:

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -B$$

sağlanmalıdır: Yine tersten giderek bu δ sayısını bulalım:

$$\frac{1}{x} < -B \Rightarrow x > -\frac{1}{B}$$

Amacımız $-\delta < x < 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bir δ değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $\delta := \frac{1}{B}$ olarak seçersek böyle bir δ değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $-\frac{1}{B} = -\delta < x < 0$ ise $\frac{1}{x} < -B$ elde ederiz ki bu da sol limit tanımımızdır. $\square$

Örnek 12.3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} &= \lim_{x-1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = \infty, t = x-1, \text{ bir önceki örnekten} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} &= \lim_{x-1 \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty, t = x-1, \text{ bir önceki örnekten}\end{aligned}$$

□

Örnek 12.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.**Çözüm** Her pozitif reel B sayısı için, en az bir $\delta > 0$ değeri vardır:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B$$

sağlanmalıdır. Yine tersten gidelim:

$$\frac{1}{x^2} > B \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$$

Amacımız $0 < |x| < \delta$ koşulunu sağlayacak şekilde bir δ değeri bulmaktır ve yukarıdaki eşitsizlikten $\delta := \frac{1}{\sqrt{B}}$ olarak seçersek böyle bir δ değerini elde etmiş oluruz. Şimdi de düzden giderek sağlamasını yapalım: Eğer $0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ ise $\frac{1}{x^2} > B$ elde ederiz ki bu da limit tanımımızdır. □

Tanım 12.5. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \text{ veya } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

ise $x = a$ doğrusuna $f(x)$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir.**Örnek 12.6.** $y = \frac{x+3}{x+2}$ fonksiyonu için yatay ve düşey asimptotları bulunuz.

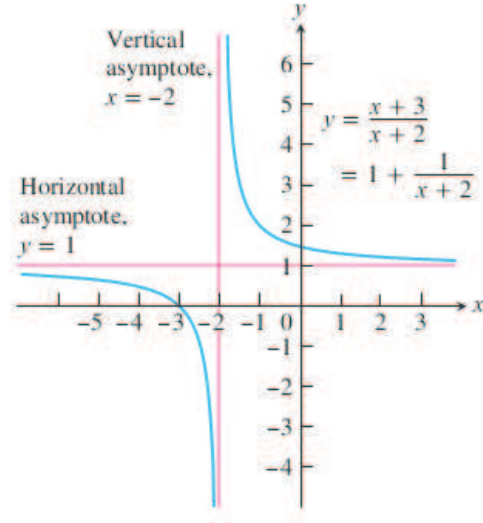


FIGURE 12.4. $y = \frac{x+3}{x+2}$ fonksiyonu için yatay ve dikey asimptotlar

Çözüm

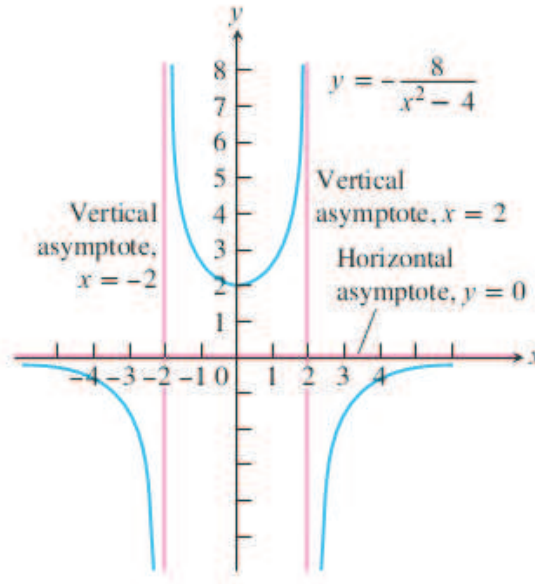
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}} = 1 \end{aligned}$$

olduğundan $y = 1$ yatay asimptot

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{x+2} = \infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty$$

olduğundan $x = -2$ dikey asimptottur. □

Örnek 12.7. $y = -\frac{8}{x^2-4}$ fonksiyonu için yatay ve dikey asimptotları bulunuz.

FIGURE 12.5. $y = -\frac{8}{x^2-4}$ fonksiyonu için yatay ve düşey asimptotlar**Çözüm**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{8}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{8}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 8}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{8}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{8}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 8}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} = 0\end{aligned}$$

olduğundan $y = 0$ yatay asimptot

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{8}{x^2 - 4} = -\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{8}{x^2 - 4} = \infty$$

olduğundan $x = 2$ düşey asimptottur ve

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{8}{x^2 - 4} = \infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow -2^-} -\frac{8}{x^2 - 4} = -\infty$$

olduğundan $x = -2$ düşey asimptottur. □

Örnek 12.8. (Sonsuz sayıda asimptotu olan eğriler) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \cot x$ fonksiyonları için düşey asimptotları bulunuz.

Çözüm $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, $y = \tan x$ fonksiyonları $\cos x$ fonksiyonunu 0 yapan $\pm\pi/2$ ve tek katlarında yani $\pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \pm7\pi/2, \dots$ sıfır olur. Yani

$$\lim_{x \rightarrow \pm(2k-1)\frac{\pi}{2}} \sec x = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm(2k-1)\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$$

olduğundan $\pm\pi/2$ ve tek katlarında yani $\pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \pm7\pi/2, \dots$ doğruları düşey asimptottur.

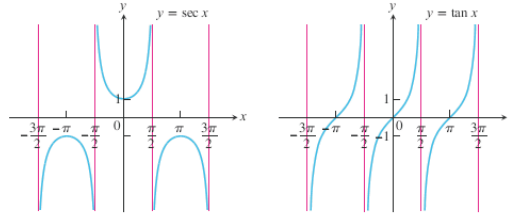


FIGURE 12.6. $y = \sec x$, $y = \tan x$ fonksiyonlarının sonsuz sayıda asimptotu vardır

$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$, $y = \cot x$ fonksiyonları $\sin x$ fonksiyonunu 0 yapan $\pm\pi$ ve tüm katlarında yani $\pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ sıfır olur. Yani

$$\lim_{x \rightarrow \pm k\pi} \csc x = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm k\pi} \cot x = \pm\infty$$

olduğundan $\pm\pi$ ve tüm katlarında yani $\pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ doğruları düşey asimptottur.

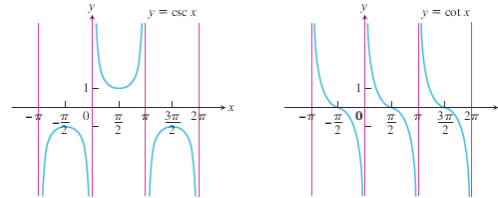
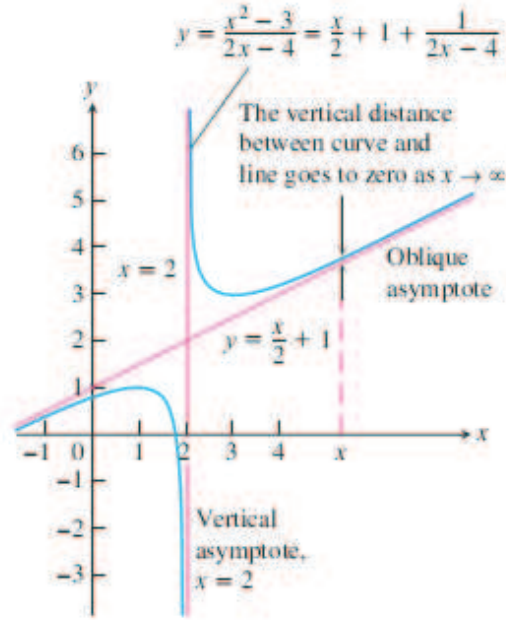


FIGURE 12.7. $y = \csc x$, $y = \cot x$ fonksiyonlarının sonsuz sayıda asimptotu vardır

□

Örnek 12.9. $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

FIGURE 12.8. $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$ fonksiyonunun asimptotları

Çözüm Payın derecesi paydanın derecesinden bir fazla olduğundan eğik asimptot ve paydayı sıfır yapan $x=2$ değeri için de düşey asimptotu vardır. Buna göre

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}_{\text{lineer fonksiyon}} + \underbrace{\frac{1}{2x - 4}}_{\text{kalan}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x - 4} = 0$$

olduğundan $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ fonksiyonu eğik asimptottur. Bu bize geometrik olarak şunu söyler,

$$f(x) \approx \frac{1}{2}x + 1, \text{ yeterince büyük } x \text{ değerleri için}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4}, \text{ 2 civarındaki } x \text{ değerleri için}$$

ve ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = -\infty$$

olduğundan $x = 2$ doğrusu düşey asimptottur. □

Örnek 12.10. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$, $g(x) = 3x^4$ fonksiyonları farklı olmasına rağmen yeterince büyük $|x|$ değerleri için birbirlerine denk olduğunu gösteriniz.

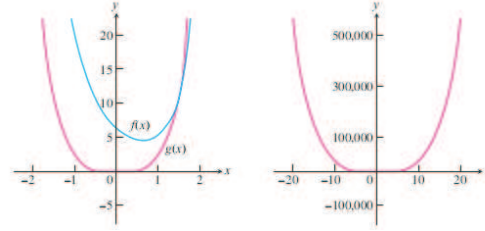


FIGURE 12.9. f ve g fonksiyonlarının orjinin yakınındaki grafikleri ve daha büyük $|x|$ değerleri için grafikleri

Çözüm

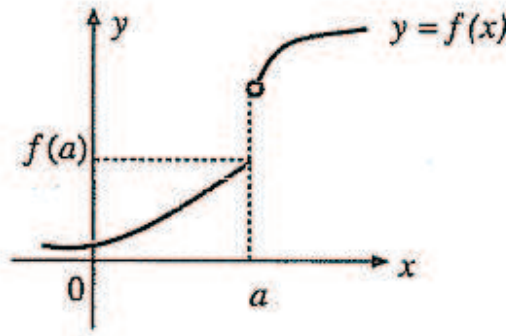
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(3 - 2\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2} - 5\frac{1}{x^3} + 6\frac{1}{x^4} \right)}{3x^4} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2\frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3\frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 5\frac{1}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 6\frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3} = 1 \end{aligned}$$

olduğundan yeterince büyük $|x|$ değerleri için birbirlerine denktir. □

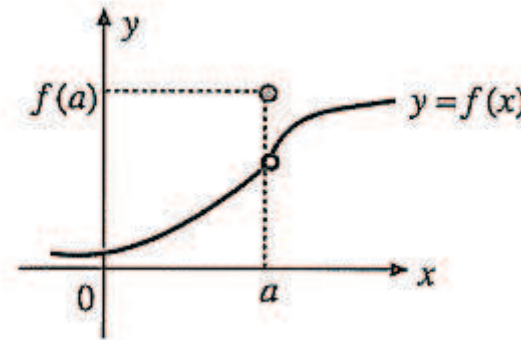
13. Süreklilik

Bir önceki bölümde, noktalardaki değerleri verilen bir fonksiyonun grafiğini çizerken herhangi bir kırılma ve sıçrama gerçekleştirmeksizin noktaları birleştirmiştik. Tabi bunu yaparken sürekli fonksiyonlar ile çalıştığımızı varsayıyoruz. Sürekli bir fonksiyonun, x, x_0 a yaklaşırken limitini bulmak için $f(x_0)$ değerinin hesaplanması yeterli olacaktır. Bir fonksiyonun x_0 noktası civarında tanımlı olsun. Bu durumda 3 seçenek vardır.

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ yoktur.

FIGURE 13.1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ yoktur

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır fakat $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

FIGURE 13.2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır fakat $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır ve $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

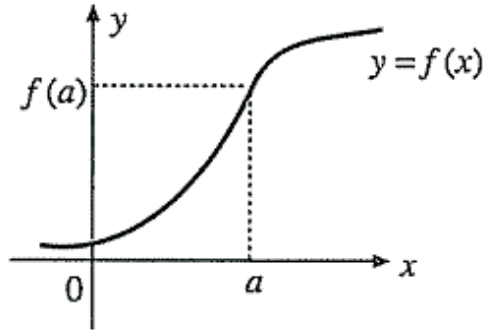
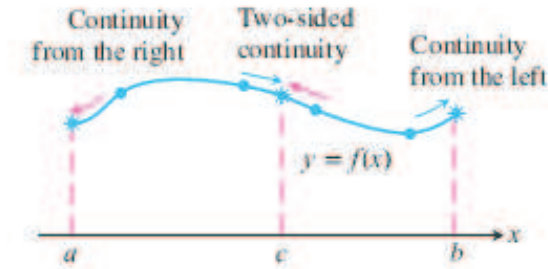


FIGURE 13.3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vardır ve $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Tanım 13.1. İç nokta: $y = f(x)$ fonksiyonu için

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa x_0 iç noktasında süreklidir denir.



Sol sınır nokta: $y = f(x)$ fonksiyonu için

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa a sol sınır noktasında süreklidir denir.

Sağ sınır nokta: $y = f(x)$ fonksiyonu için

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa b sağ sınır noktasında süreklidir denir.

Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında sürekli değil ise kısaca $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 da süreksizdir denir ve x_0 noktasına da $f(x)$

fonksiyonunun süreksizlik noktası denir.

$y = f(x)$ fonksiyonu için

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa x_0 noktasında sağdan süreklidir denir.

$y = f(x)$ fonksiyonu için

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

koşulu sağlanıyorsa x_0 noktasında soldan süreklidir denir. Böylece $y = f(x)$ fonksiyonunun a sol sınır noktasında sürekliliği, sağdan sürekliliktir ve b sağ sınır noktasında sürekliliği, soldan sürekliliktir.

Teorem 13.2. $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 iç noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul x_0 noktasında sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.

Uyarı 13.3. $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 iç noktasında sürekli olması için aşağıdaki üç koşul sağlanmalıdır:

- 1) $f(x_0)$ değeri mevcuttur.
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ limiti mevcuttur.
- 3) $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ koşulu sağlanmalıdır.

Örnek 13.4. $y = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında süreklidir.

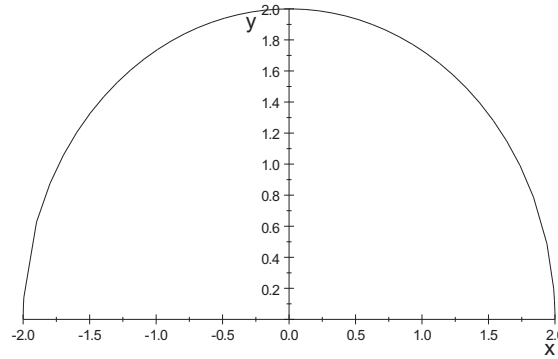


FIGURE 13.4. $\sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında sürekliliği

Çözüm 1) $\sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu her bir $x \in [-2, 2]$ aralığında tanımlıdır

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - x_0^2}$, limiti mevcuttur her bir $x \in [-2, 2]$ için. Benzer şekilde $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$

3) $\sqrt{4 - x_0^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{4 - x^2}$ koşulu sağlanmaktadır.

Bu üç koşul sağlandığından fonksiyonumuz süreklidir. □

Örnek 13.5. $f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz.

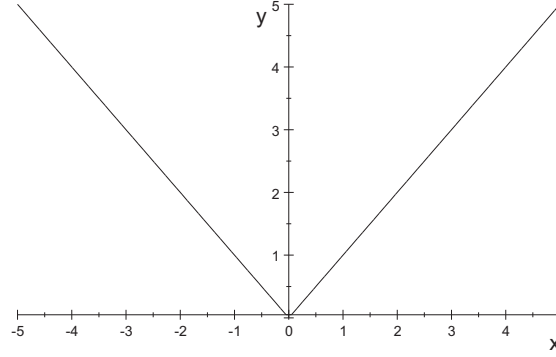


FIGURE 13.5. $|x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekliliği

Çözüm

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

sağlandığından sağ ve sol limitleri vardır ve dolayısıyla limitleri vardır ve fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki değerine eşit olduğundan süreklidir. $\square$

Örnek 13.6. $U(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

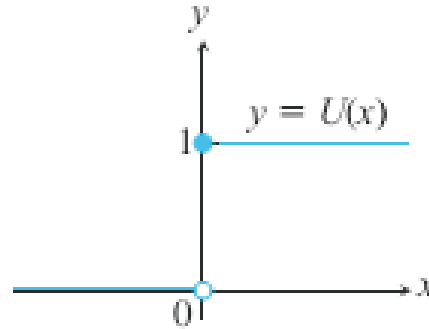


FIGURE 13.6. $U(x)$ fonksiyonunun sürekliliği

Çözüm

$$U(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} U(x)$$

sağlandığından $x = 0$ da fonksiyon sağdan süreklidir. Ve $U(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} U(x)$ olduğundan soldan sürekli değildir. Ve ayrıca soldan sürekli olmadığından sürekli de değildir. $\square$

Örnek 13.7. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz.

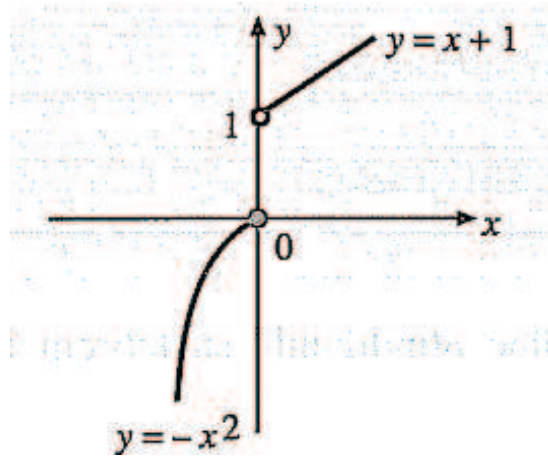


FIGURE 13.7. Değişimin ortalama oranı

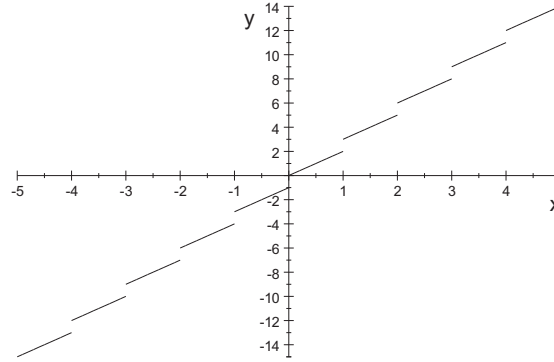
Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \end{aligned}$$

sağlandığından $x = 0$ da fonksiyonun limiti yoktur ve sürekli de değildir. $\square$

Örnek 13.8. $f(x) = \lfloor x \rfloor + 2x$ fonksiyonu sürekli midir?

2. LIMIT VE SÜREKLİLİK



Çözüm $[x]$ fonksiyonu n tam sayı değerlerinde limiti olmadığından $f(x)$ fonksiyonunun da bu tam değerlerde limiti mevcut değildir ve dolayısıyla sürekli değildir. $\square$

Tanım 13.9. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında sürekli değil ise aşağıdaki durumlar söz konusudur:

1) *Kaldırılabilir Süreksizlik:* Eğer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ limiti mevcut fakat $f(x_0)$ değerinden farklı ise fonksiyonun süreksizliğine kaldırılabilir süreksizlik adı verilir.

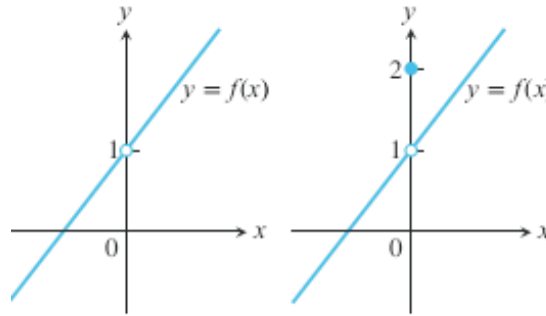


FIGURE 13.8. Kaldırılabilir süreksizlik

2) *(Sıçrama süreksizliği)* Eğer $f(x)$ fonksiyonunun sağ ve sol limitleri farklı ise fonksiyonun süreksizliğine sıçrama süreksizlik adı verilir.

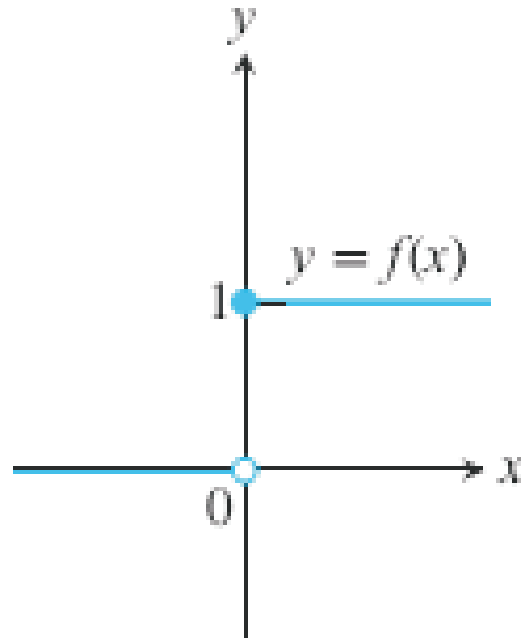


FIGURE 13.9. Sıçrama süreksizliği

3) (Sonsuz süreksizlik) Eğer $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ise fonksiyonun süreksizliğine sonsuz süreksizlik adı verilir.

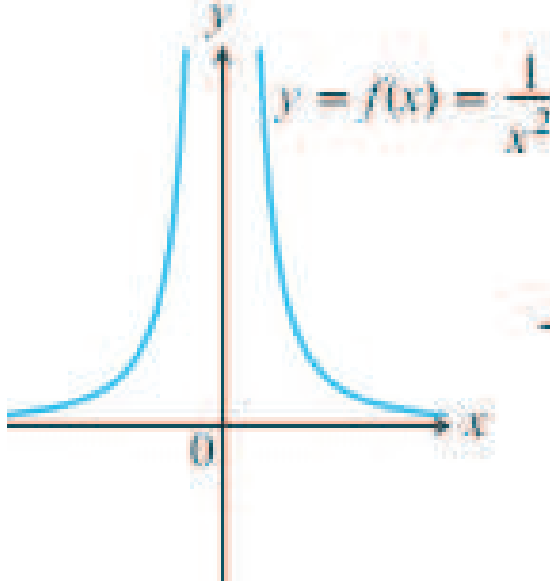


FIGURE 13.10. Sonsuz süreksizlik

4) (Salınım Süreksizliği) Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında çok salınım gerçekleştiriyorsa fonksiyonun süreksizliğine salınım süreksizliği adı verilir.

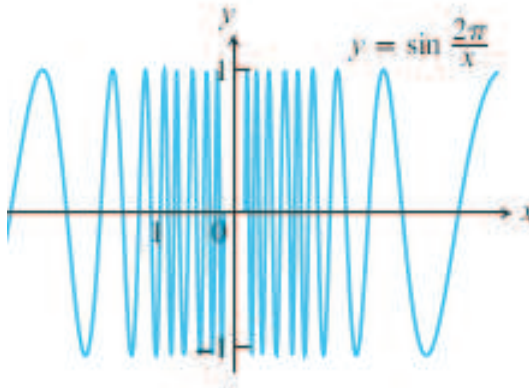


FIGURE 13.11. Salınım Süreksizliği

Teorem 13.10. (Sürekli fonksiyonların özellikleri) Eğer k reel sayılar ve f, g fonksiyonları $x = x_0$ noktasında sürekli ise

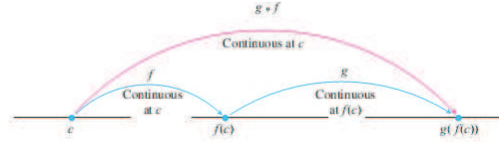
1) (Toplamanın sürekliliği) İki fonksiyonun toplamı olan $f + g$ fonksiyonu da $x = x_0$ noktasında sürekli dir.

- 2) (Farkın sürekliliği) İki fonksiyonun farkı olan $f - g$ fonksiyonu da $x = x_0$ noktasında süreklidir.
- 3) (Çarpımın sürekliliği) İki fonksiyonun çarpımı olan $f \cdot g$ fonksiyonu da $x = x_0$ noktasında süreklidir.
- 4) (Sabit ile çarpımın sürekliliği) Fonksiyonun bir sabit ile çarpımı olan $k \cdot f$ fonksiyonu da $x = x_0$ noktasında süreklidir.
- 5) (Bölümün sürekliliği) İki fonksiyonun bölümü olan $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $x = x_0$ noktasında süreklidir, $g(x_0) \neq 0$
- 6) (Kuvvetin sürekliliği) Fonksiyonun kuvveti olan $f^{r/s}$ fonksiyonu da süreklidir, burada r, s tam sayılar, $s \neq 0$ olmalıdır.

Uyarı 13.11. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomu süreklidir.

Uyarı 13.12. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ve $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ polinomları için $\frac{p(x)}{q(x)}$ fonksiyonu da süreklidir. ($q(x_0) \neq 0$)

Teorem 13.13. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x_0)$ noktasında sürekli ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.



Örnek 13.14. Aşağıdaki fonksiyonların sürekliliğini gösteriniz.

$$1) y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \quad 2) y = \frac{x^{2/3}}{1 + x^4}$$

$$3) y = \left| \frac{x-2}{x^2-2} \right| \quad 4) y = \left| \frac{x \sin x}{x^2+2} \right|$$

Çözüm 1) Uyarı 13.11'den $x^2 - 2x - 5$ polinom fonksiyonu süreklidir. Teorem 13.10'in 6. özelliğinden sürekli fonksiyonun kuvveti de sürekli olduğundan $\sqrt{x^2 - 2x - 5}$ fonksiyonu süreklidir.

2) Uyarı 13.11'den $x, 1 + x^4$ polinom fonksiyonları süreklidir. Teorem 13.10'in 6. özelliğinden sürekli fonksiyonun kuvveti de süreklidir yani $x^{2/3}$ fonksiyonu da süreklidir. Teorem 13.10'in 5. özelliğinden sürekli $x^{2/3}, 1 + x^4$ fonksiyonlarının bölümleri de süreklidir. Yani $y = \frac{x^{2/3}}{1+x^4}$ fonksiyonu süreklidir.

3) Teorem 13.10'in 5. özelliğinden sürekli $x-2, x^2-2$ fonksiyonlarının bölümleri de süreklidir yani $\frac{x-2}{x^2-2}, x \neq \pm\sqrt{2}$ süreklidir ve $g(t) = |t|$ mutlak değer fonksiyonu da sürekli olduğundan Teorem 13.13'den $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da süreklidir. Yani, $g \circ f(x) = \left| \frac{x-2}{x^2-2} \right|$ fonksiyonu süreklidir $x \neq \pm\sqrt{2}$.

4) $\sin x$ fonksiyonu her yerde süreklidir ve Teorem 13.10'in 3. özelliğinden sürekli $x, \sin x$ fonksiyonlarının çarpımı da süreklidir. Ayrıca Uyarı 13.11'den $x^2 + 2$ polinom fonksiyonu süreklidir ve Teorem 13.10'in 5. özelliğinden sürekli $x \sin x, x^2 + 2$ fonksiyonlarının bölümleri olan $\frac{x \sin x}{x^2+2}$ fonksiyonu da süreklidir ve bir önceki örnekte olduğu gibi bunların mutlak değerleri de süreklidir yani $y = \left| \frac{x \sin x}{x^2+2} \right|$ fonksiyonu süreklidir. $\square$

Tanım 13.15. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında kaldırılabılır süreksizliğe sahip ise yeni bir $F(x)$ fonksiyonunu

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

olarak tanımlarsak bu fonksiyon sürekli bir fonksiyon olacaktır. F fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında f fonksiyonunun sürekli genişletmesi denir.

Örnek 13.16. $y = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli genişletmesini elde ediniz.

Çözüm $y = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında tanımlı olmadığından sürekli değildir yani kaldırılabılır süreksizliğe sahiptir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

olduğundan f fonksiyonunun sürekli genişletmesini

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

olarak yazabiliriz.

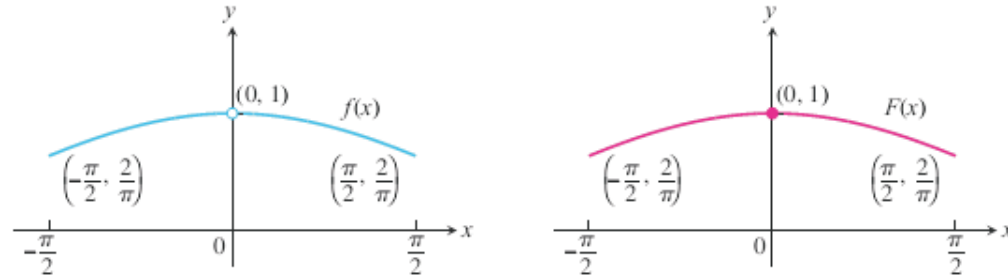


FIGURE 13.12. f fonksiyonu ve onun sürekli genişletmesi F

□

Teorem 13.17. (Ara değer Teoremi) f fonksiyonunu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve p , $f(a)$ ve $f(b)$ arasında bir değer ise $[a, b]$ kapalı aralığında $f(c) = p$ olacak şekilde enaz bir c noktası mevcuttur. Burdaki c noktası tek olmak zorunda değildir birden fazla olabilir.

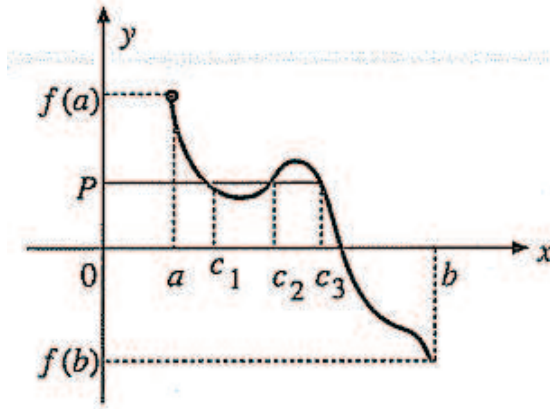


FIGURE 13.13. Ara değer Teoremi

Teorem 13.18. (Bolzano Teoremi) f fonksiyonunu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $f(a)$ ve $f(b)$ farklı işaretlere sahip olsunlar yani $f(a) \cdot f(b) < 0$ olsun. Bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası mevcuttur.

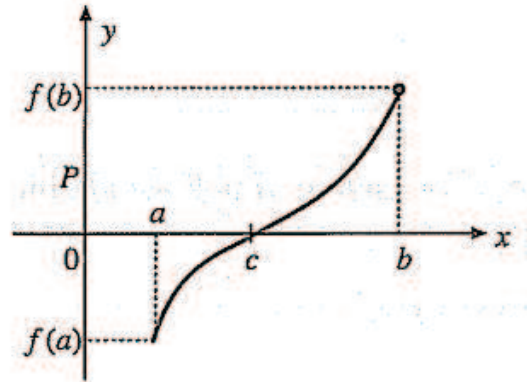
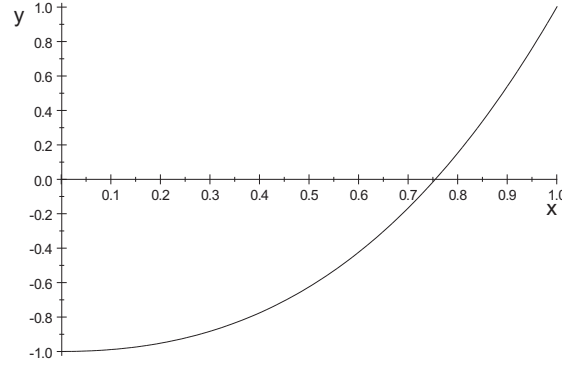


FIGURE 13.14. Bolzano Teoremi

Örnek 13.19. $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ fonksiyonunun $x \in [0, 1]$ aralığında $f(c) = 0$ koşulunu sağlayan bir c değeri var mıdır yada diğer bir ifade ile fonksiyonun kökü var mıdır?

Çözüm $f(0) = -1, f(1) = 1, f(0) \cdot f(1) < 0$ ve f fonksiyonu bu aralıkta sürekli olduğundan Teorem 13.18'den $f(c) = 0$ koşulunu sağlayan bir c değeri vardır.

2. LİMİT VE SÜREKLİLİK

FIGURE 13.15. $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ fonksiyonunun $x \in [0, 1]$ aralığında kökü vardır.

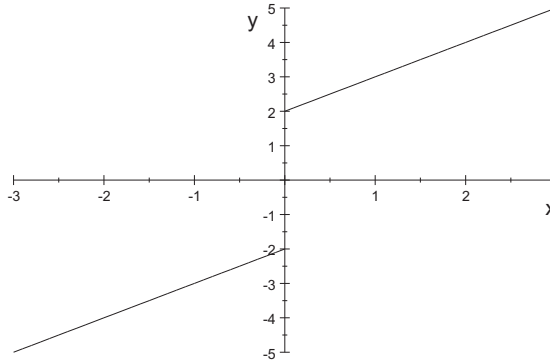
□

Örnek 13.20. $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 3 \\ x-2, & -3 \leq x < 0 \end{cases}$ fonksiyonun $x \in [-3, 3]$ aralığında $f(c) = 0$ koşulunu sağlayan bir c değeri var mıdır yada diğer bir ifade ile fonksiyonun kökü var mıdır?

Çözüm $f(-3) = -5, f(3) = 5, f(-3) \cdot f(3) < 0$ fakat f fonksiyonu $x = 0$ da sürekli değildir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 2 = -2 \end{aligned}$$

o halde Teorem 13.18'in koşulu sağlanmadığından $f(c) = 0$ koşulunu sağlayan bir c değeri yoktur.

FIGURE 13.16. $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 3 \\ x-2, & -3 \leq x < 0 \end{cases}$ fonksiyonun $x \in [-3, 3]$ aralığında kökü yoktur.

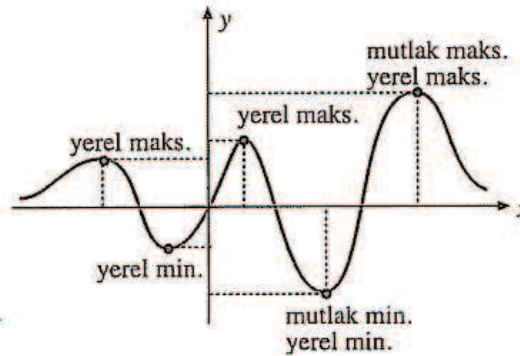
□

Teorem 13.21. f fonksiyonunu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise $\forall x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ olacak şekilde m, M sayıları vardır yani fonksiyon sınırlıdır.

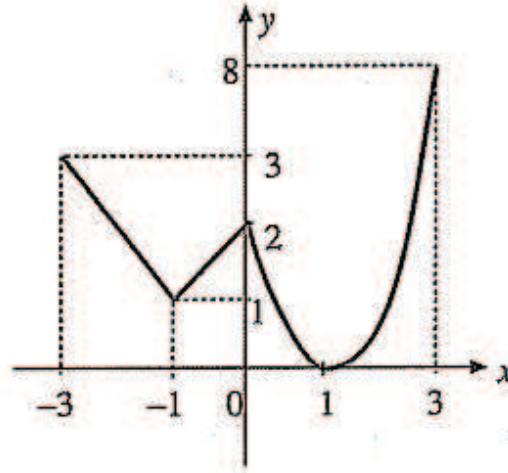
Teorem 13.22. $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ sürekli ve kesin artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ fonksiyonunun $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ sürekli ve kesin artan ters fonksiyonu vardır.

Tanım 13.23. $A \subset \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

- 1) $c \in A$ olsun. $|x - c| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x \in A$ için $f(x) \leq f(c)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonu c noktasında yerel (lokal) maksimuma sahiptir denir.
- 2) $d \in A$ olsun. $|x - d| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x \in A$ için $f(d) \leq f(x)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonu d noktasında yerel (lokal) minimuma sahiptir denir.
- 3) Yerel maksimum ve yerel minimum değeri birden fazla olabilir ve bu değerlere fonksiyonun extramumları veya extramum değerleri de denir.
- 4) $\forall x \in A$ için $f(x) \leq f(p)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $p \in A$ mevcut ise f fonksiyonu p noktasında mutlak (global) maksimuma sahiptir denir.
- 5) $\forall x \in A$ için $f(r) \leq f(x)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $r \in A$ mevcut ise f fonksiyonu r noktasında mutlak (global) minimuma sahiptir denir.
- 6) Fonksiyonun mutlak maksimumu, aynı zamanda yerel maksimum değeridir ama tersi doğru değildir yani yerel maksimum değeri mutlak maksimum olmayabilir.
- 7) Fonksiyonun mutlak minimumu, aynı zamanda yerel minimum değeridir ama tersi doğru değildir yani yerel minimum değeri mutlak minimum olmayabilir.



Örnek 13.24. Şekildeki grafiğe göre fonksiyonun yerel ve mutlak maksimum, minimum değerlerini bulunuz.



Çözüm Yerel maksimum değerlerini $x = -3, x = 0, x = 3$ noktalarında alır, yerel minimum değerlerini $x = -1, x = 1$ noktalarında alır. Fonksiyon mutlak maksimum değerini $x = 3$ noktasında alırken mutlak minimum değerini $x = 0$ noktasında alır. $\square$

CHAPTER 3

Türev

14. Fonksiyonun Türevi

Tanım 14.1. $y = f(x)$ fonksiyonunun $P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen eğimi

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (14.1)$$

limiti ile hesaplanır. Bu noktadan geçen ve eğimi bu limit olan doğruya da *tanjant doğrusu* denir. Yani *tanjant doğrusu*

$$y = m(x - x_0) + f(x_0) \quad (14.2)$$

ile verilir.

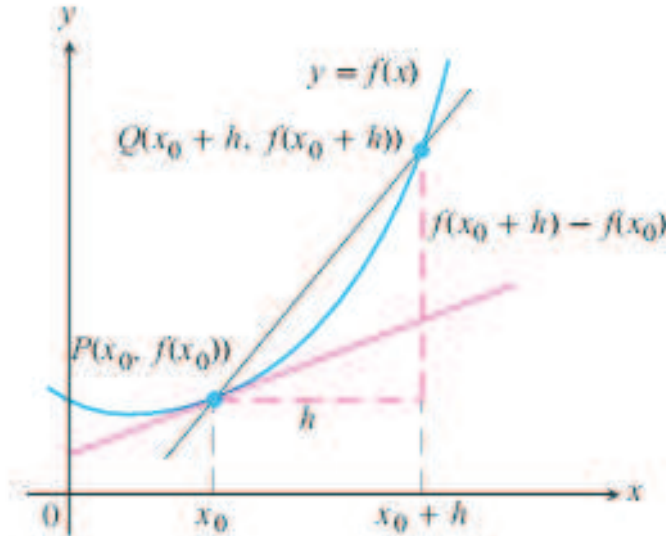


FIGURE 14.1. $P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen tanjant ve sekant doğruları

Örnek 14.2. $y = mx + n$ doğrusunun $x = x_0$ noktasından geçen tanjant doğrusunu bulunuz.

Çözüm Öncelikle (14.1)'den eğimini bulalım:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + h) + n - (mx_0 + n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m$$

ve (14.2)'den tanjant doğrusu

$$y = m(x - x_0) + f(x_0) = m(x - x_0) + (mx_0 + n) = mx + n$$

yani lineer doğrunun tanjant doğrusu kendisidir. □

Örnek 14.3. 1) $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$ doğrusunun $x = x_0$ noktasındaki eğimini bulunuz.

2) Eğimi hangi noktada $-1/4$ olur?

Çözüm 1) (14.1)'den eğim

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 - (x_0 + h)}{hx_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

2)

$$m = -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \pm 2$$

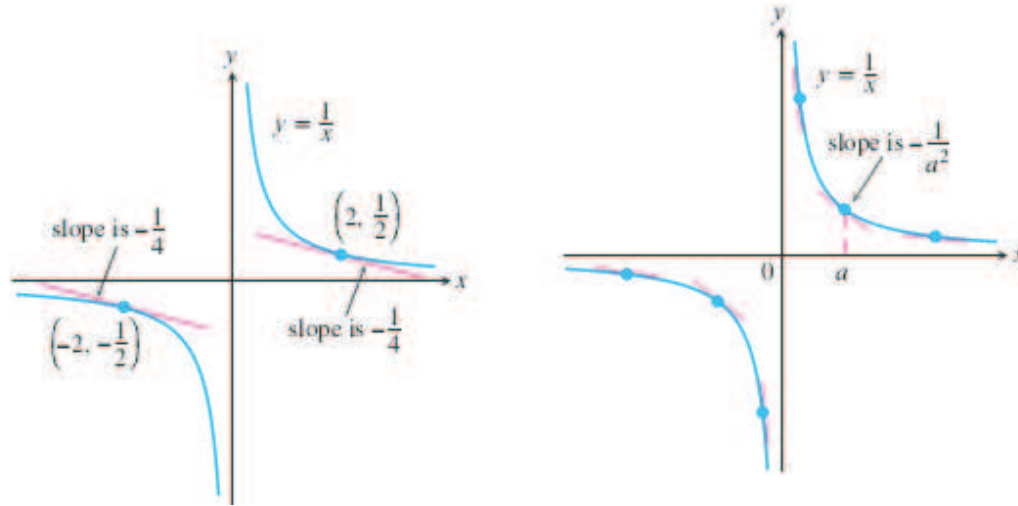


FIGURE 14.2. $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$ doğrusunun $x = x_0$ noktasındaki eğimi

□

Uyarı 14.4. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ifadesine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki h artımlı fark bölümüdür veya diğer bir ifade ile f fonksiyonunun x_0 noktasından geçen sekant doğrusudur. h sıfıra giderken bu ifadenin limitine de f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir. İte bu türev f fonksiyonunun x_0 noktasındaki eğimi ve tanjantını verir. Vey bir önceki bölümde de gördüğümüz üzere x_0 noktasında değişimin oranını verir.

Tanım 14.5. 1) Eğer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ limiti mevcut ise $y = f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında diferansiyellenebilir (türevlenebilir) denir. $f'(x_0), y', \frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}, D(f)(x_0), D_x f(x_0)$ ¹ sembollerinden biri ile gösterilir. $\frac{d}{dx}, D$ operatörlerine de diferansiyel operatör denir. $\frac{df}{dx}$ ifadesini f fonksiyonunun x e göre türevi şeklinde söyleriz. Türevin bir diğer tanımını da şöyle verebiliriz:

2) Eğer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limiti mevcut ise $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında diferansiyellenebilir (türevlenebilir) denir.

3) f' fonksiyonunun tanım kümesi f fonksiyonunun $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ limitinin mevcut olduğu tüm noktaların kümesidir ki bu da f in tanım kümesinin bir alt kümesidir.

4) f' fonksiyonu x_0 noktasında mevcut ise f fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında diferansiyellenebilir denir. f' fonksiyonu her noktada mevcut ise kısaca f fonksiyonu diferansiyellenebilir denir.

5) Eğer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ limiti mevcut ise $y = f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında sağ taraflı diferansiyellenebilir (türevlenebilir) denir.

6) Eğer $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ limiti mevcut ise $y = f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında sol taraflı diferansiyellenebilir (türevlenebilir) denir.

7) $y = f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında diferansiyellenebilir (türevlenebilir) olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonunun x_0 noktasında sağ taraflı ve sol taraflı türevi vardır ve eşit olmalıdır.

Örnek 14.6. Yukarıdaki Örnek 14.2 göre $y = mx + n$ doğrusunun türevi $y' = m$ ve Örnek 14.3 ye göre $y = \frac{1}{x}$ eğrisinin türevi $y' = -\frac{1}{x^2}$ dir.

Örnek 14.7. $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ fonksiyonunu diferansiyelleyiniz (türevini alınız).

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{(x-1)(h+x-1)} \\ &= -\frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

□

¹ $y', f'(x_0)$ notasyonları Newton (Isaac Newton 1643 – ö. 31 Mart 1727, İngiliz fizikçi, matematikçi, astronom, mucit, filozof, ilahiyatçı) tarafından kullanılmıştır. $\frac{d}{dx}$ notasyonu da Leibnitz (Gottfried Wilhelm Leibniz 1646 – 14 Kasım 1716, Alman matematikçi ve filozofu) tarafından kullanılmıştır.

Örnek 14.8. $y = f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ fonksiyonunu türevini bulunuz ve $x = 4$ noktasında tanjant doğrusunu bulunuz.

Çözüm Bu sefer 2. tanımı kullanalım:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$x = 4$ noktasında tanjant doğrusu için (14.1)'den eğim:

$$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

ve (14.2)'den tanjant doğrusu:

$$y = m(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{4}(x - 4) + \sqrt{4} = \frac{1}{4}x + 1$$

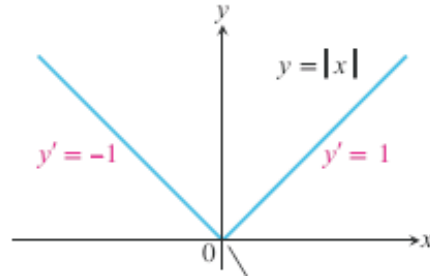
□

Örnek 14.9. $y = f(x) = |x|$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralığında diferansiyellenebilirdir ancak $x = 0$ noktasında türevi yoktur, gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases} \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x + h - x}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = -1 \Rightarrow \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\neq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

olduğundan sağ taraflı ve sol taraflı limit eşit değildir bu yüzden Tanım 14.5'in 7. seçeneğinden türevi yoktur.

FIGURE 14.3. $y = f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevi

□

Örnek 14.10. $y = f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi yoktur, gösteriniz.

Çözüm

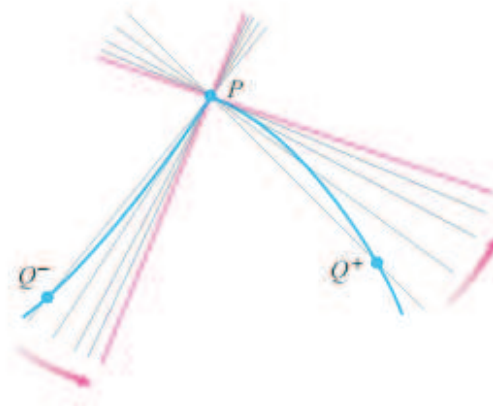
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \infty \end{aligned}$$

limiti sonlu olmadığından fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

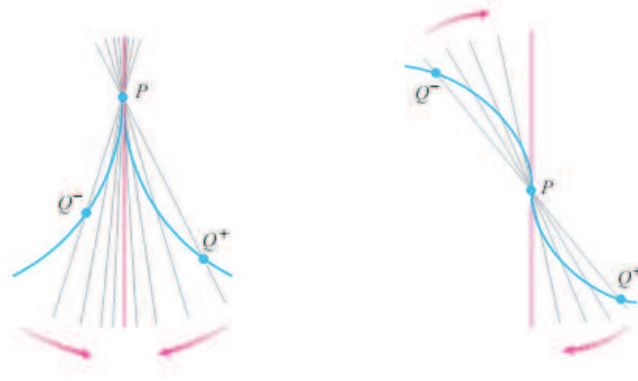
□

Uyarı 14.11. Fonksiyonun aşağıdaki durumlarda türevi yoktur:

1) Köşesi olan fonksiyonlar:



2) Eğimi ∞ veya $-\infty$ olan fonksiyonlar:



3) Süreksizlik durumlarında:

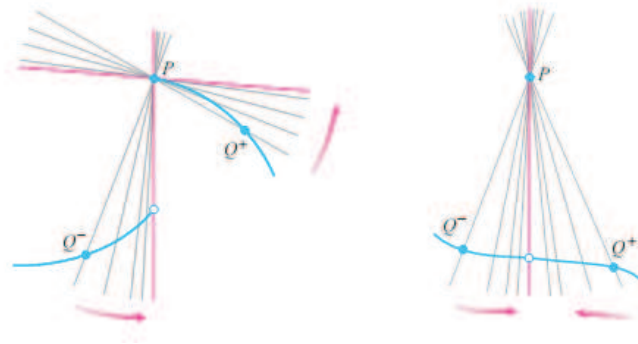


FIGURE 14.4. Değişimin ortalama oranı

Teorem 14.12. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenebilir ise sürekli.

PROOF. $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenebilir olsun. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ olduğunu gösterlim.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

son eşitlikte $x \rightarrow x_0$ için limit alırsak

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)}_{=f(x_0)} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_{=0} \\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

□

15. Türev Almadaki Kurallar

Bu bölümde temel türev alma kuralları vereceğiz. Bu kuralların hepsi ayrı ayrı birer teorem olup ispatları verilmeyecektir.

Teorem 15.1. 1) (Sabit Fonksiyonun Türevi) Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise yani $f(x) = c$ ise (**Açıklama**)²

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0 \vee (c)' = 0$$

2) (Kuvvet Fonksiyonlarının Türevi) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $y = f(x) = x^a$ ise

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1} \vee (x^a)' = ax^{a-1}$$

3) (Sabit sayı ile Çarpma) Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve c sabit ise

$$\frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx} \vee (cf)' = cf'$$

4) (Toplamanın Türevi) Eğer $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise

$$\frac{d(f_1 + f_2 + \dots + f_n)}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} + \dots + \frac{df_n}{dx} \vee (f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

5) (Çarpımın Türevi) Eğer $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}\frac{d(f_1 \cdot f_2 \dots f_n)}{dx} &= \frac{df_1}{dx}(f_2 \dots f_n) + \frac{df_2}{dx}(f_1 \cdot f_3 \dots f_n) + \dots + \frac{df_n}{dx}(f_1 \cdot f_2 \dots f_{n-1}) \\ (f_1 \cdot f_2 \dots f_n)' &= f_1'(f_2 \dots f_n) + f_2'(f_1 \cdot f_3 \dots f_n) + \dots + f_n'(f_1 \cdot f_2 \dots f_{n-1})\end{aligned}$$

² $f(x) = c \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0$

6) (Bölümün Türevi) Eğer $f(x), g(x)$ fonksiyonları diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2} \vee \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Örnek 15.2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1) $f(x) = 8$

4) $f(x) = 3x^5 - 2x^{3/2} + \frac{4}{7}x^2 - 12x + 1 - x^{-2}$

7) $y = (f(x))^2$

10) $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

13) $y = f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)$

2) $f(x) = -\frac{\pi}{2}$

5) $f(x) = x^4 - \frac{12}{x^2}$

8) $y = (f(x))^3$

11) $y = f(x) = \frac{x(x^5+7)}{x^{3/2}}$

14) $y = f(\theta) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

3) $f(x) = \sqrt{3}$

6) $f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

9) $y = (f(x))^n$

12) $y = f(x) = \left(\frac{1+x}{x}\right)(1-x)$

15) $y = f(t) = \frac{t^3+7}{t}$

Çözüm 1)

$$f(x) = 8 \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(8) = 0$$

2)

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

3)

$$f(x) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{3}) = 0$$

4)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 - 2x^{3/2} + \frac{4}{7}x^2 - 12x + 1 - x^{-2} \Rightarrow \\ \frac{df}{dx} &= 15x^4 - 3x^{1/2} + \frac{8}{7}x - 12 + 2x^{-3} \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - \frac{12}{x^2} \Rightarrow \\ \frac{df}{dx} &= 4x^3 + \frac{24}{x^3} \end{aligned}$$

6) 1.yol: Çarpımın Türevi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) = x^{-1} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \\ \frac{df}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

2.Yol: Bölümün Türevi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)}{x} \Rightarrow \\ \frac{df}{dx} &= \frac{\left(2x - \frac{1}{x^2} \right) x - \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)}{x^2} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

3.Yol: Sadeleştir ve Türev Al

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \\ \frac{df}{dx} &= 1 - \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

7)

$$y = (f(x))^2 \Rightarrow y = f(x) \cdot f(x) \Rightarrow y' = f' \cdot f + f \cdot f' \Rightarrow y' = 2f \cdot f'$$

8)

$$\begin{aligned} y &= (f(x))^3 \Rightarrow y = f^2(x) \cdot f(x) \Rightarrow y' = (f^2(x))' \cdot f(x) + f^2(x) f'(x) \Rightarrow \\ y' &= 2f(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f^2(x) f'(x) \Rightarrow \\ y' &= 3f^2(x) f'(x) \end{aligned}$$

9)

$$y = (f(x))^n \Rightarrow y' = n f^{n-1}(x) f'(x)$$

10)

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2} \Rightarrow y' = \frac{2x(x + 2) - (x^2 + 1)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}$$

11)

$$y = f(x) = \frac{x(x^5 + 7)}{x^{3/2}} = \frac{x^5 + 7}{x^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{5x^4 \cdot x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}(x^5 + 7)}{x}$$

12)

$$y = f(x) = \left(\frac{1+x}{x}\right)(1-x) = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} - 1$$

13)

$$y = f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx} = 2x(x^3 + 2) + 3x^2(x^2 + 1) = 5x^4 + 3x^2 + 4x$$

14)

$$y = f(\theta) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right) = 2(\theta^{-1/2} + \theta^{1/2}) \Rightarrow$$

$$\frac{df}{d\theta} = 2\left(-\frac{1}{2}\theta^{-3/2} + \frac{1}{2}\theta^{-1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{1}{\theta\sqrt{\theta}}$$

15)

$$y = f(t) = \frac{t^3 + 7}{t} = t^2 + \frac{7}{t} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dt} = 2t - \frac{7}{t^2}$$

□

Teorem 15.3. (Ters Fonksiyonun Türevi) Eğer $f(x)$ fonksiyonu birebir, örten ve $x = x_0$ noktasında diferansiyellenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Örnek 15.4. $f(x) = x^5 + x$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(2)$ türevini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
y_0 &= 2 \Rightarrow x^5 + x = 2 \Rightarrow x = 1 = x_0 \\
(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(1)} \\
f'(x) &= 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(1) = 6 \Rightarrow \\
(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

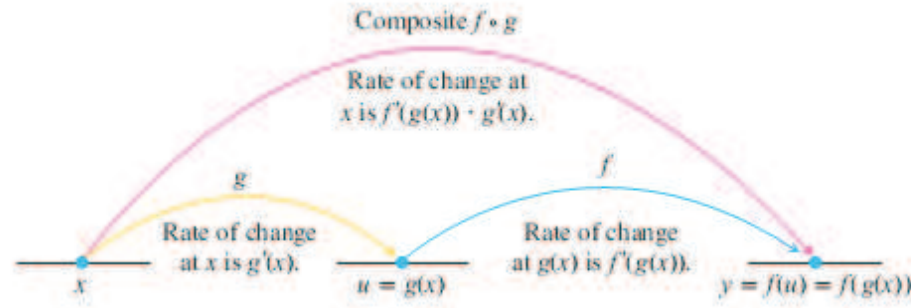
□

Teorem 15.5. (Zincir Kuralı) Eğer $g(x)$ fonksiyonu x de diferansiyellenebilir ve $f(u)$ fonksiyonu da $u = g(x)$ de diferansiyellenebilir ise $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu da x de diferansiyellenebilirdir ve

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

veya Leibnitz gösterimi ile $u = g(x)$, $y = f(u)$ ile gösterirsek:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$



Örnek 15.6. Aşağıdaki fonksiyonların türevini zincir kuralından faydalananarak çözünüz.

(a) $y = (5x^3 - x^4)^7$

(b) $y = \frac{1}{3x-2}$

(c) $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}$, $u = g(x) = 10x^2 + x + 1 \Rightarrow (f \circ g)'(x) = ?$

(d) $f(x) = x^2$, $g(y) = \frac{\pi}{6}y^2 + y - 1$, $h(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+z+1}} \Rightarrow (f \circ g \circ h)'(x) = ?$

Çözüm (a)

$$\begin{aligned}
 u &= 5x^3 - x^4 \Rightarrow y = u^7 \Rightarrow \\
 \frac{dy}{du} &= 7u^6, \frac{du}{dx} = 15x^2 - 4x^3 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 7u^6 (15x^2 - 4x^3) \\
 &= 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3)
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 u &= 3x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{u} \Rightarrow \\
 \frac{dy}{du} &= -\frac{1}{u^2}, \frac{du}{dx} = 3 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} \cdot 3 \\
 &= -\frac{3}{(3x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \frac{2u}{u^2 + 1}, u = g(x) = 10x^2 + x + 1 \Rightarrow \\
 \frac{df}{du} &= -2 \frac{u^2 - 1}{(u^2 + 1)^2}, \frac{du}{dx} = 20x + 1 \\
 (f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) g'(x) \\
 &= -2 \frac{(10x^2 + x + 1)^2 - 1}{((10x^2 + x + 1)^2 + 1)^2} \cdot (20x + 1)
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2, g(y) = \frac{\pi}{6}y^2 + y - 1, h(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + z + 1}} \Rightarrow \\
\frac{df}{dx} &= 2x, \frac{dg}{dy} = \frac{\pi}{3}y + 1, \frac{dh}{dz} = -\frac{1}{2} \frac{2z + 1}{(z^2 + z + 1)^{\frac{3}{2}}} \\
(f \circ g \circ h)'(x) &= f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x) \\
g(h(x)) &= \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - 1 \\
(f \circ g \circ h)'(x) &= f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x) \\
&= 2 \left(\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + 1 \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

□

Örnek 15.7. f, g diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Buna göre aşağıda tabloda verilenlere göre $(f \circ g)'(x), (g \circ f)'(x)$ türevlerinin $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$ noktalarındaki değerlerini bulunuz.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-1	1	2	0	-1
0	2	-1	2	0
1	1	2	-1	-1
2	0	1	1	2

Çözüm

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) g'(x) \Rightarrow \\
(f \circ g)'(-1) &= f'(g(-1)) g'(-1) = f'(2) (-1) = 1 \cdot (-1) = -1 \\
(f \circ g)'(0) &= f'(g(0)) g'(0) = f'(-1) \cdot 0 = 0 \\
(f \circ g)'(1) &= f'(g(1)) g'(1) = f'(2) (-1) = -1 \\
(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) f'(x) \Rightarrow \\
(g \circ f)'(-1) &= g'(f(-1)) f'(-1) = g'(1) \cdot 0 = 0 \\
(g \circ f)'(0) &= g'(f(0)) f'(0) = g'(2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \\
(g \circ f)'(1) &= g'(f(1)) f'(1) = g'(-1) \cdot (-1) = (-1) (-1) \\
(g \circ f)'(2) &= g'(f(2)) f'(2) = g'(0) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$



Tanım 15.8. Eğer $f'(x)$ türev fonksiyonu diferansiyellenebilir ise

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{df'}{dx} = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)$$

fonksiyonuna $y = f(x)$ fonksiyonunun 2.mertebeden türevi denir. 2. türev, fonksiyonun tanjant doğrusunun eğimini verir. Ayrıca bir sonraki bölümde, 2. türevin eğrinin konveks ve konkavlığının belirlenmesinde önemli bir rol oynadığını göreceğiz. Benzer şekilde eğer $f''(x)$ türev fonksiyonu diferansiyellenebilir ise

$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{df''}{dx} = D^3(f)(x) = D_x^3 f(x)$$

fonksiyonuna $y = f(x)$ fonksiyonunun 3.mertebeden türevi denir. Ve genelleme yaparsak

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{df^{(n-1)}}{dx} = D^n(f)(x) = D_x^n f(x)$$

fonksiyonuna $y = f(x)$ fonksiyonunun n .mertebeden türevi denir.

Örnek 15.9. $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun n . mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \\ y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \\ y''' &= \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4} \\ y^{(4)} &= \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{2.3.4}{x^5} \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= (-1)^n \frac{1.2.3...n}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

4.türevden sonrası hep sıfır olacaktır.



Örnek 15.10. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ fonksiyonunun ilk 4. mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x \\
y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 \\
y''' &= \frac{d^3y}{dx^3} = 6 \\
y^{(4)} &= \frac{d^4y}{dx^4} = 0
\end{aligned}$$

4.türevden sonrası hep sıfır olacaktır. □

16. Trigonometrik - Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Aşağıda Trigonometrik fonksiyonların türevi özellikler halinde verilip ispatları verilmeyecektir.

Teorem 16.1.

- (1) $y = f(x) = \sin x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \cos x$ (Açıklama)³
- (2) $y = f(x) = \cos x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\sin x$
- (3) $y = f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, x \neq (2n+1)\pi/2$
- (4) $y = f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -1 - \cot^2 x, x \neq n\pi$
- (5) $y = f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x, x \neq (2n+1)\pi/2$
- (6) $y = f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} = \cot x \csc x, x \neq n\pi$

Ters fonksiyonların türevlerini Teorem 15.3'in özelliğinden $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$ şeklinde elde ederiz. Aşağıda Ters Trigonometrik fonksiyonların türevi özellikler halinde verilip ispatları verilmeyecektir.

Teorem 16.2.

$$\begin{aligned}
&^3 \sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x \Rightarrow \\
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{=1} \cdot \cos x \\
&= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}) - 1}{h} + \cos x \\
&= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{=1} \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\sin \frac{h}{2}}_{=0} + \cos x = \cos x
\end{aligned}$$

- (1) $y = f(x) = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$ (**Açıklama**)⁴
 (2) $y = f(x) = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$
 (3) $y = f(x) = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$
 (4) $y = f(x) = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$
 (5) $y = f(x) = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
 (6) $y = f(x) = \operatorname{arccsc} x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

Örnek 16.3. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

- 1) $y = \sin(3x) + \cos(x^2 + 1)$ 2) $y = \tan^3 x + \sin(3x^2)$
 3) $y = (\tan \sqrt{x})^5$ 4) $y = (\sec 6x)^{3/2}$
 5) $y = \arctan \frac{1}{x}$ 6) $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
 7) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$ 8) $y = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcsec} x$
 9) $y = \cot x \csc x$ 10) $y = \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{x^2} \right)$

Çözüm 1)

$$y = \sin 3x + \cos(x^2 + 1) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 3 \cos(3x) - 2x \sin(x^2 + 1)$$

2)

$$y = \tan^3 x + \sin(3x^2) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 3 \tan^2 x \sec^2 x + 6x \cos(3x^2)$$

3)

$$y = (\tan \sqrt{x})^5 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 5 (\tan \sqrt{x})^4 \sec^2 \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4)

$$\begin{aligned} y &= (\sec 6x)^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} (\sec 6x)^{1/2} (\tan 6x \sec 6x) 6 \\ &= 9 \tan 6x (\sec 6x)^{3/2} \end{aligned}$$

⁴ $y = f(x) = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y \Rightarrow$
 $y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$

5)

$$\begin{aligned}
 y &= \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
 &= -\frac{1}{1 + x^2}
 \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
 y &= x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{2} (1 - x^2)^{-1/2} (-2x) \\
 &= \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arccos x
 \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}
 y &= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \Rightarrow \\
 y' &= \frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - x^2} + x \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-1/2} (-2x) + a^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} \\
 &= \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &= \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}
 \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcsec} x \Rightarrow \\
 y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{-1/2} 2x - \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}
 y &= \cot x \csc x \Rightarrow \\
 y' &= \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x \csc x + \cot x \cot x \csc x \\
 &= -\csc^3 x + \cot^2 x \csc x
 \end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{x^2} \right) \Rightarrow \\
y' &= \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2} \right)^2} (-2x^{-3}) \\
&= \frac{2x}{x^4 + 1}
\end{aligned}$$

□

17. Logaritma, Üstel, Hiperbolik ve Ters Hiperbolik Fonksiyonlarının Türevi

Logaritma ve Üstel Fonksiyonların türevi aşağıdaki şekilde verilir:

Teorem 17.1.

- (1) $y = f(x) = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$ (**Açıklama**)⁵
- (2) $y = f(x) = \ln x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$
- (3) $y = f(x) = a^x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = a^x \ln a$ (**Açıklama**)⁶
- (4) $y = f(x) = e^x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = e^x$
- (5) $y = (f(x))^{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x) \right)$ (**Açıklama**)⁷

Hiperbolik Fonksiyonların türevleri aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned}
&\overset{5}{y} = f(x) = \log_a x \Rightarrow y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \Rightarrow \\
&y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{\frac{h}{x}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{\frac{h}{x} \cdot x} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)}{\frac{h}{x}} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \log_a \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{h}{x}}}_{=e} \\
&= \frac{1}{x} \log_a e \\
&\overset{6}{y} = f(x) = a^x \Rightarrow x = \log_a y \Rightarrow \\
&(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = y \log_e a = a^x \ln a \\
&\overset{7}{y} = (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln(f(x)) \Rightarrow \\
&\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x) \Rightarrow \\
&y' = y \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x) \right) \Rightarrow \\
&y' = (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x) \right)
\end{aligned}$$

Teorem 17.2.

- (1) $y = f(x) = \cosh x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \sinh x$ (**Açıklama**)⁸
- (2) $y = f(x) = \sinh x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \cosh x$
- (3) $y = f(x) = \tanh x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \sec^2 x$
- (4) $y = f(x) = \coth x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\csc^2 x$
- (5) $y = f(x) = \sec hx \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\sec hx \tanh x$
- (6) $y = f(x) = \csc hx \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\csc hx \coth x$

Ters Hiperbolik Fonksiyonların türevleri aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 17.3.

- (1) $y = f(x) = \arccos hx \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$ (**Açıklama**)⁹
- (2) $y = f(x) = \arcsin hx \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- (3) $y = f(x) = \arctan hx \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{x^2+1}, |x| < 1$
- (4) $y = f(x) = \operatorname{arccoth} x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, x > 1$
- (5) $y = f(x) = \operatorname{arcsech} x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$
- (6) $y = f(x) = \operatorname{arccsch} x \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x > 0$

Örnek 17.4. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1) $y = \log_3(5x^2 + 1)$ | 2) $y = \ln(\cos x)$ |
| 3) $y = e^{3x^2+6x}$ | 4) $y = 2^{\cos(5x)}$ |
| 5) $y = (1+x^2)^x$ | 6) $y = x^{\sin x}$ |
| 7) $y = \cosh(\ln x)$ | 8) $y = \arctan(\tanh x)$ |
| 9) $y = \ln(\sinh 3x) - \ln(\cosh 3x)$ | 10) $y = \arcsin h(\tan x)$ |
| 11) $y = x^2 \operatorname{arcsech}(x^2)$ | 12) $y = (1-x) \arctan hx$ |

Çözüm 1)

$$y = \log_3(5x^2 + 1) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{10x}{5x^2 + 1} \log_3 e$$

⁸ $y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

⁹ $y = f(x) = \arccos hx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \Rightarrow$

$y' = \frac{df}{dx} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2} 2x}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

2)

$$\begin{aligned} y &= \ln(\cos x) \Rightarrow \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \end{aligned}$$

3)

$$y = e^{3x^2+6x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = (6x+6)e^{3x^2+6x}$$

4)

$$y = 2^{\cos(5x)} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -5 \sin(5x) 2^{\cos(5x)} \ln 2$$

5)

$$\begin{aligned} y &= (1+x^2)^x \Rightarrow \ln y = \ln(1+x^2)^x \Rightarrow \\ \ln y &= x \ln(1+x^2) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(1+x^2) + x \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \\ y' &= y \left(\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} \right) \\ &= (1+x^2)^x \left(\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} \right) \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} y &= x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x \Rightarrow \\ \frac{y'}{y} &= \cos x \ln x' + \sin x \frac{1}{x} \Rightarrow \\ y' &= y \left(\cos x \ln x' + \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x' + \frac{\sin x}{x} \right) \end{aligned}$$

7)

$$y = \cosh(\ln x) \Rightarrow y' = \sinh(\ln x) \frac{1}{x}$$

8)

$$y = \arctan(\tanh x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+\tanh^2 x} \sec^2 x$$

9)

$$\begin{aligned}
y &= \ln(\sinh 3x) - \ln(\cosh 3x) \Rightarrow \\
y' &= \frac{3 \cosh 3x}{\sinh 3x} - \frac{3 \sinh 3x}{\cosh 3x} = \frac{3(\cosh^2 3x - \sinh^2 3x)}{\sinh 3x \cosh 3x} \\
&= \frac{3}{\sinh 3x \cosh 3x} = \frac{3}{\frac{1}{2} \sinh 6x} = \frac{6}{\sinh 6x}
\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin h(\tan x) \Rightarrow \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x + 1}} (1 + \tan^2 x) = \sqrt{\tan^2 x + 1}
\end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned}
y &= x^2 \operatorname{arcsech}(x^2) \Rightarrow \\
y' &= 2x \operatorname{arcsech}(x^2) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^4}} \right) 2x \\
&= 2x \operatorname{arcsech}(x^2) - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}
\end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned}
y &= (1-x) \arctan hx \Rightarrow \\
y' &= -\arctan hx + (1-x) \frac{1}{x^2-1} \\
&= -\arctan hx - \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

□

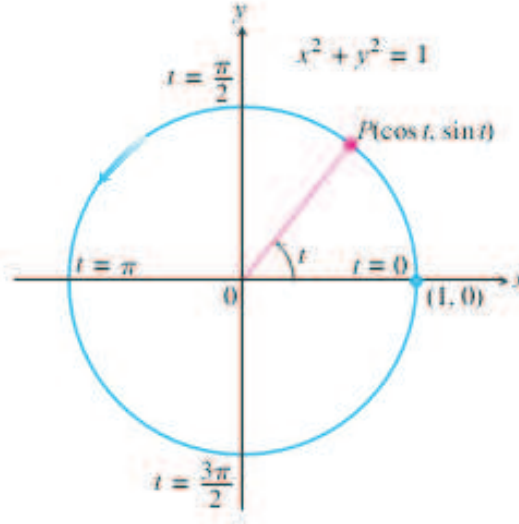
18. Parametrik Denklemleri Verilen Fonksiyonların Türevi

Tanım 18.1. Eğer x ve y

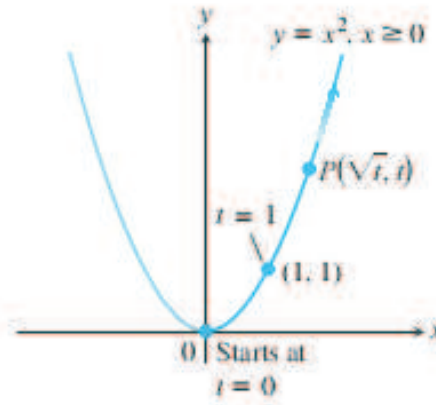
$$x = f(t), y = g(t)$$

ile veriliyor ise $(x, y) = (f(t), g(t))$ noktaları parametrik bir eğri tanımlar. Eğrinin bu denkleme parametrik denklem denir. t değerine de parametre denir. Eğer $a \leq t \leq b$ ise $(f(a), g(a))$ noktası parametrik eğrinin başlangıç noktası, $(f(b), g(b))$ noktası da bitiş noktasıdır.

Örnek 18.2. $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ parametrik eğrisi için $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ olması sebebiyle birim çemberi tanımlar. Başlangıç noktası $(1, 0)$ noktası olup saat yönünün tersine doğru grafik çizilir.



Örnek 18.3. $x = \sqrt{t}, y = t, 0 \leq t$ parametrik eğrisi için $y = t = x^2$ olması sebebiyle parabol eğrisini tanımlar.



Örnek 18.4. $(-2, 1), (3, 5)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik gösterimini bulunuz.

Çözüm $(-2, 1)$ noktasını kullanarak parametrik denklemleri yazalım:

$$\begin{aligned} x &= -2 + at, y = 1 + bt, 0 \leq t \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{x + 2}{a} &= \frac{y - 1}{b} \end{aligned}$$

a, b değerlerini tanımlamak için de $(3, 5)$ noktasını kullanalım: $t = 1$ değeri için $(3, 5)$ noktasını aldığımızdan

$$3 = -2 + a \Rightarrow a = 5$$

$$5 = 1 + b \Rightarrow b = 4$$

o halde parametrik eğriyi $x = -2 + 5t, y = 1 + 4t, 0 \leq t \leq 1$ ile ifade ederiz. □

Teorem 18.5. (Parametrik Türev Formülü) Eğer $x = f(t), y = g(t)$ fonksiyonları t değişkenine göre diferansiyellenebilir ve $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ise y fonksiyonu x e göre de diferansiyellenebilir ve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

ile verilir.

Örnek 18.6. $x = 2t + 3, y = t^2 - 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini hesaplayınız.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x - 3}{2}$$

Örnek 18.7. $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ ile verilen elipsin $t = \pi/4$ noktasında tanjant doğrusunu bulunuz.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\pi/4} &= \frac{b \cos t}{-a \sin t} \Big|_{t=\pi/4} = \frac{b\sqrt{2}/2}{-a\sqrt{2}/2} = -\frac{b}{a} \\ x(\pi/4) &= \frac{a\sqrt{2}}{2}, y(\pi/4) = \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ y - \frac{b\sqrt{2}}{2} &= -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \\ y &= \frac{b\sqrt{2}}{2} - \frac{b}{a} \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Teorem 18.8. (Parametrik 2.Türev Formülü) Eğer $x = f(t), y = g(t)$ fonksiyonları t değişkenine göre 2 kez diferansiyellenebilir ve $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ise y fonksiyonu x e göre de 2 kez diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Örnek 18.9. $x = t - t^2, y = t - t^3$ ile parametrik eğrinin $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini bulunuz.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t} \Rightarrow \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{1-3t^2}{1-2t} \right)}{1 - 2t} = \frac{\frac{-6t(1-2t) + 2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1 - 2t} \\ &= \frac{6t^2 - 6t + 2}{(1 - 2t)^3} \end{aligned}$$

19. Kapalı Fonksiyonların Türevi

Şu ana kadar fonksiyonları $y = f(x)$ formunda gösterdik ki y fonksiyonu x değişkeni tarafından açık bir şekilde tanımlanmıştır. Ve bu türlü verilen fonksiyonlar için diferansiyellenebilme kurallarını tanımladık. Ayrıca bir önceki bölümde eğrilerin parametrik olarak da tanımlanabildiğini gördük. Bu bölümde ise 3.tip fonksiyonlardan bahsedeceğiz. $F(x, y) = 0$ formülü ile verilen fonksiyonlara kapalı fonksiyonlar denir. Örneğin $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $x^3 + y^3 - 9xy = 0$, $x \sin(x + y) = 2$, $\frac{y^2 + 3xy}{y+1} = 3x$ şeklinde verilen fonksiyonların hepsi kapalı fonksiyonlardır. Bu türlü fonksiyonlar için de $\frac{dy}{dx}$ türevinden bahsedebiliriz ve türev için aşağıdaki kuralları takip edeceğiz.

- (1) Denklemin iki taraftan da x değişkenine göre türevini alalım. (y fonksiyonunun x e göre türevi vardır)
- (2) $\frac{dy}{dx}$ terimlerini bir araya getirelim.
- (3) $\frac{dy}{dx}$ terimini yalnız bırakalım (çözüm yapalım)

Örnek 19.1. $y^2 = x$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ türevini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} y^2 &= x \Rightarrow \frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (x) \\ \left[\frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (f(x)^2) = 2f(x) f'(x) = 2y \cdot y' \right] \\ 2y \cdot y' &= 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y} = \pm \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

□

Örnek 19.2. $y^2 = x^2 + \sin(xy)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ türevini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 y^2 &= x^2 + \sin(xy) \Rightarrow \\
 \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin(xy)) \rightarrow \text{her iki taraftan } x \text{ e göre türev al} \\
 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 2x + \cos(xy) \frac{dy}{dx}(xy) \rightarrow y \text{ ye fonksiyon gibi davran ve zincir kuralını uygula} \\
 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 2x + \cos(xy) \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) \Rightarrow \\
 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 2x + y \cos(xy) + xy \cos(xy) \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \text{ terimlerini aynı tarafta topla} \\
 (2y - xy \cos(xy)) \frac{dy}{dx} &= 2x + y \cos(xy) \Rightarrow \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{2x + y \cos(xy)}{2y - xy \cos(xy)}
 \end{aligned}$$

□

Örnek 19.3. $(2, 4)$ noktası $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi üzerindedir. Bu noktadan geçen tanjant ve normal doğrularını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 - 9xy &= 0 \Rightarrow \\
 \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) &= \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow \\
 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 9y - 9x \cdot y' &= 0 \Rightarrow \\
 (3y^2 - 9x) y' &= 9y - 3x^2 \Rightarrow \\
 y' &= \frac{9y - 3x^2}{3y^2 - 9x} \Rightarrow \\
 m &= y'|_{(2,4)} = \frac{9 * 4 - 3 * 2^2}{3 * 4^2 - 9 * 2} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

O halde tanjant doğrusu

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x - 2)$$

ve normal doğrusunun eğimi $\frac{-1}{m} = -\frac{5}{4}$ olduğundan

$$y - 4 = -\frac{5}{4}(x - 2)$$

de normal doğrusudur. □

Örnek 19.4. $2x^3 - 3y^2 = 8$ kapalı formada verilen eğri için $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3y^2 &= 8 \Rightarrow \\ \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) &= \frac{d}{dx}(8) \Rightarrow \\ 6x^2 - 6y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \Rightarrow \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) - \text{bölümün türevi} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2xy - x^2\frac{x^2}{y}}{y^2} \\ &= -\frac{1}{y^3}(x^4 - 2xy^2) \end{aligned}$$

□

20. Değişimin Oranı Olarak Türev

Daha önceki bölümlerde f fonksiyonunun x noktasından $x + h$ noktasına kadar olan ortalama değişim oranını

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ile ifade etmiştik. x noktasındaki anlık değişim ise bu oranın limit değeri yani türev idi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Türev ifadesinden yararlanarak hız, sürat, ivme ve sarsılma tanımlarını verelim:

Tanım 20.1. Bir nesnenin t zamanı boyunca yer değiştirmesini $s = f(t)$ ile verelim. Buna göre t zamanından $t + \Delta t$ zamanına kadar olan ortalama hız

$$v_{av} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

anlık hız (velocity)

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

sürat (speed)

$$|v(t)| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right|$$

ivme (Acceleration)

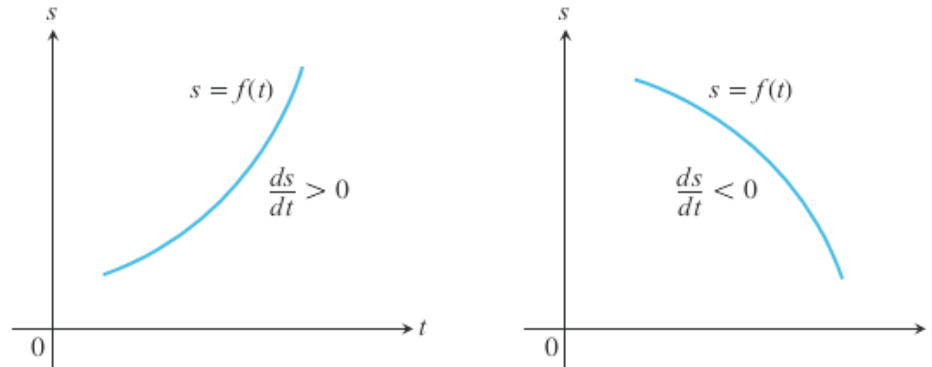
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

sarsılma (jerk)

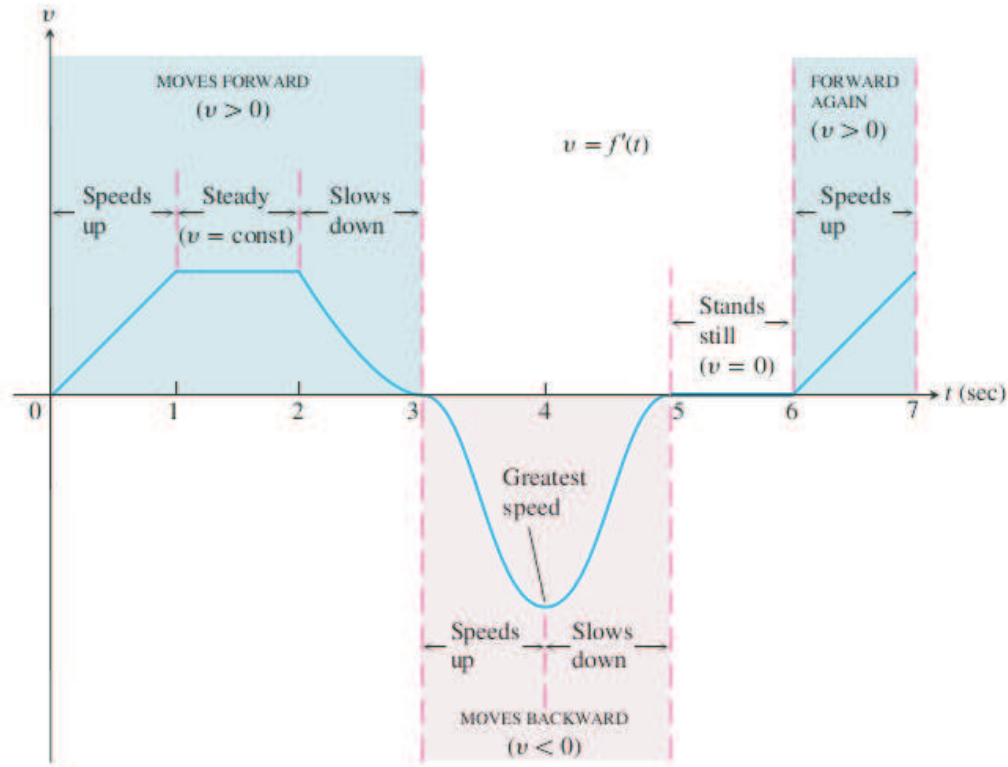
$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

ile ifade edilir.

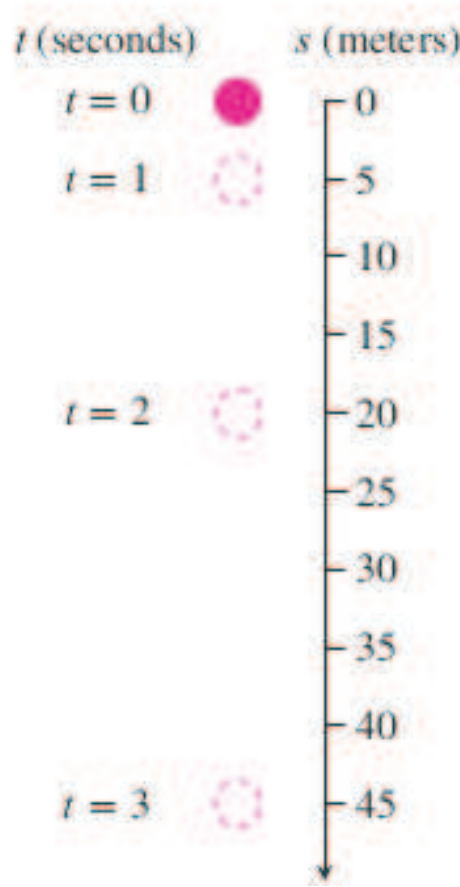
Örnek 20.2. Aşağıda yer değiştirme grafiği verilen objenin hareket yönü, 1. grafikte $v = \frac{ds}{dt} > 0$ olduğundan ileriye doğru hareket etmektedir. 2.grafikte ise $v = \frac{ds}{dt} < 0$ olduğundan geriye doğru hareket etmektedir.



Örnek 20.3. Aşağıdaki grafikte bir hareketlinin hız/zaman grafiği verilmektedir. Buna göre $t = 1$ saniyeye kadar nesne hızlanmaktadır. $t = 1$ ve $t = 2$ saniyeleri arası sabit hızla devam etmektedir. $t = 2$ ve $t = 3$ saniyeleri arası yavaşlamaktadır. $t = 3$ ve $t = 4$ saniyeleri arası geriye doğru hızlanmaktadır ve $t = 4$ ve $t = 5$ saniyeleri arası geriye doğru yavaşlamaktadır. Yine $t = 5$ ve $t = 6$ saniyeleri arası sabit hızla devam ederken $t = 6$ ve $t = 7$ saniyeleri arası ileri yönde ızlanmaya başlamaktadır.



Örnek 20.4. Galileo'nun serbest düşme kuramına $s = \frac{1}{2}gt^2$ yer değiştirmeyi vermektedir. Burada g yerçekimi ivmesi $g = 9.8\text{m/s}^2$, olarak alınmaktadır. Buna göre hız $v = gt$, ivme $a = g$ ve sarsılma da $j = 0$ olarak elde edilir. Yani serbest düşen bir nesnenin aksi belirtilmedikçe sarılması yok sayılır. Buna göre şekilde şekilde de gösterildiği üzere ağır bir top serbest düşme hareketi yapmaktadır. Buna göre ilk 2 saniyede aldığı yol, hız, sürat ve ivme nedir?



$$s = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9t^2 \Rightarrow s = 4.9 * 2^2 = 19.6 \text{ metre}$$

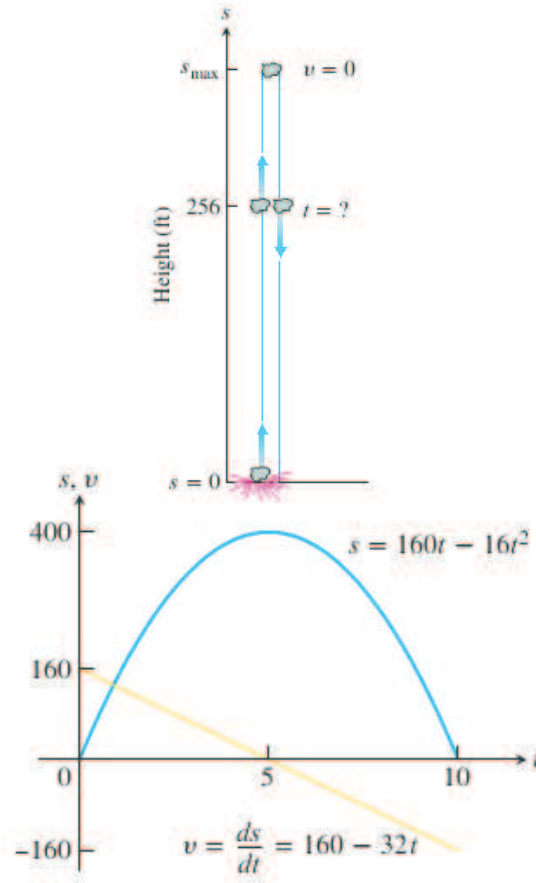
$$v = gt = 9.8 * 2 = 19.6 \text{ m/s}$$

$$\text{sürat} = 19.6 \text{ m/s}$$

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Örnek 20.5. Bir dinamit 160 ft/s başlangıç hızla patladıktan sonra bir kayayı t saniye sonra $s = 160t - 16t^2$ yüksekliğe ulaşmaktadır. Buna göre (a) Kaya ne kadar yükseğe çıkar? (b) Kaya 256 ft yükseliğe ulaştığında hız, sürat nedir? (c) Herhangi bir zamandaki ivme nedir? (d) Kaya ne zaman yere çarpar?

3. TÜREV



(a) Kayanın en yükseğe çıktığı an, kayanın hızının sıfır olduğu andır. Buna göre

$$v = \frac{ds}{dt} = 160 - 32t = 0 \Rightarrow t = 5s \Rightarrow$$

$$s(5) = 160 * 5 - 16 * 5^2 = 400ft$$

(b) 256 ft hangi zamanda olduğunu bulalım:

$$160t - 16t^2 = 256 \Rightarrow 16t^2 - 160t + 256 = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$(t - 2)(t - 8) = 0 \Rightarrow t = 2s, t = 8s \Rightarrow$$

$$v(2) = 160 - 32 * 2 = 96ft/s, \text{ kaya yukarı doğru hareket ediyor}$$

$$v(8) = 160 - 32 * 8 = -96ft/s \text{ kaya aşağı doğru hareket ediyor}$$

$$\text{hız} = 96ft/s$$

(c)

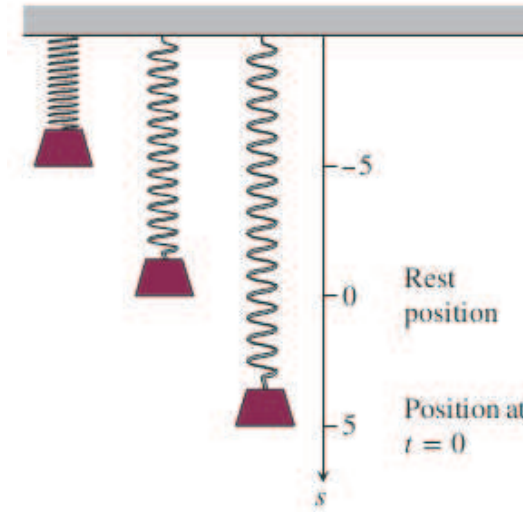
$$a = \frac{dv}{dt} = -32ft/s^2$$

(d) Kayanın yere vurduğu an $s = 0$ denklemi ile çözülür. Yani

$$s = 160t - 16t^2 = 0 \Rightarrow 16t(10 - t) = 0 \Rightarrow t = 0s, t = 10s$$

Böylece $t = 10s$ sonra kaya tekrar yere düşecektir.

Örnek 20.6. Bir cisim bir yaya bağlanarak 5 birim kadar çekilerek salınım hareketi yaptırılıyor. Herhangi bir zamanda ki yerdeğiştirmesi $s = 5 \cos t$ olarak verildiğine göre herhangi bir zamandaki hız ve izmesi nedir?



$$s = 5 \cos t \Rightarrow$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -5 \sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -5 \cos t$$

Buna göre çıkarılacak sonuçlar şöyledir:

1) Hareketin genliği 5 hareketin periyodu 2π dir.2) $|v| = 5 |\sin t|$ sürat değerini en çok $t = \pi/2$ de alır ki $s = 0$ olduğu başlangıç yeridir.

3) İvme, hareketin her zaman ters yönünde hareket eder. Cisim yukarıya doğru hareket ederken yerçekimi ivmesi onu aşağıya doğru çekmeye zorlarken, cisim aşağı yönde hareket ederken bu seferde yay onu geri çekmeye çalışmaktadır.

Örnek 20.7. Türevin ekonomiye de uygulaması mevcuttur. Ekonomide $c(x)$ ile maliyet fonksiyonunu göstermek üzere (x —birim üretim sayısını gösterir) en düşük maliyeti $\frac{dc}{dx}$ türevi ile hesaplarız. Ekonomistler genel olarak maliyet fonksiyonunu $c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ kübik polinomu ile verirler. Buna göre x radyatör satıldığında maliyet $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ dolar ve gelir de $r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ dolar olarak verilmektedir. Radyatör dükkanında günde 10 radyatör satılmaktadır. Buna göre 1 radyatör daha fazla üretim en düşük olarak ne kadara mal olur ve bir günde 11 radyatör satılması durumunda gelir ne kadar artar.

Öncelikle en düşük maliyeti hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dx} &= 3x^2 - 12x + 15 \Rightarrow \\ c'(10) &= 3 * 10^2 - 12 * 10 + 15 = \$195\end{aligned}$$

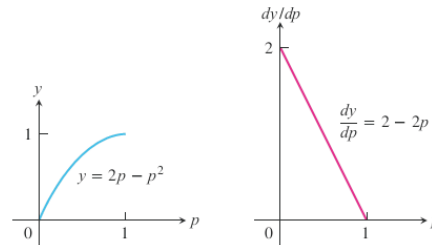
ve gelir artışı ise

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dx} &= 3x^2 - 6x + 12 \Rightarrow \\ r'(10) &= 3 * 10^2 - 6 * 10 + 12 = \$252\end{aligned}$$

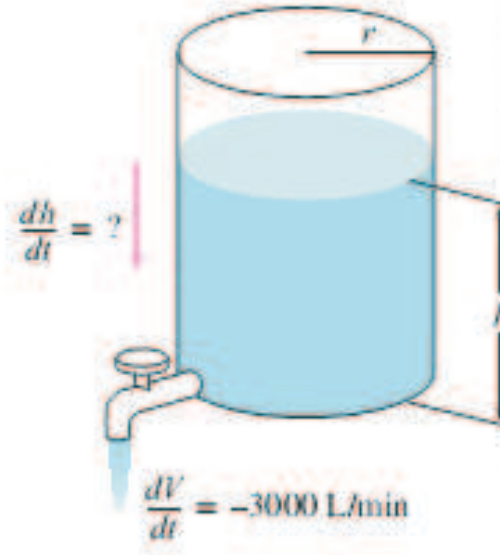
Örnek 20.8. Avusturyalı keşiş Gregor Johann Mendel (1822–1884), melezleme yönteminin ilk bilimsel çalışmalarını yapan kişi olarak bezelye tanelerinde pürüzsüz bezelye tanelerindeki genin frekansını p ($0 - 1$ arasında) ile göstermiş ve buruşuk bezelyelerin geninin frekansını da $1 - p$ ile göstermiştir. Melezleme yöntemi ile bir sonraki üretim bezelyelerinin pürüzsüz olması için gerekli oranı

$$y = 2p - p^2$$

olarak elde etmiştir. Ve p nin 0'a yakın değerlerinde y değerlerinde daha fazla hassaslık mevcut olurken 1'e yakın değerlerde bu hassaslık azalmaktadır. Bu gerçek ise fonksiyonun türevinden kaynaklanmaktadır. Çünkü fonksiyonun türevi $p = 0$ da 2 değerini alırken $p = 1$ de 0 değerini alır.



Örnek 20.9. Şekildeki verildiği gibi bir silindir tankın içerisine bir sıvı konmaktır ve altına da bir vana takılmıştır. Vananın, silindirin içindeki sıvıyı boşaltma oranı dakikada 3000L/d dır. Buna göre sıvının seviyesi, ne kadar hızla aşağı inmektedir.



$V \rightarrow$ Sıvının hacmi

$h \rightarrow$ Sıvının yüksekliği

olsun. t zamanı değiştikçe V ve h değerlerinde değişim meydana gelmektedir. Bu değişim soruda

$$\frac{dV}{dt} = -3000 \text{ L/d}$$

olarak verilmiştir. h daki değişimi yani dh/dt oranını sormaktadır. Öncelikle V ile h arasında bir bağıntı bulmalıyız. $1\text{m}^3 = 1000\text{L}$ olması sebebi ile silindirin içindeki sıvının hacmini

$$V = 1000 \underbrace{\pi r^2 h}_{\text{boş silindiri hacmi}}$$

olarak veririz. Böylece her iki taraftan da türev alırsak

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt} = -3000 \text{ L/d} \Rightarrow \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{\pi r^2} \end{aligned}$$

Böylece sıvının yüksekliğindeki değişim oranı $-\frac{3}{\pi r^2} \text{ m/d}$ dır Yani

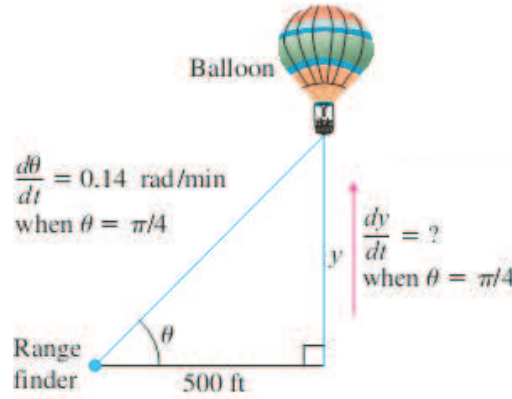
$$r = 1\text{m} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} = -0.95493$$

Dakikada -0.95493 metre veya -95.493 santimetredir.

$$r = 10m \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi * 100} = -9.5493 \times 10^{-3}$$

Dakikada -9.5493×10^{-3} metre veya $-9.5493 \times 10^{-1} = -0.95493$ santimetredir. Yani silindirin yarıçapı arttıkça suyun boşalma yüksekliği azalmaktadır.

Örnek 20.10. Bir sıcak hava balonu belli bir noktadan yükselişe geçmektedir. Yükseldiği noktadan bir gözlemci baktığında 500ft ileriye gitmiştir ve açısı da $\pi/4$ olarak hesaplamıştır. Yükselme açısı dakikada 0.14rad/d olarak ölçüldüğüne göre $\pi/4$ açısında iken yükselme hızını bulunuz.



Öncelikle verilenleri bir gözden geçirelim:

θ açısı gözlemcinin balon ile arasındaki mesafenin çizmiş olduğu açı (değişken zamana göre)

y balonun yerden yüksekliği (değişken zamana göre)

t zaman

500ft, $\pi/4$ açısında iken balonun ileri yönde almış olduğu mesafe (sabit)

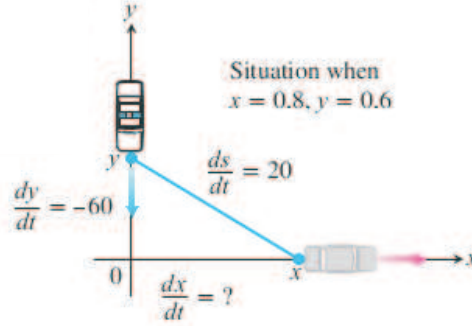
$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14, \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = ?$$

$$\tan \theta = \frac{y}{500} \Rightarrow y = 500 \tan \theta \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = 500 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}, \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = 500 * \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) * 0.14 = 140 \text{ ft/d}$$

Örnek 20.11. Bir polis aracı sağ yönlü bir kavşağa doğru kuzey yönünden yaklaşırken, bir suçlu arabası doğu yönünde kavşaktan uzaklaşmaktadır. Polis aracının kavşağa uzaklığı 0.6mil iken suçlu arabasının kavşaktan uzaklığı 0.8mildir. Polis, aracı ile suçlu arabasının aracı arasındaki mesafeyi dakikada 20km hızla alınacağını ölçmüştür. Polis aracı dakikada 60km hız yapıyorsa suçlu aracının hızı nedir?



$x \rightarrow$ suçlu aracının t zamanındaki konumu

$y \rightarrow$ polis aracının t zamanındaki konumu

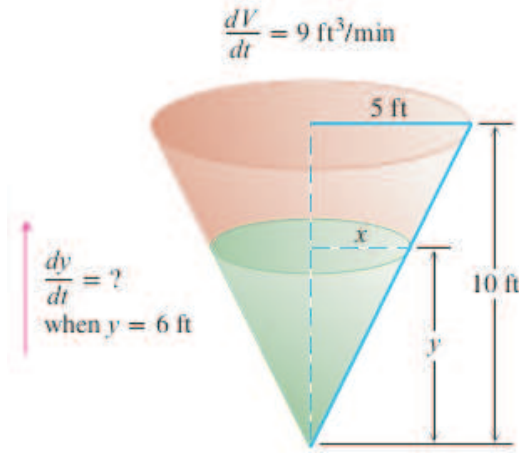
$s \rightarrow t$ zamanındaki, polis ile suçlu arabasının arasındaki mesafe

$$\begin{aligned} s^2 &= x^2 + y^2 \Rightarrow \\ 2s \frac{ds}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0.8, y = 0.6, \frac{dy}{dt} = 60, \frac{ds}{dt} = 20 \Rightarrow \\ 20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2 + 0.6^2}} \left(0.8 * \frac{dx}{dt} + 0.6 * 60 \right) \Rightarrow \\ \frac{dx}{dt} &= 70 \end{aligned}$$

Örnek 20.12. Koni şeklinde bir tanka $9\text{ft}^3/\text{d}$ oranında bir su doldurulmaktadır. Koninin tavan yarıçapı 5ft ve yüksekliği 10ft dir. Su seviyesinin derinliği 6ft olduğunda, su seviyesindeki artışın hızı nedir?

3. TÜREV



$V \rightarrow t$ zamandaki koninin içindeki suyun hacmi

$x \rightarrow t$ zamandaki suyun bulunduğu seviyedeki yarıçap

$y \rightarrow t$ zamandaki suyun bulun duğu yükseklik

$y = 6 \text{ ft} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 9 \text{ ft}^3/\text{d}$

suyun bulunduğu kısımdaki koninin hacmini aşağıdaki formülle ifade edebiliriz:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Burada hem x hem de y t zamanına bağlı fonksiyonlardır ve ikisi de bilinmeyen bunu teke düşürmek için koninin içindeki üçgendeki benzerlikten

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{10} \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

Buna göre her iki taraftan türev alırsak

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi y^3}{12} \Rightarrow \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi 3y^2}{12} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{9 * 12}{\pi * 3 * 6^2} = \frac{1}{\pi} \simeq 0.32 \end{aligned}$$

21. Lineerleştirme ve Diferansiyel

Bazı kompleks fonksiyonları verilen bir hata payı ile daha basit fonksiyonlar ile yaklaşabiliriz. Bu bölümde tanjant doğrusu ile ilişkili olan fonksiyonun yaklaşım fonksiyonuna lineerleőtirilmesi diyeceğiz. Daha başka polinom yaklaşımları da mevcuttur ancak bu derste bunlara değinmeyeceğiz.

Tanım 21.1. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında diferansiyellenebilir ise $(a, f(a))$ noktasından geçen tanjant doğrusunu

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ile ifade ediyorduk. Genel anlamda

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

fonksiyonu lineer bir doğru tanımlar. Ve bu yaklaşım fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki lineerleőtirmesi denir ve

$$L(x) \approx f(x)$$

ile gösterilir. $L(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki standart lineer yaklaşımı denir. $x = a$ noktasına yaklaşımın merkezi denir.

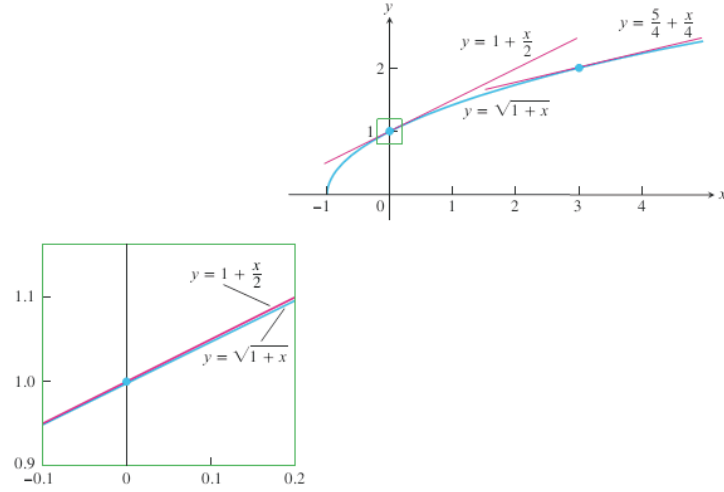
Örnek 21.2. $f(x) = \sqrt{1+x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} L(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Big|_{x=0} x \\ &= 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow \\ 1 + \frac{x}{2} &\approx \sqrt{1+x}, x = 0 \text{ civarında} \end{aligned}$$

fonksiyonun lineerleőtirmesidir.

3. TÜREV



x	$f(x) = \sqrt{1+x}$	$L(x) = 1 + \frac{x}{2}$	$ f(x) - L(x) $
0.2	$\sqrt{1+0.2} = 1.0954$	$1 + \frac{0.2}{2} = 1.1$	$ 1.0954 - 1.1 = 0.0046$
0.05	$\sqrt{1+0.05} = 1.0247$	$1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	$ 1.0247 - 1.025 = 0.0003$
0.005	$\sqrt{1+0.005} = 1.0025$	$1 + \frac{0.005}{2} = 1.0025$	$ \sqrt{1+0.005} - 1 + \frac{0.005}{2} = 4.9969 \times 10^{-3}$

□

Uyarı 21.3. Her zaman için verilen noktadaki lineerleştirmeyi kullanmalıyız. Herhangi bir noktadaki lineerleştirme tüm noktalar için doğru lineerleştirme değildir. Örneğin yukarıdaki örnekte $x = 3$ noktasındaki lineerleştirmeyi sormuş olsaydı

$$\begin{aligned}
 L(x) &= f(3) + f'(3)(x-3) \\
 &= 2 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Big|_{x=3} (x-3) \\
 &= 2 + \frac{x-3}{4} \Rightarrow \\
 \frac{5}{4} + \frac{x}{4} &\approx \sqrt{1+x}, x=3 \text{ civarında}
 \end{aligned}$$

demeliyiz. $x = 3$ noktasındaki lineerleştirme için $1 + \frac{x}{2}$ lineerleştirmesini kullanamayız.

Alıştırma 21.4. $x = 0$ noktasında $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ olduğunu gösteriniz ve bu ifadeden faydalanarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &\approx 1+x \\ \sqrt[3]{1+5x^4} &\approx 1+\frac{5}{3}x^4 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\approx 1+\frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

Tanım 21.5. $y = f(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. dy diferansiyeli

$$dy = f'(x) dx$$

ile tanımlanır burada dx diferansiyeli bağımsız değişkendir.

Örnek 21.6. $y = x^5 + 37x, y = \tan x$ fonksiyonları için dy diferansiyelini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}dy &= (5x^4 + 37) dx \\ dy &= \sec^2 x dx\end{aligned}$$

□

Tanım 21.7. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında diferansiyellenebilir ve dx yeterince küçük bir değişim ise

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

ifadesine diferansiyel yaklaşım denir.

Örnek 21.8. Bir çemberin yarıçapı $r = 10m$ den $10.1m$ ye çıkartıldığında alandaki değişimi hesaplayınız.

Çözüm Diferansiyel yaklaşım kullanarak bulalım:

$$\begin{aligned}A &= \pi r^2 \Rightarrow dA = 2\pi r dr \Rightarrow r = 10, dr = 0.1 \Rightarrow \\ dA &= 2\pi 10 * 0.1 = 2\pi m^2 \Rightarrow \\ A(10 + 0.1) &\approx A(10) + dA = \pi (10)^2 + 2\pi = 102\pi m^2\end{aligned}$$

Gerçek alan ise

$$A(10 + 0.1) = (10.1)^2 \pi = 102.01\pi m^2$$

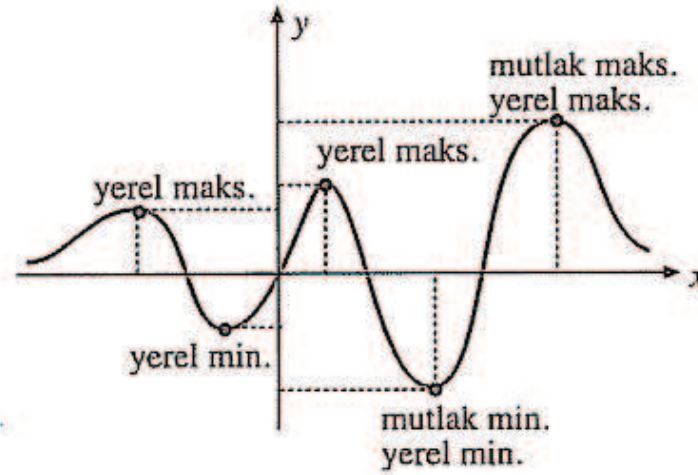
□

Türevin Uygulamaları

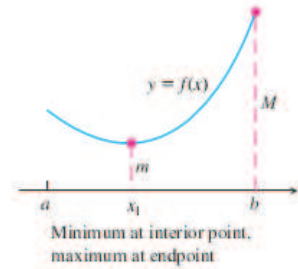
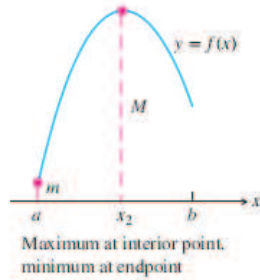
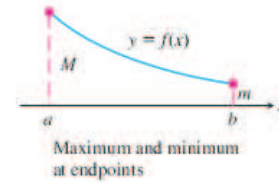
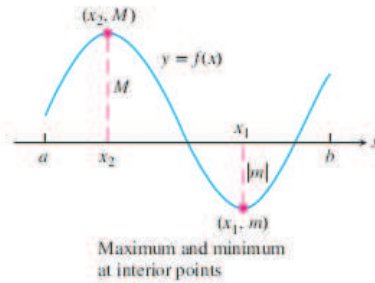
22. Fonksiyonun Ekstremleri

Tanım 22.1. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

- 1) $c \in A$ olsun. $|x - c| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x \in A$ için $f(x) \leq f(c)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonu c noktasında yerel (lokal) maksimuma sahiptir denir.
- 2) $d \in A$ olsun. $|x - d| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x \in A$ için $f(d) \leq f(x)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonu d noktasında yerel (lokal) minimuma sahiptir denir.
- 3) Yerel maksimum ve yerel minimum değeri birden fazla olabilir ve bu değerlere fonksiyonun ekstremumları veya ekstremum değerleri de denir.
- 4) $\forall x \in A$ için $f(x) \leq f(p)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $p \in A$ mevcut ise f fonksiyonu p noktasında mutlak (global) maksimuma sahiptir denir.
- 5) $\forall x \in A$ için $f(r) \leq f(x)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $r \in A$ mevcut ise f fonksiyonu r noktasında mutlak (global) maksimuma sahiptir denir.
- 6) Fonksiyonun mutlak maksimumu, aynı zamanda yerel maksimum değeridir ama tersi doğru değildir yani yerel maksimum değeri mutlak maksimum olmayabilir.
- 7) Fonksiyonun mutlak minimumu, aynı zamanda yerel minimum değeridir ama tersi doğru değildir yani yerel minimum değeri mutlak minimum olmayabilir.

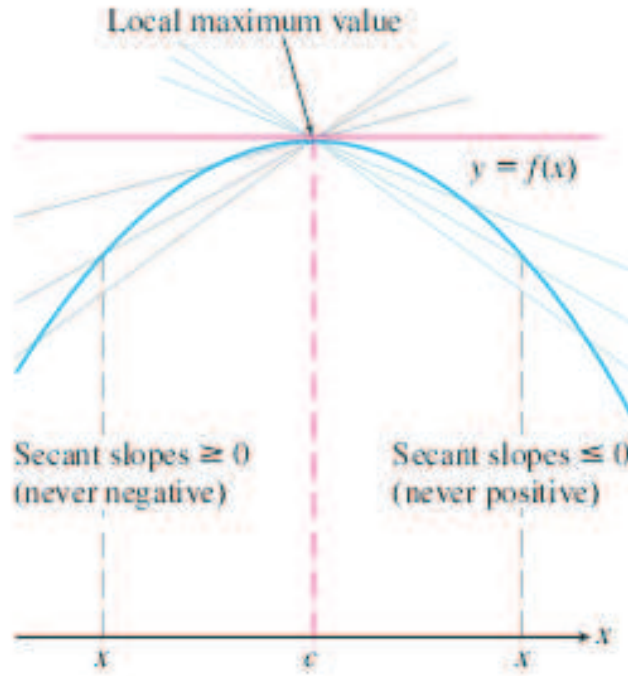


Teorem 22.2. (Ekstreum Teoremi) Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise bu aralıkta M mutlak maksimum değerini ve m mutlak minimum değerini alır yani $\exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = M, \exists x_2 \in [a, b], f(x_2) = m$.



Teorem 22.3. (Lokal Extremumların bulunması için 1.Türev Teoremi) Eğer f fonksiyonu, c iç noktasında lokal maksimum veya lokal minimum değerini alıyorsa ve bu noktada fonksiyon türevlenebilir ise

$$f'(c) = 0$$



Tanım 22.4. (Kritik Nokta) c bir iç nokta ve $f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ tanımsız ise c noktasına kritik nokta denir.

Uyarı 22.5. Sürekli bir fonksiyonun kapalı bir aralıkta mutlak maksimum veya mutlak minimum değeri aşağıdaki yöntemle bulunur:

- 1) Tüm kritik noktalardaki ve aralığın sol ve sağ uçtaki değerlerini hesaplayınız.
- 2) Hesaplanan bu değerler arasında en büyük ve en küçük değeri alınız.

Örnek 22.6. $f(x) = x^2, x \in [-2, 1]$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve minimum değerini bulunuz.

Çözüm 1. Önce kritik noktayı bulalım:

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 - \text{kritik nokta}$$

2. $x = 0$ kritik noktasında ve $x = -2$ sol uç noktada ve $x = 1$ sağ uç noktada değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(-2) &= 4 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

Bu değerlere göre 0 en düşük 4 en yüksek değerdir. O halde $x = 0$ da fonksiyon 0 mutlak minimum değerini alırken $x = -2$ de 4 mutlak maksimum değerine ulaşır. $\square$

Örnek 22.7. $f(t) = 8t - t^4, t \in [-2, 1]$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve minimum değerini bulunuz.

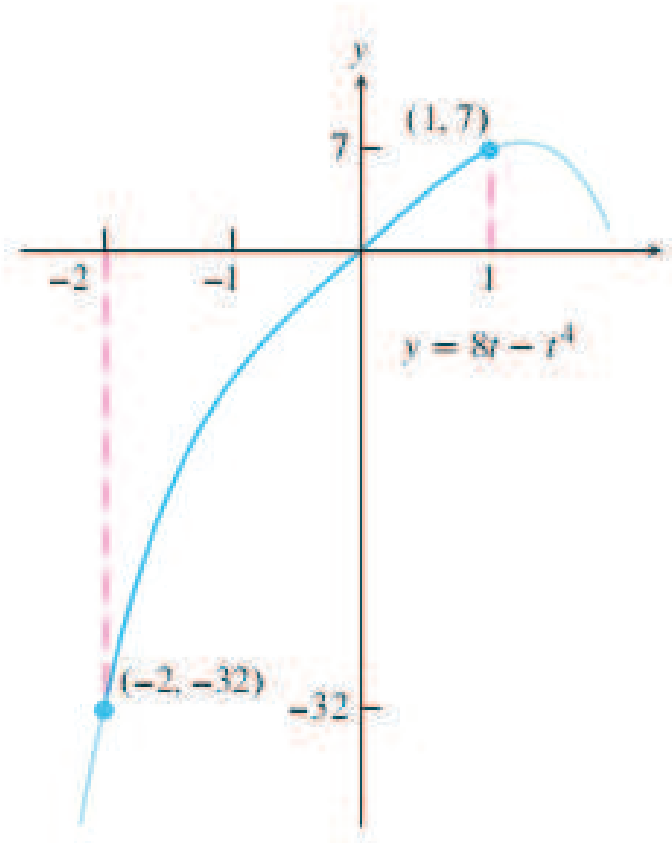
Çözüm 1. Önce kritik noktayı bulalım:

$$f'(t) = 8 - 4t^3 = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} > 1 - \text{ kritik nokta değil aralıkta olmadığından}$$

2. $x = -2$ sol uç noktada ve $x = 1$ sağ uç noktada değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 8 * (-2) - (-2)^4 = -32 \\ f(1) &= 8 * (1) - (1)^4 = 7 \end{aligned}$$

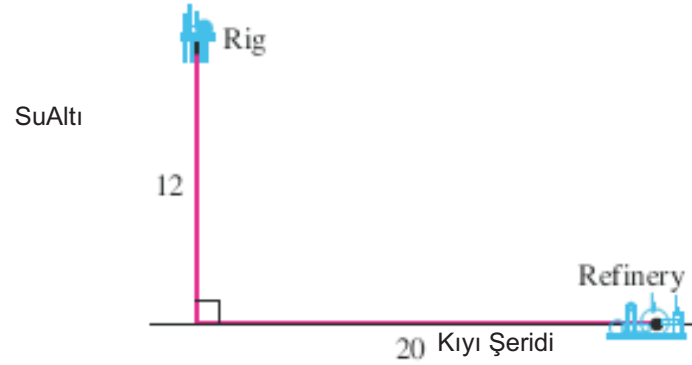
Bu değerlere göre -32 en düşük 7 en yüksek değerdir. O halde $x = -2$ da fonksiyon -32 mutlak minimum değerini alırken $x = 1$ de 7 mutlak maksimum değerine ulaşır.



□

Örnek 22.8. Kıyıdan 12mil uzaklıktaki bir sondaj makinesi, kıyıya 20mil uzaklıkta olan bir rafineye bir boruyla bağlıdır. Su altındaki borunun 1mil maliyeti 500.000\$ iken karadaki burunun 1 mil maliyeti 300.000\$ olarak hesaplanır. Buna göre en düşük maaliyeti elde etmek için boru nasıl döşenmelidir?

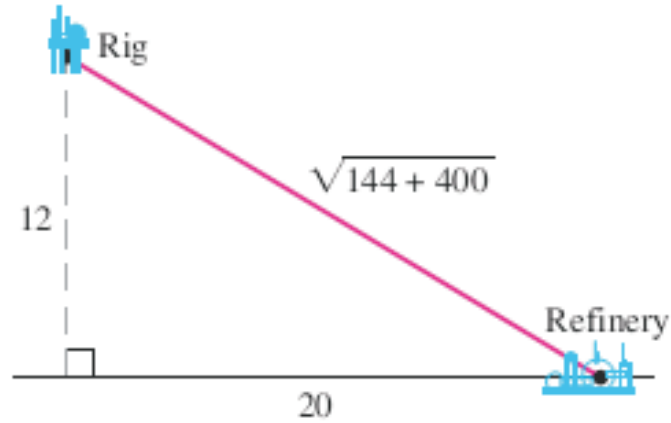
4. TÜREVİN UYGULAMALARI



Çözüm (a) Su altında en az boru döşenmesi durumunda Toplam Dolar Maliyeti:

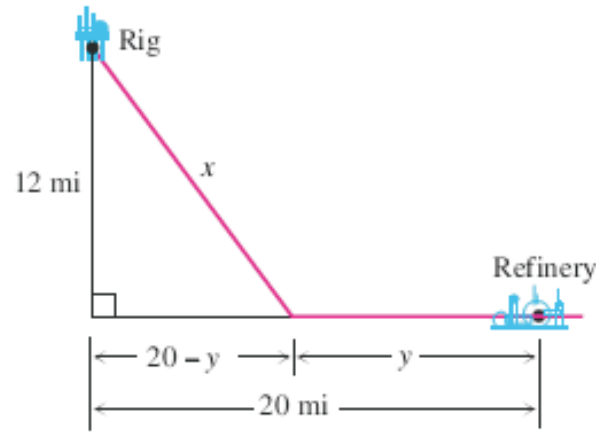
$$\begin{aligned} \text{Maliyet} &= 12 (500000) + 20 (300000) \\ &= 12\,000\,000\$ \end{aligned}$$

(b) Tüm borunun su altında döşenmesi durumu:



$$\begin{aligned} \text{Maliyet} &= \sqrt{144 + 500} (500000) \\ &\approx 11\,661\,900\$ \end{aligned}$$

(a) planına göre daa düşük bir maliyet ortaya çıkmaktadır. Peki daha düşük bir maliyet bulmak mümkün müdür? Evet ikisinin arasında bir yol:



$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

$$\text{Maliyet} = 500\,000x + 300\,000y$$

$$= 500\,000\sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300\,000y$$

$$\frac{d}{dy}(\text{Maliyet}) = 500\,000 * \frac{1}{2} (144 + (20 - y)^2)^{-1/2} 2(20 - y)(-1) + 300\,000$$

$$= \frac{-500\,000(20 - y)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300\,000$$

$$\frac{d}{dy}(\text{Maliyet}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{500\,000(20 - y)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} = 300\,000 \Rightarrow \frac{5}{3}(20 - y) = \sqrt{144 + (20 - y)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{25}{9}(20 - y)^2 = 144 + (20 - y)^2 \Rightarrow \frac{16}{9}(20 - y)^2 = 144 \Rightarrow \frac{4}{3}(20 - y) = \pm 12 \Rightarrow$$

$$y = 11 \text{ veya } y = 29$$

$y = 29$ olamaz çünkü sahil şeridi uzunluğu zaten 20mil idi. Buna göre $y = 11$ için $x = 15$ elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} \text{Maliyet} &= 500000x + 300000y \Rightarrow \\ &= 500000 * 15 + 300000 * 11 \\ &= 10\,800\,000 \end{aligned}$$

yani en düşük maliyet 10 800 000 dir.

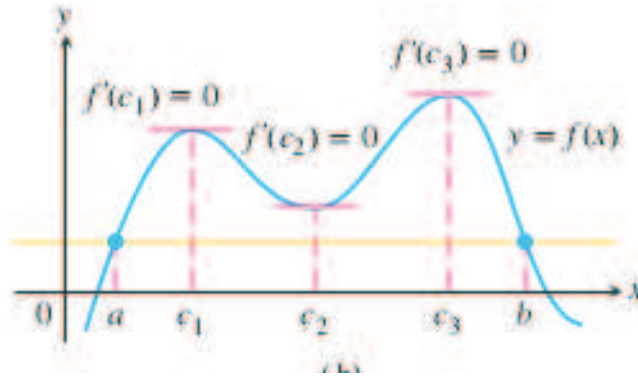
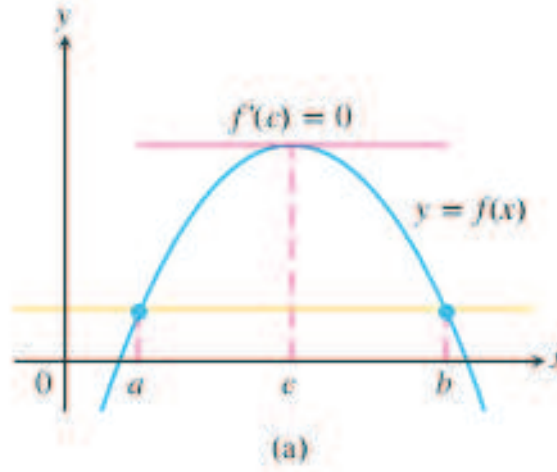
□

23. Ortalama Değer Teoremi

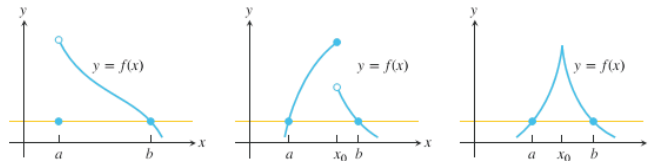
Teorem 23.1. (Rolle Teoremi) Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ve $f(a) = f(b)$ koşulunu sağlıyorsa

$$f'(c) = 0$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktası mevcuttur.



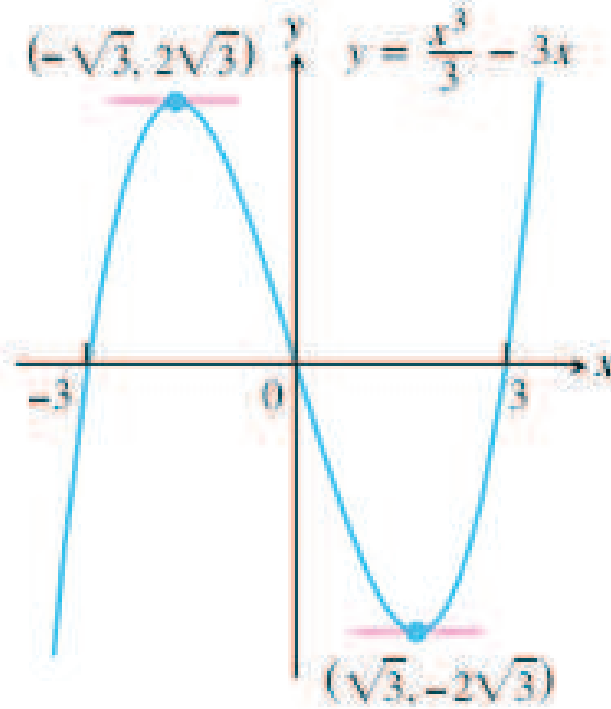
Uyarı 23.2. Rolle Teoremi, fonksiyonun kapalı aralıkta sürekli olması ve açık aralıkta diferansiyellenebilir olması durumunda geçerlidir. Bu koşullardan biri sağlanmazsa türevin sıfır olması beklenemez.



Örnek 23.3. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ aralığında kritik noktası olduğunu Rolle Teoremini kullanarak bulunuz.

Çözüm $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ aralığında sürekli ve $f'(x) = x^2 - 3$ diferansiyeli mevcuttur. $f(-3) = f(3) = 0$ olduğundan Rolle Teormi gereği $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir c noktası mevcuttur. Gerçekten de

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \\ f'(-\sqrt{3}) &= f'(\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

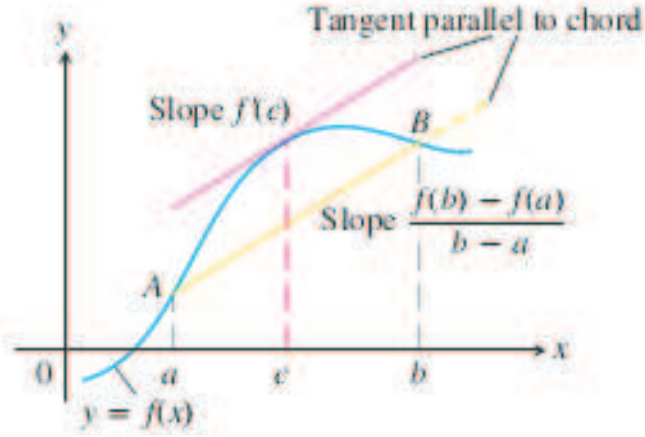


□

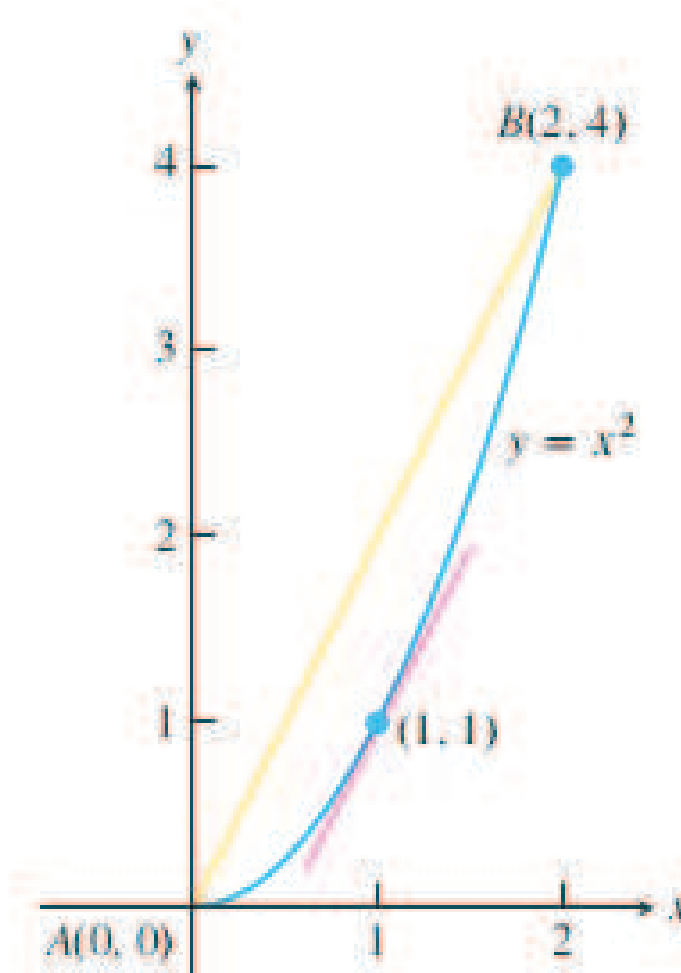
Teorem 23.4. (Ortalama Değer Teoremi) Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ise

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktası mevcuttur.



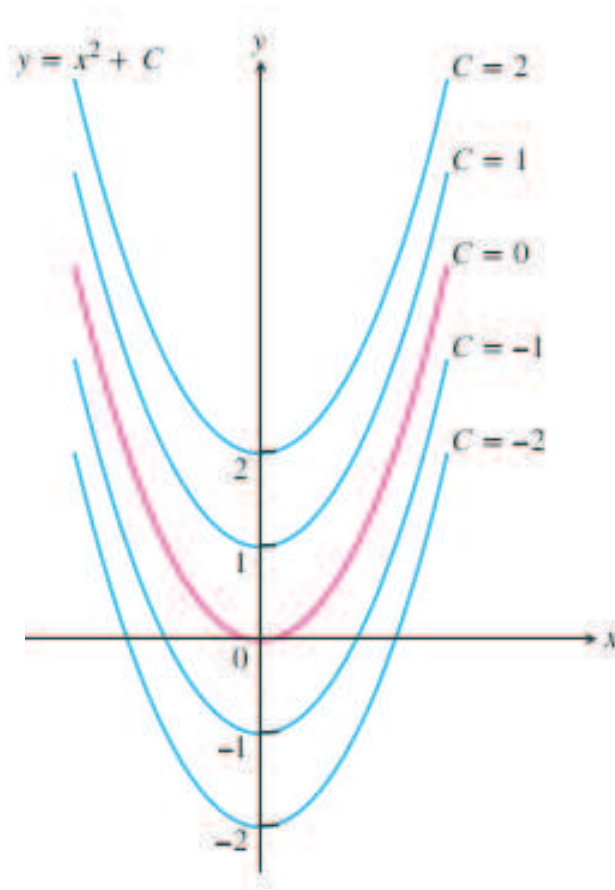
Örnek 23.5. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında sürekli ve $f'(x) = 2x$, $(0, 2)$ aralığında mevcuttur. $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = 2$ olmak üzere $f'(x) = 2$ olacak şekilde bir nokta mevcuttur. Gerçekten de $f'(x) = 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ noktasında fonksiyonun eğimi 2dir.



Aşağıda Ortalama Değer Teoreminin bazı önemli sonuçları verilecektir.

Sonuç 23.6. (Sıfır Türevli Fonksiyonlar sabit fonksiyonlardır) Eğer (a, b) aralığında $f'(x) = 0$ ise $f(x) = C$ sabit fonksiyondur.

Sonuç 23.7. (Aynı Türeve sahip fonksiyonlar bir sabit kadar farklılık gösterirler) Eğer (a, b) aralığında $f'(x) = g'(x)$ ise $f(x) = g(x) + C$ dir.



Örnek 23.8. *Türevi $\sin x$ olan ve $(0, 2)$ noktasından geçen fonksiyonu bulunuz.*

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos x + c \Rightarrow \\ 2 &= -\cos 0 + c \Rightarrow c = 3 \\ f(x) &= -\cos x + 3 \end{aligned}$$

Örnek 23.9. h yüksekliğinden serbest düşmeye bırakılan bir cismin ivmesi 9.8m/s^2 olduğuna göre cismin hızı ve yer değiştirmesinin fonksiyonunu bulunuz.

$$\begin{aligned}
 a &= 9.8 \Rightarrow \\
 v(t) &= 9.8t + c \\
 v(0) &= 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \\
 v(t) &= 9.8t \\
 x(t) &= 9.8 * \frac{t^2}{2} + c \\
 x(0) &= h \Rightarrow c = h \\
 x(t) &= 4.9t^2 + h
 \end{aligned}$$

24. Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi

Tanım 24.1. 1) $x < y$ olduğunda $f(x) < f(y)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna artan fonksiyon

2) $x < y$ olduğunda $f(x) > f(y)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna azalan fonksiyon denir.

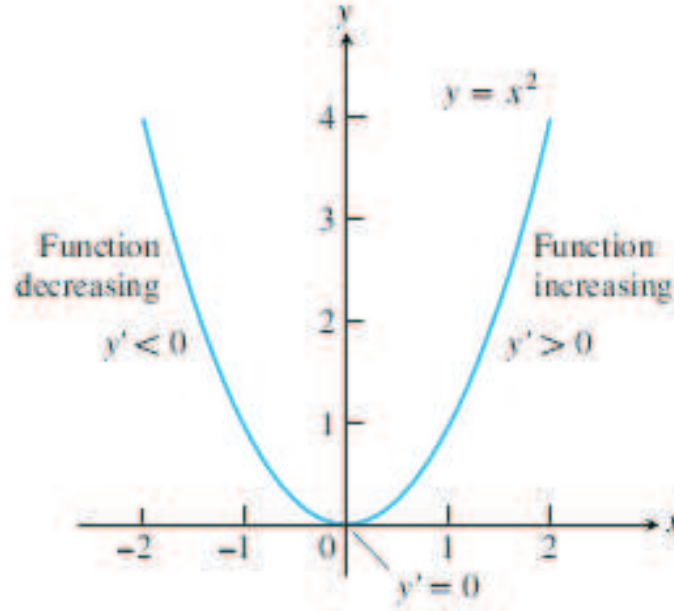
Diğer bir deyişle fonksiyonun grafiği soldan sağa doğru yükseliyorsa veya artıyorsa fonksiyona artan; soldan sağa doğru düşüşe geçiyorsa ya da azalıyorsa azalan fonksiyondur.

Artan ve azalan fonksiyonlara kısaca monoton fonksiyonlar denir.

Sonuç 24.2. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun.

1) $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında artan fonksiyondur.

2) $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında azalan fonksiyondur.



Örnek 24.3. $f(x) = x^3 - 12x - 5$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow -2$	$-2 \longleftrightarrow 2$	$2 \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	+(işaret değişir)	-(işaret değişir)	+(türevin en büyük derecesinin işareti ile başla)
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan

□

Örnek 24.4. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0(\text{çift kat kök}), x_3 = 1$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow 0^+$	$0^+ \longleftrightarrow 1$	$1 \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	-(aynı işarette kal)	-(işaret değişir)	+(türevin en büyük derecesinin işareti ile başla)
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan

□

Örnek 24.5. $f(x) = x \sin x + \cos x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığında kritik noktalarını bulunuz ve artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{3\pi}{2}$$

$x \in [0, 2\pi]$ olduğundan $x > 0$ dır bu yüzden $\cos x$ in işaretine baksak yeterli olacaktır!

Aralık	$0 \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \longleftrightarrow 2\pi$
f' in işareti	+	-	+
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan

□

Teorem 24.6. (Lokal Ekstremum değerleri için 1. Türev Kuralı) $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun ve c noktası $f(x)$ fonksiyonunun bir kritik noktası olsun. Soldan sağa doğru hareket ederken

1) f' in işareti c noktasında negatiften pozitive doğru değişiyorsa c noktası f fonksiyonunun lokal minimum noktasıdır.

Aralık	$c - \varepsilon \longleftrightarrow c$	$c \longleftrightarrow c + \varepsilon$
f' in işareti	-	+
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan
	$\searrow \cup \nearrow$ lokal minimum	

2) f' in işareti c noktasında pozitiften negatife doğru değişiyorsa c noktası f fonksiyonunun lokal maksimum noktasıdır.

Aralık	$c - \varepsilon \longleftrightarrow c$	$c \longleftrightarrow c + \varepsilon$
f' in işareti	+	-
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan
	$\nearrow \cap \searrow$ lokal maksimum	

3) f' in işareti c noktasında değişmiyorsa yani c nin her iki yanında da pozitif veya negatif ise c noktası f fonksiyonunun lokal ekstremumu noktası değildir.

Aralık	$c - \varepsilon \longleftrightarrow c$	$c \longleftrightarrow c + \varepsilon$
f' in işareti	+	+
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\nearrow$ artan
	$\nearrow \cap \nearrow$ ekstremum değer yok	

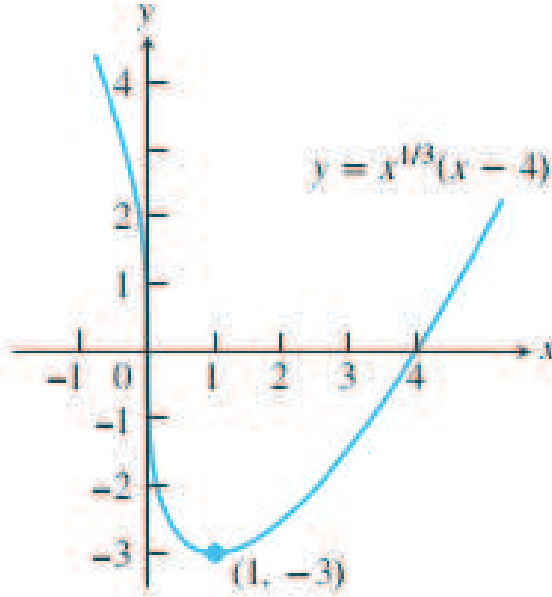
Aralık	$c - \varepsilon \longleftrightarrow c$	$c \longleftrightarrow c + \varepsilon$
f' in işareti	—	—
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan
	$\searrow$  $\searrow$ ekstremum değeri yok	

Örnek 24.7. $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x - 4) + x^{1/3} = \frac{4}{3x^{2/3}}(x - 1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ (çift kat tanımsızlık noktası)}, x_3 = 1$$

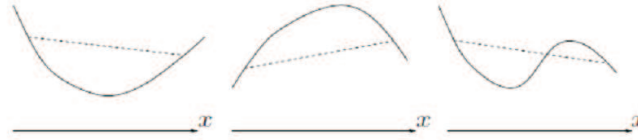
Aralık	$-\infty \longleftrightarrow 0^+$	$0^+ \longleftrightarrow 1$	$1 \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	—(aynı işarete kal)	—(işaret değişir)	+(türevin en büyük derecesinin işareti ile başla)
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan
	$\searrow$  $\searrow$ ekstremum değeri yok	$\searrow$  $\nearrow$ lokal minimum	



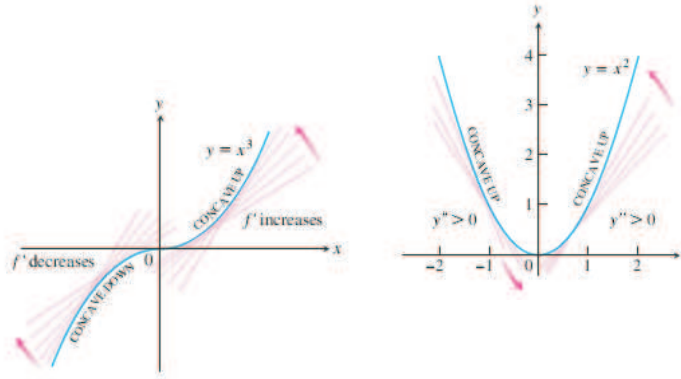
25. Konkavlık ve Eğri çizimleri

Bir önceki bölümde fonksiyonun artan mı azalan mı olduğu, kritik noktalarının bulunması ve lokal maksimum ve lokal minimum değerlerinin bulunmasında 1.türevden faydalandığımızı gördük. Bu bölümde ise 2.türevin, fonksiyonun grafiğinin çizimindeki rolü ve fonksiyonun dönüm ve büküm noktaları hakkında nasıl bilgi verebileceğini göstereceğiz. Bu bilgilerin tamamını kullanarak bir fonksiyonun grafiğini rahatla çizebileceğiz.

Tanım 25.1. (Yukarı konkav-Aşağı konkav fonksiyonlar) $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyon olsun. Eğer fonksiyonun herhangi iki noktasını birleştiren kiriş daima grafiğin üzerinde kalıyorsa f fonksiyonuna yukarı konkav (yukarı bükey - konveks), eğer kiriş daima grafiğin altında kalıyorsa f fonksiyonuna aşağı konkav (aşağı bükey- konkav) denir.



Tanım 25.2. $f(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer f', I aralığında artan ise f fonksiyonunun grafiği yukarı konkavdır.



Teorem 25.3. (Konkavlık için 2.Türev Testi) $f(x)$, I aralığında 2-kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

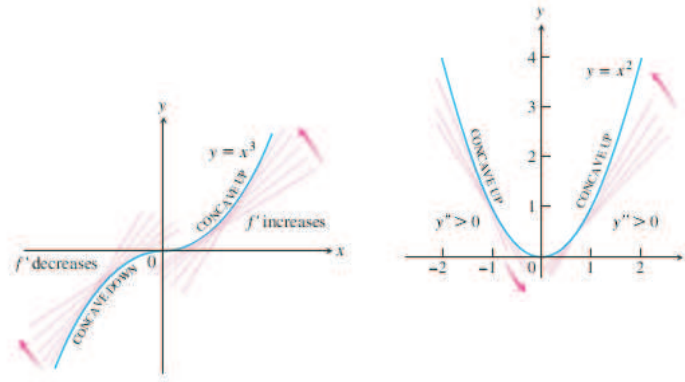
1) Eğer I aralığında $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonu I aralığında yukarı konkavdır.

$$\begin{array}{c} f''(x) \\ \vee \\ 0 \end{array} \rightarrow \smile$$

2) Eğer I aralığında $f''(x) < 0$ ise f fonksiyonu I aralığında aşağı konkavdır.

$$\begin{array}{c} f''(x) \\ \wedge \\ 0 \end{array} \rightarrow \curvearrowright$$

Örnek 25.4. $y = x^3$ eğrisi için $y'' = 6x$ ve $x \in (-\infty, 0)$ için $y'' < 0$ olduğundan $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı konkavdır ve $x \in (0, \infty)$ için $y'' > 0$ olduğundan $(0, \infty)$ aralığında yukarı konkavdır.
 $y = x^2$ eğrisi için $y'' = 2 > 0$ olduğundan $(-\infty, \infty)$ aralığında yukarı konkavdır.

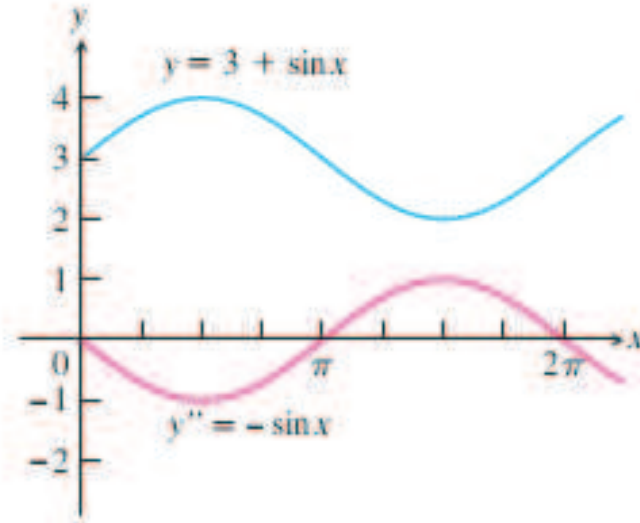


Örnek 25.5. $y = 3 + \sin x$ eğrisinin $[0, 2\pi]$ aralığında konkavlığını inceleyiniz.

Çözüm

$$y = 3 + \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x$$

olup $[0, \pi]$ aralığında $y'' < 0$ dır yani aşağı konkavdır ve $[\pi, 2\pi]$ aralığında $y'' > 0$ dır yani yukarı konkavdır.



□

Tanım 25.6. $f(x)$ fonksiyonunun yukarı konkavlıktan, aşağı konkavlığa geçtiği ve sürekli olduğu noktaya dönüm (büküm) noktası denir. Dönüm noktasında $f'' = 0$ veya f'' tanımsızdır.

Örnek 25.7. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x - 12$ fonksiyonunun yukarı ve aşağı konkav olduğu aralıkları bulup dönüm noktasını elde ediniz.

Çözüm

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x - 12 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4 \Rightarrow$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow 1$	$1 \longleftrightarrow \infty$
f'' in işareti	-	+
f nin davranışı	aşağı konkav	yukarı konkav
	1 dönüm noktası	

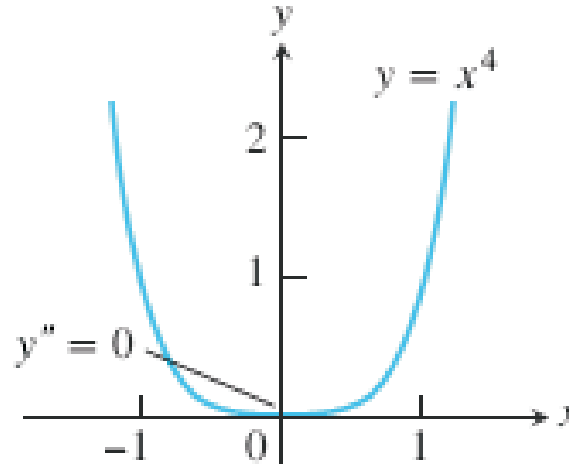
□

Örnek 25.8. $f(x) = x^4$ fonksiyonunun yukarı ve aşağı konkav olduğu aralıkları bulup dönüm noktasını elde ediniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^4 \Rightarrow \\
 f'(x) &= 4x^3 \Rightarrow \\
 f''(x) &= 12x^2 = 0 - \text{çift kat kök}
 \end{aligned}$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow 0^+$	$0^+ \longleftrightarrow \infty$
f'' in işareti	+(işaret aynı kalır)	+
f nin davranışı	yukarı konkav	yukarı konkav
	dönüm noktası yoktur	



□

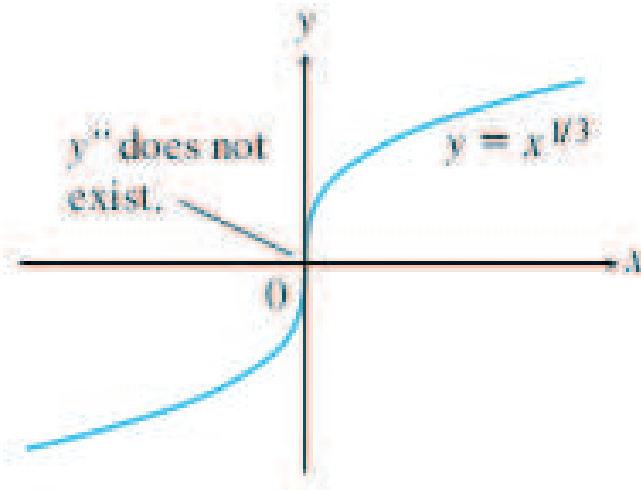
Örnek 25.9. $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonunun yukarı ve aşağı konkav olduğu aralıkları bulup dönüm noktasını elde ediniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^{1/3} \Rightarrow \\
 f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow \\
 f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3}
 \end{aligned}$$

$f''(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımsızdır:

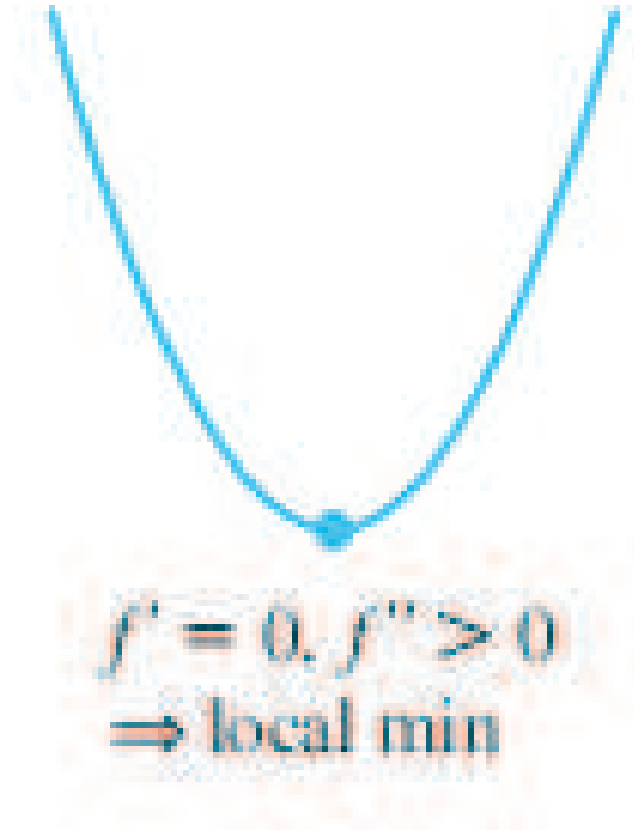
Aralık	$-\infty \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow \infty$
f'' in işareti	+	-
f nin davranışı	yukarı konkav	aşağı konkav
	0 dönüm noktası	



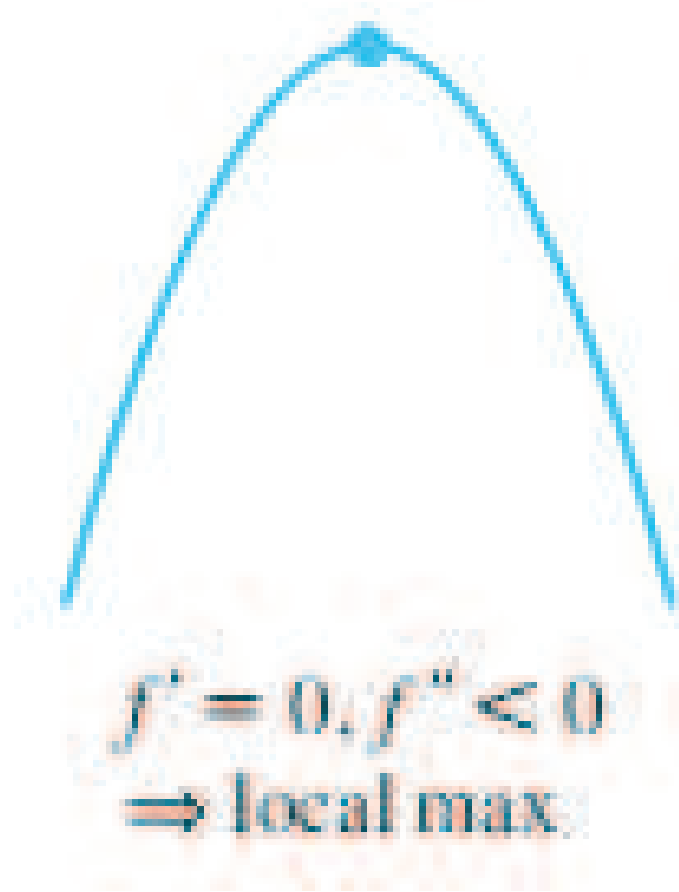
□

Teorem 25.10. (Lokal Ektremum değerleri için 2. Türev Testi) $f(x)$, I aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

1) Eğer $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise f fonksiyonu c noktasında lokal minimuma sahiptir.

FIGURE 25.1. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$

2) Eğer $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise f fonksiyonu c noktasında lokal maksimuma sahiptir.

FIGURE 25.2. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$

3) Eğer $f'(c) = 0$ ve $f''(c) = 0$ ise f fonksiyonu c noktasında ya lokal maksimuma, ya lokal minimuma sahiptir ya da hiçbirine sahip değildir.

Uyarı 25.11. f' ve f'' fonksiyonları ile birlikte fonksiyonun kritik noktaları, artan ve azalan olduğu aralıklar, konkavlığını ve dönüm noktalarını elde edebiliriz. Böylece bu bilgiler ışığında bir fonksiyonun grafiğini çizebiliriz. Bunun için aşağıdaki adımları takip edeceğiz:

- 1) f fonksiyonun ekstremum değerlerini bulacağız.
- 2) f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu (veya aralıkları) belirleyeceğiz.
- 3) f fonksiyonunun grafiğinin yukarı veya aşağı konkav olduğu aralıkları belirleyeceğiz.
- 4) f fonksiyonunun asimptotlarını belirleyeceğiz.

5) f fonksiyonun kabaca grafiğinin şeklini çizceğiz.

6) f fonksiyonun lokal maksimum lokal minimum ve dönüm noktalarında gerçek grafiğini çizceğiz.

Örnek 25.12. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

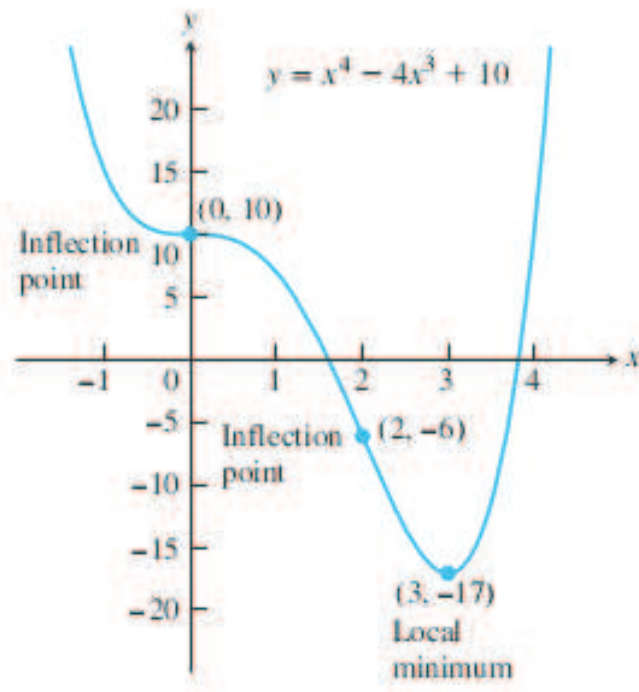
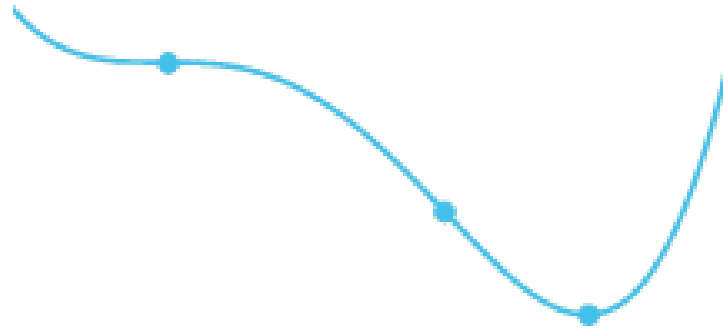
Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 + 10 \Rightarrow \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, x_3 = 3 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2 \end{aligned}$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow 2$	$2 \longleftrightarrow 3$	$3 \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	$-(\text{çift kat kök})$	$-$	$-$	$+$
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan
f'' in işareti	$+$	$-$	$+$	$+$
f nin davranışı	yukarı konkav $\smile$	Aşağı konkav $\frown$	yukarı konkav $\smile$	yukarı konkav $\smile$
	0 dönüm noktası		2 dönüm noktası	

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, yatay, düşey ve eğik asimptot yok!

General shape.



Örnek 25.13. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

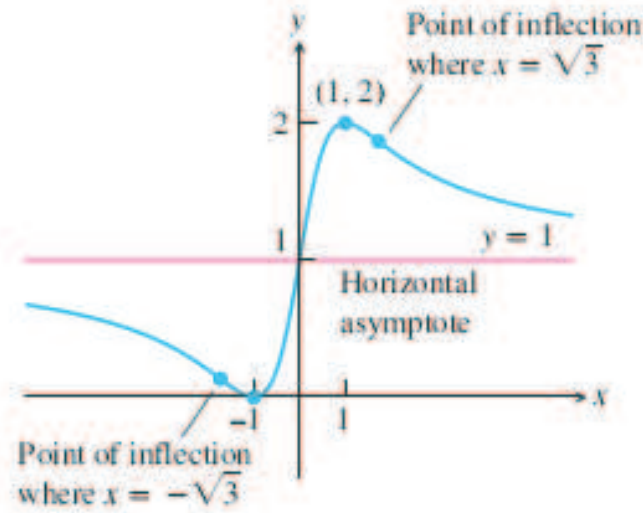
Çözüm

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^4 - 4x^3 + 10 \Rightarrow \\
 f'(x) &= \frac{2(x+1)(1+x^2) - 2x(x+1)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 2-2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \\
 f'(x) &= (2-2x^2)(1+x^2)^{-2} \Rightarrow \\
 f''(x) &= -4x(1+x^2)^{-2} + (2-2x^2)(-2)(1+x^2)^{-3}2x \\
 &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{(2-2x^2)4x}{(1+x^2)^3} = \frac{-4x(1+x^2) - (2-2x^2)4x}{(1+x^2)^3} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} \longleftrightarrow -1$	$-1 \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow 1$	$1 \longleftrightarrow \sqrt{3}$	$\sqrt{3} \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	-	-	+	+	-	-
f nin davranışı	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
f'' in işareti	-	+	+	-	-	+
f nin davranışı	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\frown$	$\frown$	$\smile$
	$-\sqrt{3}$ dönüm noktası		0 dönüm noktası		$\sqrt{3}$ dönüm noktası	

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = 1 - \text{yatay asimptot}$$

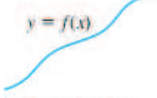
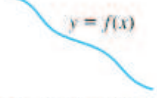
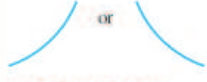
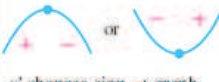
Paydayı tanımsız yapan değer olmadığından düşey asimptot yok!ve eğik asimptot yok!



□

Uyarı 25.14. Türevden, fonksiyonun grafiği hakkında aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

- 1) f diferansiyellenebilir ise grafik pürüzsüz, bağlantılı, yükselme veya alçalma gösterir
- 2) $f' > 0$ ise grafiği soldan sağa doğru artandır ve dalgalanma gösterebilir.
- 3) $f' < 0$ ise grafiği soldan sağa doğru azalandır ve dalgalanma gösterebilir.
- 4) $f'' > 0$ ise grafiği yukarı doğru konkavdır dalgalanma göstermez ya yükselme gösterir ya da alçalma.
- 5) $f'' < 0$ ise grafiği aşağı doğru konkavdır dalgalanma göstermez ya yükselme gösterir ya da alçalma.
- 6) f'' in işareti değişiyorsa dönüm noktası vardır!
- 7) f' in işareti değişiyorsa grafiğinde ya lokal maksimum ya da lokal minimum değeri vardır.
- 8) $f' = 0, f'' < 0$ ise grafiğinde lokal maksimum vardır.
- 9) $f' = 0, f'' > 0$ ise grafiğinde lokal minimum vardır.

 $y = f(x)$ Differentiable $\Rightarrow$ smooth, connected; graph may rise and fall	 $y = f(x)$ $y' > 0 \Rightarrow$ rises from left to right; may be wavy	 $y = f(x)$ $y' < 0 \Rightarrow$ falls from left to right; may be wavy
 $y'' > 0 \Rightarrow$ concave up throughout; no waves; graph may rise or fall	 $y'' < 0 \Rightarrow$ concave down throughout; no waves; graph may rise or fall	 y'' changes sign Inflection point
 y' changes sign $\Rightarrow$ graph has local maximum or local minimum	 $y' = 0$ and $y'' < 0$ at a point; graph has local maximum	 $y' = 0$ and $y'' > 0$ at a point; graph has local minimum

Örnek 25.15. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ve $f(x) = \left|x + \frac{1}{x}\right|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

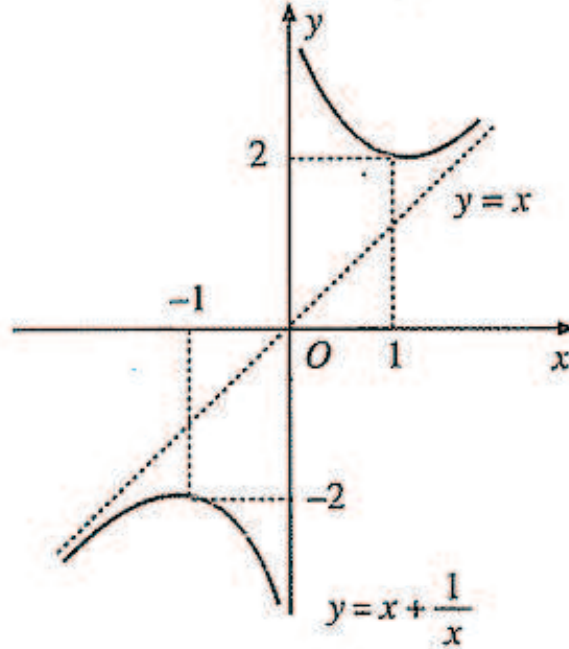
$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + \frac{1}{x} \Rightarrow \\
 f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \\
 f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \\
 f''(x) &= 2\frac{1}{x^3} \Rightarrow x = 0 \text{ tanımsızlık noktası}
 \end{aligned}$$

4. TÜREVİN UYGULAMALARI

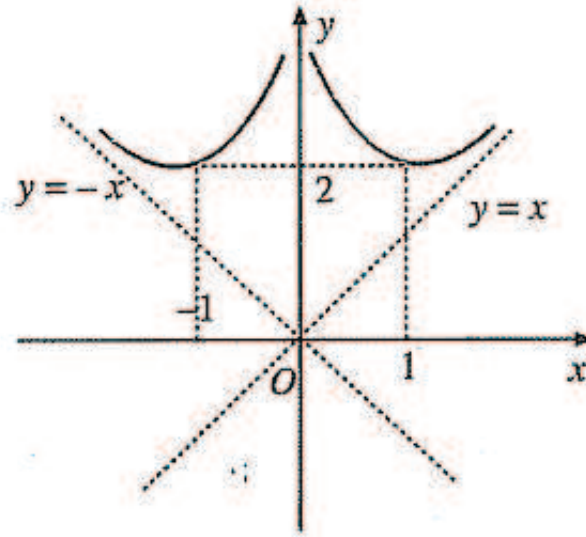
Aralık	$-\infty \longleftrightarrow -1$	$-1 \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow 1$	$1 \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	+	-	-	+
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan
f'' in işareti	-	-	+	+
f nin davranışı	Aşağı konkav $\cap$	Aşağı konkav $\cap$	yukarı konkav $\cup$	yukarı konkav $\cup$
	0 dönüm noktası			

x eğik asimptottur, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x + \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = x + \frac{1}{x} = -\infty$ olduğundan $x = 0$ düşey asimptot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x + \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x + \frac{1}{x} = -\infty$$



$y = |f(x)|$ fonksiyonunun grafiği çizilirken önce $f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilir x ekseninin üstünde olan parçalar aynen bırakılırken altındaki parçaların x eksenine göre simetriği alınır. Buna göre fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



$$y = \left| x + \frac{1}{x} \right|$$

□

Örnek 25.16. $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

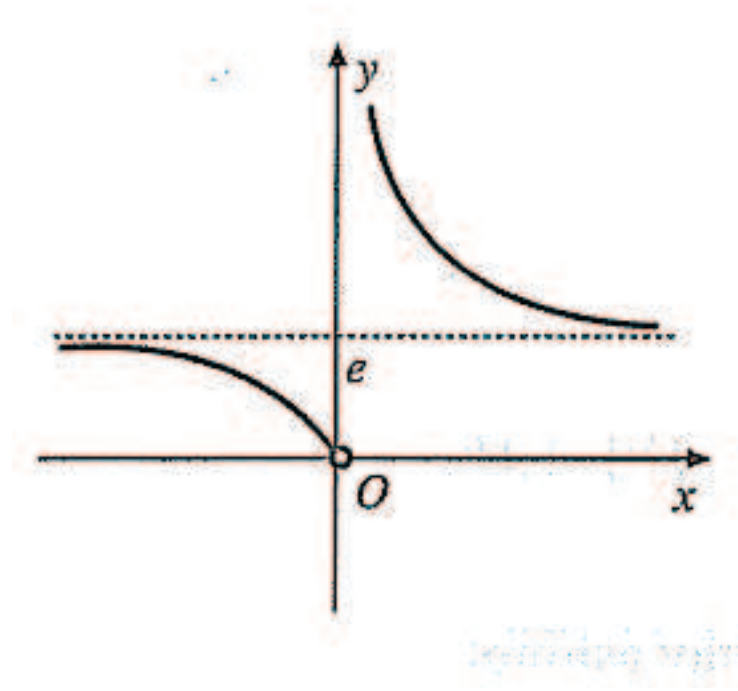
$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow \\
f'(x) &= e^{\frac{x+1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) < 0 \Rightarrow \text{devamlı azalan} \\
f'(x) &= e^{\frac{x+1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \Rightarrow \\
f''(x) &= e^{\frac{x+1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) + e^{\frac{x}{1+x}} \left(\frac{2}{x^3} \right) \\
&= e^{\frac{x}{1+x}} \left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} \right) \Rightarrow x = 0 \text{ tanımsızlık noktası (çift kat kök), } x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow -1/2$	$-1/2 \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	—	—	—
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan	$\searrow$ azalan
f'' in işareti	—	+(çift kat kök)	+
f nin davranışı	Aşağı konkav $\frown$	yukarı konkav $\smile$	yukarı konkav $\smile$
	0 dönüm noktası		

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} = \infty$, olduğundan $x = 0$ düşey asimptot

$\lim_{x \rightarrow 0^0} f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{\frac{x+1}{x}} = e$ yatay asimptot



□

Örnek 25.17. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow x < -1, x > 1 \Rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \text{ tanım kümesi}$$

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ tanımsızlık noktası}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2-1} > 0 \Rightarrow$$

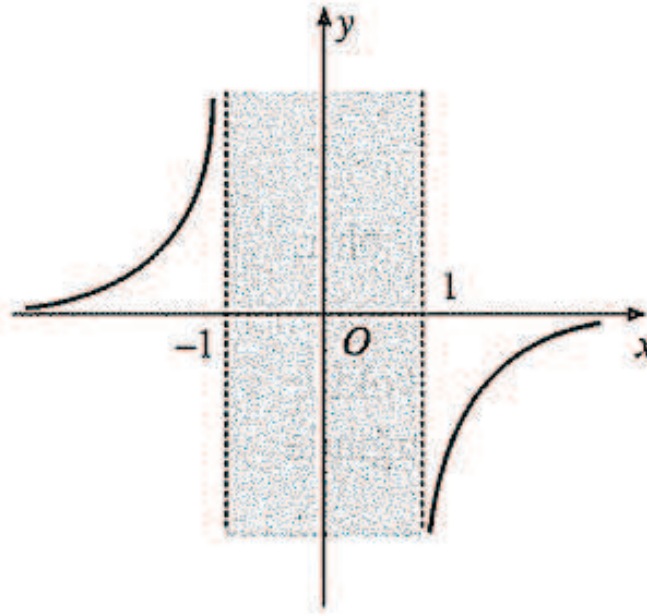
$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(x^2-1)^{-2} 2x \\ &= -\frac{4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ tanımsızlık noktası (çift kat kök)} \end{aligned}$$

Aralık	$-\infty \longleftrightarrow -1$	$-1 \longleftrightarrow 0$	$0 \longleftrightarrow 1$	$1 \longleftrightarrow \infty$
f nin tanım kümesi	Tanımlı	Tanımsız	Tanımsız	Tanımlı
f' in işareti	+	Tanımsız	Tanımsız	+
f nin davranışı	↗ artan	Tanımsız	Tanımsız	↗ artan
f'' in işareti	-	Tanımsız	Tanımsız	-
f nin davranışı	Aşağı konkav ∩			Aşağı konkav ∩

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \ln \frac{x-1}{x+1} = \infty, \text{ olduğundan } x = -1 \text{ düşey asimptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x-1}{x+1} = \infty, \text{ olduğundan } x = 1 \text{ düşey asimptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} = 0 \text{ yatay asimptot}$$



□

26. Belirsiz Şekiller ve L'Hôpital Kuralı

Bir f fonksiyonun $x \rightarrow a$ için limitini aldığımızda belirsiz şekiller denilen

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

ifadelerinden biriyle karşılaşabiliriz. Bu tip limitler L'Hôpital Kuralı olarak bilinen bu kural Fransız matematikçi Guillaume de l'Hôpital tarafından verilmiştir.

26.1. $\frac{0}{0}$ Belirsiz Şekli. Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar ve $x = a$ noktasında sıfır değerini alıyorsa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti $\frac{0}{0}$ ifadesini alır ki anlamsız bir ifade olup hesaplanamaz. Bu yüzden $\frac{0}{0}$ ifadesine belirsiz şekil denir. Bazen (her zaman değil) bu belirsiz şekilleri, pay ve paydada düzenlemeler yaparak, sadeleştirmeler yaparak ve bazı cebirsel hileler yaparak giderebiliriz. Ancak çoğunlukla L'Hôpital Kuralı ile bu belirsizliği gideririz.

Teorem 26.1. (*L'Hôpital Kuralı*) $f(a) = g(a) = 0$ ve $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları a noktasını da içeren bir I açık aralıkta diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $x \neq a$ için $g'(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uyarı 26.2.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitini bulmak için $\frac{0}{0}$ belirsiz formunu elde ettiğimiz sürece türev almaya devam edeceğiz. Pay veya paydadaki limitlerden en az biri sıfırdan farklı olursa sonuç limitin değeri olacaktır. Ayrıca pay ve paydada devamlı sıfır olma durumu söz konusu ise *L'Hôpital Kuralı* uygulanamaz.

Örnek 26.3. Aşağıdaki fonksiyonların limit değerlerini bulunuz.

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} & 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x^2 - 3x + 1} \end{array}$$

Çözüm 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x - \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos x}{1} = 2$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/2(1+x)^{-1/2}}{1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0$$

4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{0} = \infty, x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{0} = -\infty, x < 0 \end{aligned}$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{4x - 3} = 1$$

□

26.2. $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsiz Şekli. Bu belirsizlik halinde de L'Hôpital Kuralı geçerlidir. Yani $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ ve $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları a noktasını da içeren bir I açık aralığında diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $x \neq a$ için $g'(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Örnek 26.4. Aşağıdaki fonksiyonların limit değerlerini bulunuz.

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$$

Çözüm 1)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} &= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4x}{6x + 5} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4x}{6x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sec^2 x}{\tan x}} = 1$$

□

26.3. $0 \cdot \infty$ Belirsiz Şekli. $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ eşitliği yardımı ile $0 \cdot \infty$ Belirsiz şekli $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz şekillerinden birine dönüşür.

Örnek 26.5. Aşağıdaki fonksiyonların limit değerlerini bulunuz.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} e^x$$

Çözüm 1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \infty \cdot 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

2)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x &= 0 \cdot \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sec^2 x} = 0\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} e^x &= 0 \cdot \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} e^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty\end{aligned}$$

□

26.4. $\infty - \infty$ Belirsiz Şekli. $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$ eşitliği yardımı ile $\infty - \infty$ Belirsiz şekli $\frac{0}{0}$ belirsiz şekiline dönüşür.

Örnek 26.6. Aşağıdaki fonksiyonların limit değerlerini bulunuz.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

Çözüm 1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) &= \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) &= \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) \frac{(x + \sqrt{x^2 + x})}{(x + \sqrt{x^2 + x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 + x)}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 + x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-1/2}(2x + 1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

26.5. $0^0, \infty^0, 1^\infty$ Belirsiz Şekilleri. $y = f(x)^{g(x)}$ fonksiyonunda $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ veya $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ veya $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ olması durumunda bu belirsiz şekilleri elde ederiz. Bu belirsiz şekillerde limit almak için ise

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$$

dönüşümü ile bildiğimiz forma getirebiliriz.

Örnek 26.7. Aşağıdaki fonksiyonların limit değerlerini bulunuz.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^{\sin x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$$

Çözüm 1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - e^x)^{\sin x} &= 0^0 \Rightarrow y = (1 - e^x)^{\sin x} \Rightarrow \\
\ln y &= \sin x \ln (1 - e^x) \Rightarrow \\
\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x \ln (1 - e^x) \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln (1 - e^x)}{\frac{1}{\sin x}} \\
&\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-e^x}{(1 - e^x)}}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cos x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{\cos x}}_{=1} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{(1 - e^x)}}_{\frac{0}{0}} \\
&\quad \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{(1 - e^x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{e^x} = 0 \right\} \\
\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln y &= \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} &= \infty^0 \Rightarrow y = (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \Rightarrow \\
\ln y &= \frac{1}{\ln x} \ln (\cot x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \ln (\cot x) \\
\stackrel{||\infty||}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\csc^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\sin x \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \cos 2x} = -1 \Rightarrow \\
\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \ln y = -1 \Rightarrow y = e^{-1}
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} &= 1^\infty \Rightarrow y = (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln (1 + 3x) \Rightarrow \\
\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln (1 + 3x) \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{(1+3x)}}{1} = 3 \Rightarrow \\
\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \ln y = 3 \Rightarrow y = e^3
\end{aligned}$$

□

27. Optimizasyon Problemlerine Uygulanması

Bir şeyi optimize etmek, bazı beklentiler eşliğinde onun maksimum veya minimum değerlerine ulaşmasını sağlamaktır. Örneğin

1) Sabit bir çevre uzunluğuna sahip bir dikdörtgenin maksimum alana sahip olması için ölçüleri ne olmalıdır? (10 çevre ölçüsüne sahip dikdörtgeni düşünün 1*4, 2*3 gibi uzunluklara sahip olabilir dikdörtgen ve bunlardan en büyük alan 6 dır gibi...)

2) Silindir şeklindeki bir konserve kutusunun en düşük maliyeti için ölçüleri ne olmalıdır?

Bu ve benzeri örneklerde maksimum ve minimum fonksiyonundan bahsedeceğiz ve problemin çözümü için ise diferansiyel hesap devreye girecektir.

Uyarı 27.1. Bir optimizasyon problemini çözmek için aşağıdaki adımlar takip edilir:

- 1) Problemlerde verilenler değişkenler ile gösterilir.
 - 2) Maksimum ya da minimum olması istenen çoklukla ilgili bir ifade bulunur.
 - 3) Verilenler kullanılarak bazı değişkenler yok edilir. Tek değişkenli bir fonksiyon elde edilir.
 - 4) Probleme göre değişkenin sınırları tespit edilir.
 - 5) Kritik noktalar bulunur.
 - 6) Fonksiyonun kritik noktalar ve aralığın uç noktalarındaki değerleri bulunur.
 - 7) Bulunan fonksiyon değerlerinin en küçüğü fonksiyonun en küçük değeri, en büyüğü de fonksiyonun en büyük değeridir.
- Bu problemlerde maksimum ve minimumlar mutlak maksimum ve mutlak minimumlardır.

Örnek 27.2. *Toplamları 40 olan iki pozitif tamsayının kareleri toplamı en fazla kaç olur?*

Çözüm 1)

$$x \rightarrow 1.\text{Sayı}$$

$$y \rightarrow 2.\text{Sayı}$$

2)

$$\max(x^2 + y^2) = ?$$

3)

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \Rightarrow y = 40 - x \Rightarrow \\ \max(x^2 + y^2) &= \max(x^2 + (40 - x)^2) = ? \\ f(x) &= x^2 + (40 - x)^2 \end{aligned}$$

4) x değişkeni 1 den 39 a kadar değer alabileceği için $x \in [1, 39]$

5) $f(x) = x^2 + (40 - x)^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

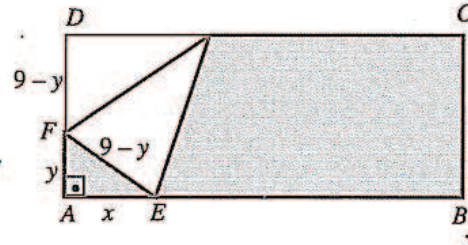
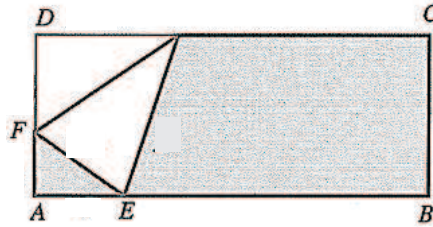
$$f'(x) = 2x - 2(40 - x) = -80 + 4x = 0 \Rightarrow x = 20 - \text{kritik nokta}$$

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 + (40 - 1)^2 = 1522 \\ f(20) &= 20^2 + (40 - 20)^2 = 800 \\ f(39) &= 39^2 + (40 - 39)^2 = 1522 \end{aligned}$$

7) En büyük değer 1522 ve en küçük değer 800 dür. Buna göre alabileceği en büyük toplam 1522 dir. □

Örnek 27.3. *9cm eninde dikdörtgen şeklindeki bir kağıt şerit, şekildeki gibi D köşesi kıvrılarak [AS] kenarı üzerine getiriliyor. FAE üçgeninin alanı en fazla kaç cm^2 olabilir?*



Çözüm 1)

$$\begin{aligned} |FA| &\rightarrow y \\ |AE| &\rightarrow x \end{aligned}$$

2)

$$\max \left(\frac{1}{2}xy \right) = ?$$

3)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (9 - y)^2 \Rightarrow x^2 = 81 - 18y \Rightarrow y = \frac{81 - x^2}{18} \Rightarrow \\ \max \left(\frac{1}{2}xy \right) &= \max \left(\frac{1}{2}x \left(\frac{81 - x^2}{18} \right) \right) = ? \\ f(x) &= \frac{1}{2}x \left(\frac{81 - x^2}{18} \right) = \frac{1}{36}x(81 - x^2) \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} y &\in (0, 9) \Rightarrow 0 < \frac{81 - x^2}{18} < 9 \Rightarrow \\ 0 &< x < 9, \end{aligned}$$

5) $f(x) = \frac{1}{36}x(81 - x^2)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$f'(x) = \frac{1}{36}((81 - x^2) - x * 2x) = 0 \Rightarrow 81 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3\sqrt{3}, x_2 = 3\sqrt{3}$$

negatif değer alamayacağından $3\sqrt{3}$ – kritik nokta

Aralık	$0 \longleftrightarrow 3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3} \longleftrightarrow 9$
f' in işareti	+	–
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan
	$\nearrow$  $\searrow$ lokal maksimum	

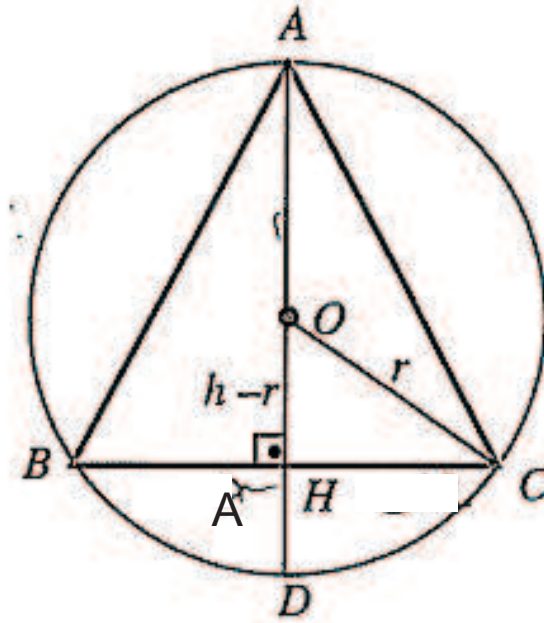
6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \frac{1}{36}1 * (81 - 1^2) = \frac{20}{9} \approx 2.222\ 2 \\
 f(3\sqrt{3}) &= \frac{1}{36} * 3\sqrt{3} * \left(81 - (3\sqrt{3})^2\right) = \frac{9}{2}\sqrt{3} \approx 7.794\ 2 \\
 &= \frac{1}{36}(81 * 3\sqrt{3} - 81\sqrt{3}) \\
 f(0) &= \frac{1}{36}9 * (81 - 9^2) = 0
 \end{aligned}$$

7) En büyük değer 7.794 2 ve en küçük değer 0 dır. Buna göre maksimum alan 7.794 2 dir.

□

Örnek 27.4. r yarıçaplı bir çemberin içine çizilebilen bir ikizkenar üçgenin alanı en fazla ne olur?



Çözüm 1)

$$\begin{aligned} |AH| &\rightarrow h \\ |BC| &\rightarrow a \end{aligned}$$

2)

$$\max \left(\frac{1}{2}ah \right) = ?$$

3)

$$\begin{aligned} (h-r)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 &= r^2 \Rightarrow a^2 = 4(2hr - h^2) \Rightarrow a = 2\sqrt{(2hr - h^2)} \Rightarrow \\ \max \left(\frac{1}{2}ah \right) &= \max \left(\frac{1}{2}2\sqrt{(2hr - h^2)} * h \right) = ? \\ f(h) &= \sqrt{(2hr - h^2)} * h \end{aligned}$$

4)

$$h \in (0, 2r)$$

5) $f(h) = \sqrt{(2hr - h^2)} * h$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$\begin{aligned} f'(h) &= \frac{1}{2} (2hr - h^2)^{-1/2} (2r - 2h) h + (2hr - h^2)^{1/2} \\ &= \frac{(2r - 2h) h + 2 (2hr - h^2)}{2 (2hr - h^2)^{1/2}} = \frac{-2h (2h - 3r)}{2 (2hr - h^2)^{1/2}} = 0 \Rightarrow h_1 = 0, h_2 = \frac{3r}{2} - \text{kritik nokta} \end{aligned}$$

:

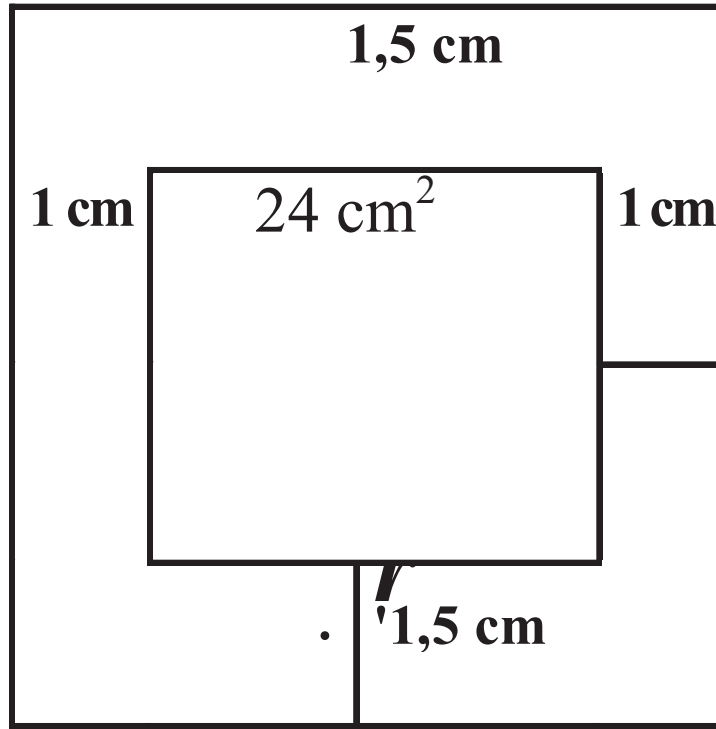
Aralık	$0 \longleftrightarrow \frac{3r}{2}$	$\frac{3r}{2} \longleftrightarrow 2r$
f' in işareti	+	-
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan
	$\nearrow$  $\searrow$ lokal maksimum	

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{(2 * 0 * r - 0^2)} * 0 = 0 \\ f\left(\frac{3r}{2}\right) &= \sqrt{\left(2 * \frac{3r}{2} * r - \left(\frac{3r}{2}\right)^2\right)} * \frac{3r}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 \\ f(2r) &= \sqrt{(2 * 2r * r - (2r)^2)} * 2r = 0 \end{aligned}$$

7) En büyük değer $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$ ve en küçük değer 0 dır. Buna göre maksimum alan $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$ dir. □

Örnek 27.5. Bir kağıdın 24cm^2 lik kısmına yazı yazılacaktır. Alttan ve üstten 1.5cm , sağ ve soldan 1cm boşluk bırakılacağına göre, bu kağıdın alanı en az kaç cm^2 olmalıdır?



Çözüm 1)

$x \rightarrow$ yazı yazılacak alanın kısa kenarı

$y \rightarrow$ yazı yazılacak alanın uzun kenarı

2)

$$\min((x+3)(y+2))=?$$

3)

$$\begin{aligned}
 xy &= 24 \Rightarrow y = \frac{24}{x} \\
 \min((x+3)(y+2)) &= \min\left((x+3)\left(\frac{24}{x}+2\right)\right) = ? \\
 f(x) &= (x+3)\left(\frac{24}{x}+2\right)
 \end{aligned}$$

4)

$$x \in (0, 12)$$

5) $f(x) = (x+3)\left(\frac{24}{x}+2\right)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{24}{x}+2\right) + (x+3)\left(-\frac{24}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}(x^2-36) = 0 \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 6 \\
 x &= 6 - \text{kritik nokta (negatif değer olamayacağından)}
 \end{aligned}$$

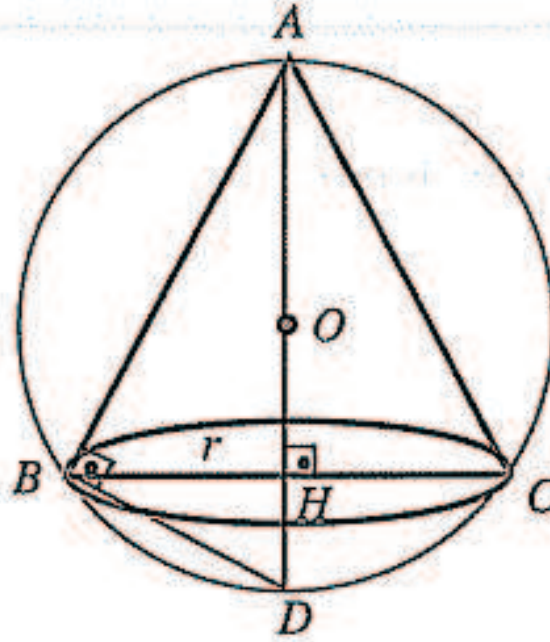
Aralık	$0 \longleftrightarrow 6$	$6 \longleftrightarrow 12$
f' in işareti	-	+
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan
	$\searrow \boxed{\cup} \nearrow$ lokal minimum	

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x+3)\left(\frac{24}{x}+2\right) \\
 f(0) &\rightarrow \text{tanımsız} \\
 f(6) &= (6+3)\left(\frac{24}{6}+2\right) = 54 \\
 f(12) &= (12+3)\left(\frac{24}{12}+2\right) = 60
 \end{aligned}$$

7) En büyük değer 60 ve en küçük değer 54 dir. Buna göre alabileceği minimum alan 54 cm^2 olmalıdır. □

Örnek 27.6. Yarıçapı 6cm olan bir küre içine yerleştirilen bir dik koninin hacmi en fazla kaç cm^3 olabilir?



Çözüm 1)

$$|AH| = h \rightarrow \text{yükseklik}$$

$$|BH| = r \rightarrow \text{taban uzunluğu}$$

2)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\max\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) = ?$$

3) $\triangle ABD$ üçgeninde Euclid bağıntısını kullanırsak 12 çap olduğundan $|AH| = h$ ve $|HD| = 12 - h$

$$\begin{aligned} r^2 &= h * (12 - h) \Rightarrow \\ V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h (12 - h) h \\ \max \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h \right) &= \max \left(\frac{1}{3}\pi h^2 (12 - h) \right) = ? \\ f(h) &= \frac{1}{3}\pi h^2 (12 - h) \end{aligned}$$

4)

$$h \in (0, 12)$$

5) $f(h) = \frac{1}{3}\pi h^2 (12 - h) = \frac{1}{3}\pi (12h^2 - h^3)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi (24h - 3h^2) = 0 \Rightarrow h_1 = 0, h_2 = 8 - \text{kritik nokta}$$

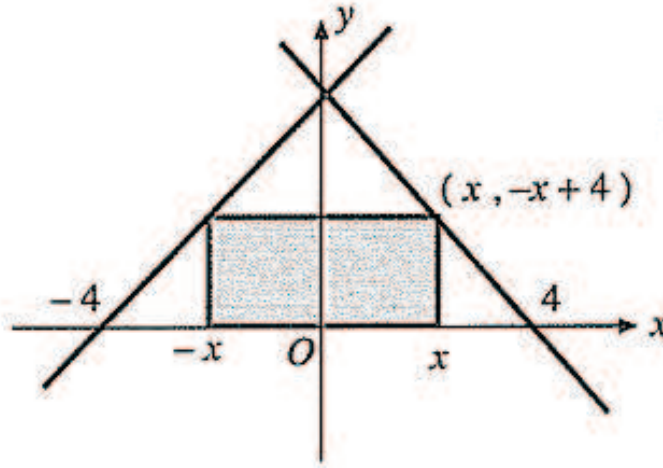
Aralık	$0 \longleftrightarrow 8$	$8 \longleftrightarrow 12$
f' in işareti	+	-
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan
	$\nearrow \boxed{\cap} \searrow$ lokal maksimum	

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{1}{3}\pi (12h^2 - h^3) \\ f(0) &= 0 \\ f(8) &= \frac{1}{3}\pi (12 * 8^2 - 8^3) = \frac{256}{3}\pi \approx 268.08 \\ f(12) &= \frac{1}{3}\pi (12 * 12^2 - 12^3) = 0 \end{aligned}$$

7) En büyük değer 268.08 ve en küçük değer 0 dır. Buna göre alabileceği maksimum hacim 268.08 cm^3 olmalıdır? $\square$

Örnek 27.7. $y = x + 4$, $y = -x + 4$ doğruları ve Ox - eksenini tarafından sınırlanan bölgede bulunan, iki köşesi verilen doğrular, iki köşesi de Ox - eksenini üzerinde olan dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 olabilir?



Çözüm 1)

$x \rightarrow$ alanın kısa kenarı

$y \rightarrow$ alanın uzun kenarı

2)

$$\max(2x * y) = ?$$

3) Nokta aynı zamanda doğru üstünde olduğundan,

$$y = -x + 4$$

$$\max(2x * y) = \max(2x * (-x + 4)) =$$

$$f(x) = 2x * (-x + 4) = -2x^2 + 8x$$

4)

$$x \in (0, 4)$$

5) $f(x) = -2x^2 + 8x$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$f'(x) = -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2 - \text{kritik nokta}$$

Aralık	$0 \longleftrightarrow 2$	$2 \longleftrightarrow 4$
f' in işareti	+	-
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan
	$\nearrow \quad \boxed{\cap} \quad \searrow$	lokal maksimum

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$f(x) = -2x^2 + 8x$$

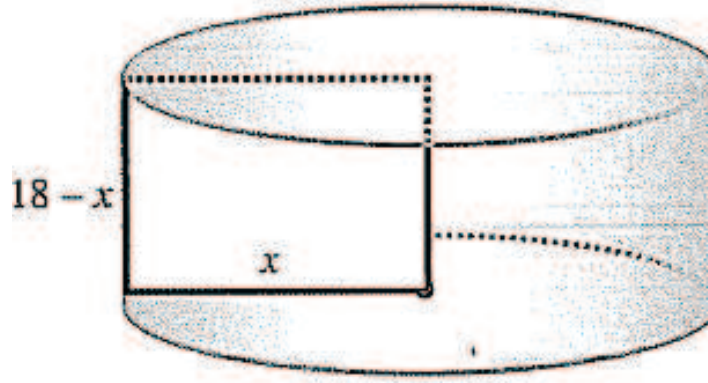
$$f(0) = 0$$

$$f(2) = -2 * 2^2 + 8 * 2 = 8$$

$$f(4) = -2 * 4^2 + 8 * 4 = 0$$

7) En büyük değer 8 ve en küçük değer 0 dır. Buna göre alabileceği maksimum alan $8 br^2$ olmalıdır. $\square$

Örnek 27.8. Çevresi 36cm olan dikdörtgen şeklindeki bir karton kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel silindirin hacmi en fazla kaç cm^3 olabilir?



Çözüm 1)

$x \rightarrow$ alanın kısa kenarı

$y \rightarrow$ alanın uzun kenarı

2)

$$\max(\pi x^2 y) = ?$$

3) Dikdörtgenin çevresi

$$2(x + y) = 36 \Rightarrow y = 18 - x$$

$$\max(\pi x^2 y) = \max(\pi x^2 (18 - x)) =$$

$$f(x) = \pi x^2 (18 - x) = \pi (18x^2 - x^3)$$

4)

$$x \in (0, 18)$$

5) $f(x) = \pi(18x^2 - x^3)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$f'(x) = \pi(36x - 3x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 12 - \text{kritik nokta}$$

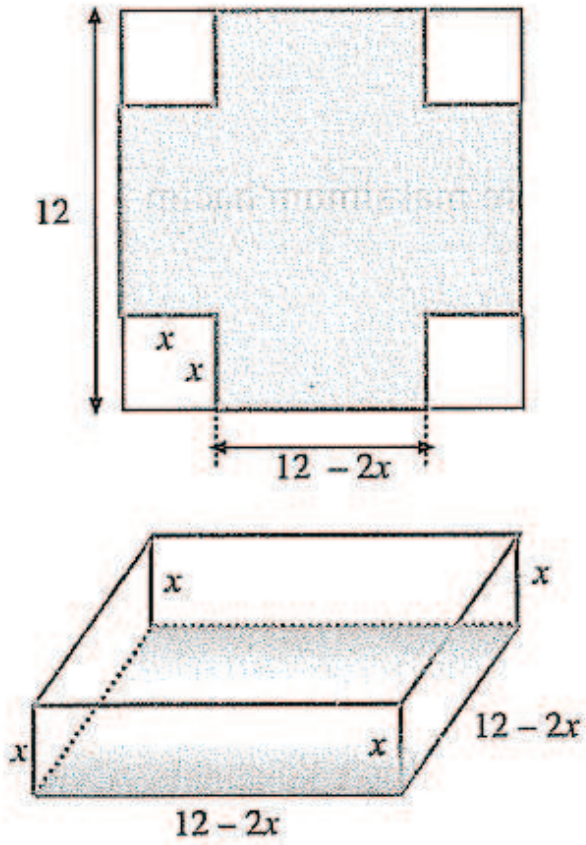
Aralık	$0 \longleftrightarrow 12$	$12 \longleftrightarrow 18$
f' in işareti	+	-
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan
	$\nearrow \boxed{\text{—}} \searrow$ lokal maksimum	

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi(18x^2 - x^3) \\ f(0) &= 0 \\ f(12) &= \pi(18 * 12^2 - 12^3) = 864\pi \approx 2714.3 \\ f(18) &= \pi(18 * 18^2 - 18^3) = 0 \end{aligned}$$

7) En büyük değer 2714.3 ve en küçük değer 0 dır. Buna göre alabileceği maksimum hacim 2714.3cm^3 olmalıdır. □

Örnek 27.9. Bir kenarının uzunluğu 12cm olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden birer eşit alanlı kare kesilerek geriye kalan parçadan üstü açık bir kare prizma yapılıyor. Bu prizmanın hacmi en fazla kaç cm^3 olabilir?



Çözüm 1)

$x \rightarrow$ yükseklik
 $y \rightarrow$ taban kenarı

2)

$$\max(y^2 x) = ?$$

3) Uzunluktan

$$\begin{aligned}
2x + y &= 12 \Rightarrow y = 12 - 2x \\
\max(y^2x) &= \max((12 - 2x)^2x) = \\
f(x) &= (12 - 2x)^2x = 4x^3 - 48x^2 + 144x
\end{aligned}$$

4)

$$y \in (0, 12) \Rightarrow x \in (0, 6)$$

5) $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 6 - \text{kritik nokta}$$

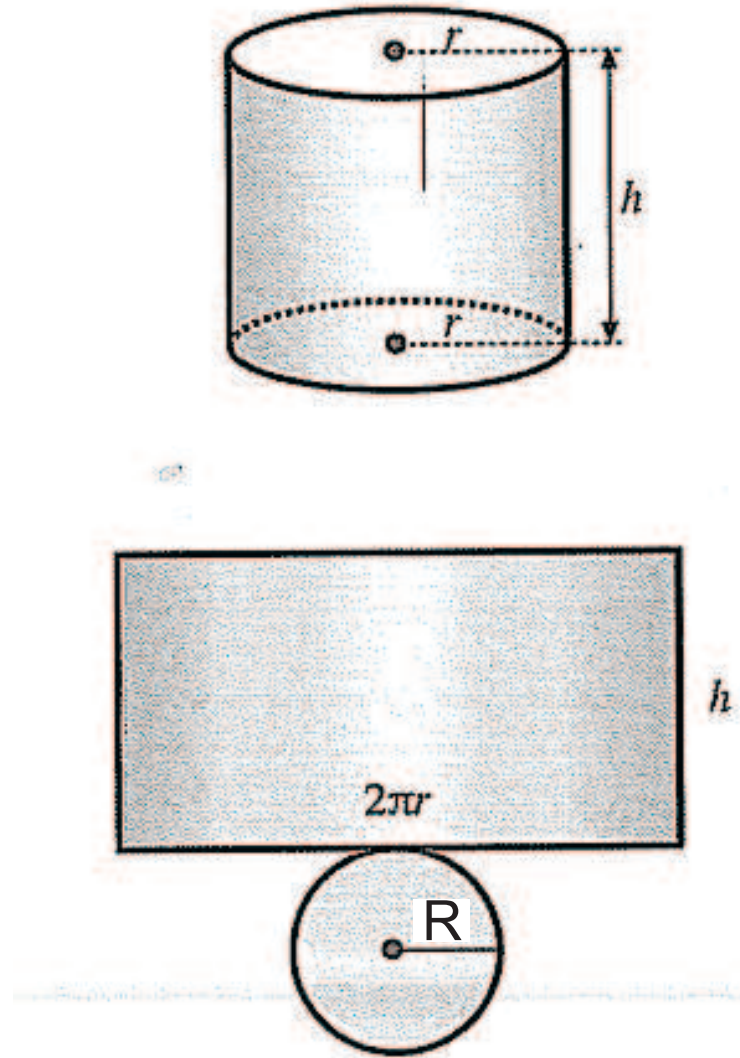
Aralık	$0 \longleftrightarrow 2$	$2 \longleftrightarrow 6$	$6 \longleftrightarrow +$
f' in işareti	+	-	+
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan
	$\nearrow$  $\searrow$ lokal maksimum		

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^3 - 48x^2 + 144x \\
f(0) &= 0 \\
f(2) &= 4 * 2^3 - 48 * 2^2 + 144 * 2 = 128 \\
f(6) &= 4 * 6^3 - 48 * 6^2 + 144 * 6 = 0
\end{aligned}$$

7) En büyük değer 128 ve en küçük değer 0 dır. Buna göre alabileceği maksimum hacim 128cm^3 olmalıdır. □

Örnek 27.10. Bir sanayici, alüminyumdan dik dairesel silindir şeklinde üstü açık, 64cm^3 hacminde kutular yapmaktadır. En az alüminyum kullanması için yapacağı siliridirin taban yarıçapı kaç cm olmalıdır?



Çözüm 1)

$r \rightarrow$ yarıçap

$h \rightarrow$ yükseklik

$y \rightarrow$ dikdörtgenparçanın uzun kenarı

2)

$$\begin{aligned}
 Alan &= \pi r^2 + hy \\
 y &= 2\pi r \\
 \max(\pi r^2 + h * (2\pi r)) &= ?
 \end{aligned}$$

3) Hacim $64cm^3$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 \pi r^2 h &= 64 \Rightarrow h = \frac{64}{\pi r^2} \\
 \max(\pi r^2 + h * (2\pi r)) &= \max\left(\pi r^2 + \frac{64}{\pi r^2} * (2\pi r)\right) = ? \\
 f(r) &= \pi r^2 + \frac{64}{\pi r^2} (2\pi r) = \pi r^2 + \frac{128}{r}
 \end{aligned}$$

4)

$$r \in (0, \infty)$$

5) $f(r) = \pi r^2 + \frac{128}{r}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{128}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} - \text{kritik nokta}$$

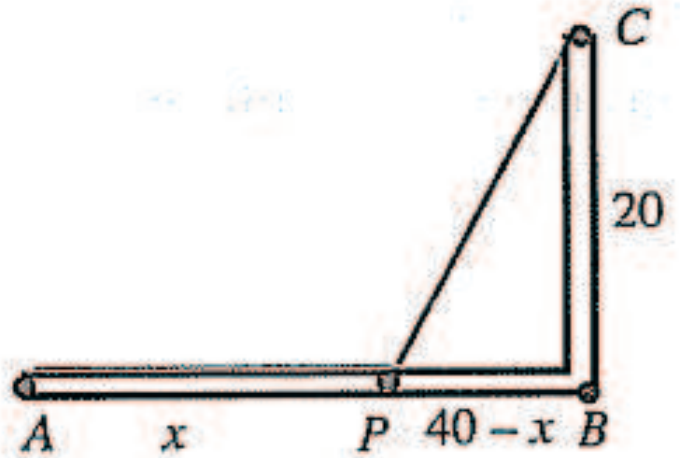
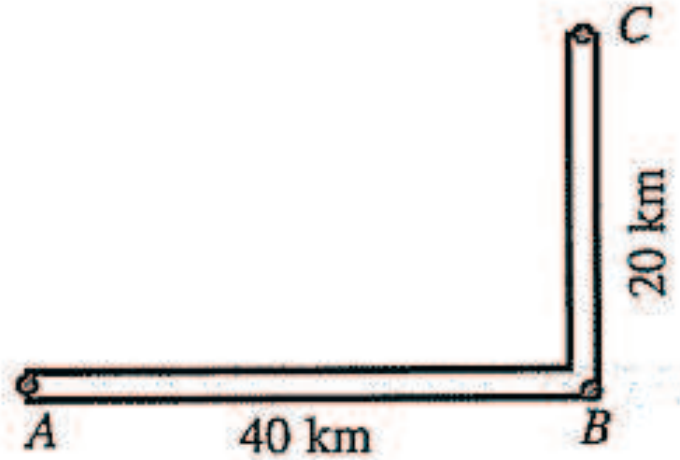
Aralık	$0 \longleftrightarrow 4$	$4 \longleftrightarrow \infty$
f' in işareti	+	-
f nin davranışı	$\nearrow$ artan	$\searrow$ azalan
	$\nearrow \boxed{\quad} \searrow$ lokal maksimum	

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \pi r^2 + \frac{128}{r} \\
 f(0) &= \infty \\
 f\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) &= \pi \left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 + \frac{128}{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)} = 16 \frac{\pi}{\sqrt[3]{\pi^2}} + 32 \sqrt[3]{\pi} \approx 70.3 \\
 f(\infty) &= \infty
 \end{aligned}$$

7) En büyük değer ∞ ve en küçük değer 70.3 dır. Buna göre minimum değeri veren yarıçap değeri de $r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} = 2.7311$ olmalıdır. $\square$

Örnek 27.11. B köyü A köyünün 40km doğusunda, C köyü de B nin 20km kuzeyindedir. A ile B ve B ile C arasında stabilize yol mevcuttur. A ile C arası asfaltlanacaktır. 1km stabilize yolun asfaltlanması 30 milyar TL ye, 1km yeni yolun açılıp asfaltlanması 60 milyar TL ye mal olmaktadır. A ile C arasındaki asfalt yol en az kaç milyara mal olur?



Çözüm 1)

 $x \rightarrow |AP|$ uzunluğu $y \rightarrow |PC|$ uzunluğu

2)

$$\min (30x + 60y) = ?$$

3) Hipotenüsten

$$\begin{aligned} y^2 &= 20^2 + (40 - x)^2 \Rightarrow y = \sqrt{20^2 + (40 - x)^2} \\ \min (30x + 60y) &= \min \left(30x + 60\sqrt{20^2 + (40 - x)^2} \right) = \\ f(x) &= 30x + 60\sqrt{20^2 + (40 - x)^2} \end{aligned}$$

4)

$$x \in (0, 40)$$

5) $f(x) = 30x + 60\sqrt{20^2 + (40 - x)^2}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulalım:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 30 + 60 * \frac{1}{2} (20^2 + (40 - x)^2)^{-1/2} * 2(40 - x) * (-1) = 0 \Rightarrow \\ 2(40 - x) &= (20^2 + (40 - x)^2)^{1/2} \Rightarrow 4(40 - x)^2 = 20^2 + (40 - x)^2 \Rightarrow \\ 3(40 - x)^2 &= 20^2 \Rightarrow 40 - x = \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 40 - \frac{20}{\sqrt{3}} - \text{kritik nokta} \end{aligned}$$

Aralık	$0 \longleftrightarrow 40 - \frac{20}{\sqrt{3}}$	$40 - \frac{20}{\sqrt{3}} \longleftrightarrow 40$
f' in işareti	-	+
f nin davranışı	$\searrow$ azalan	$\nearrow$ artan
	$\searrow \boxed{\text{min}} \nearrow$ lokal minimum	

6) Kritik nokta ve uç noktalardaki değerleri hesaplayalım:

$$f(x) = 30x + 60\sqrt{20^2 + (40 - x)^2}$$

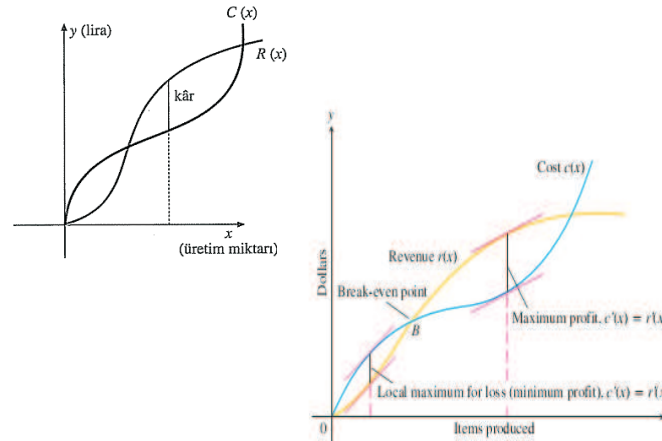
$$f(0) = 30 * 0 + 60\sqrt{20^2 + (40 - 0)^2} = 1200\sqrt{5} \approx 2683.3$$

$$f\left(40 - \frac{20}{\sqrt{3}}\right) = 30 * \left(40 - \frac{20}{\sqrt{3}}\right) + 60 * \sqrt{(20)^2 + \left(40 - \left(40 - \frac{20}{\sqrt{3}}\right)\right)^2} = 600\sqrt{3} + 1200 \approx 1385.6$$

$$f(40) = 30 * 40 + 60\sqrt{20^2 + (40 - 40)^2} = 2400$$

7) En büyük değer 2683.3 ve en küçük değer 1385.6 dır. Buna göre A ile C arasındaki asfalt yol en az 1385.6 milyara mal olur. $\square$

Örnek 27.12. x parça mal satıldığında, toplam mâl oluş fiyatı $C(x)$, toplam gelir $R(x)$ ise, kâr $P(x) = R(x) - C(x)$ dir. Maksimum kârın marjinal gelir ile marjinal mâl oluşun eşit olduğu durumlarda gerçekleştiğini gösteriniz.



Çözüm

$P'(x) \rightarrow$ Maksimum Kâr

$R'(x) \rightarrow$ Marjinal Gelir

$C'(x) \rightarrow$ Marjinal mâl oluş

$R(x)$ ve $C(x)$ in $x > 0$ için türevli olduğunu kabul edelim. $P(x) = R(x) - C(x)$ maksimuma sahipse $P'(x) = 0$ dir. Dolayısıyla

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0 \Rightarrow R'(x) = C'(x)$$

olur. Bu ise marjinal gelir ile marjinal mâl oluşun eşit olduğu anlamına gelir. □

28. Newton Yöntemi

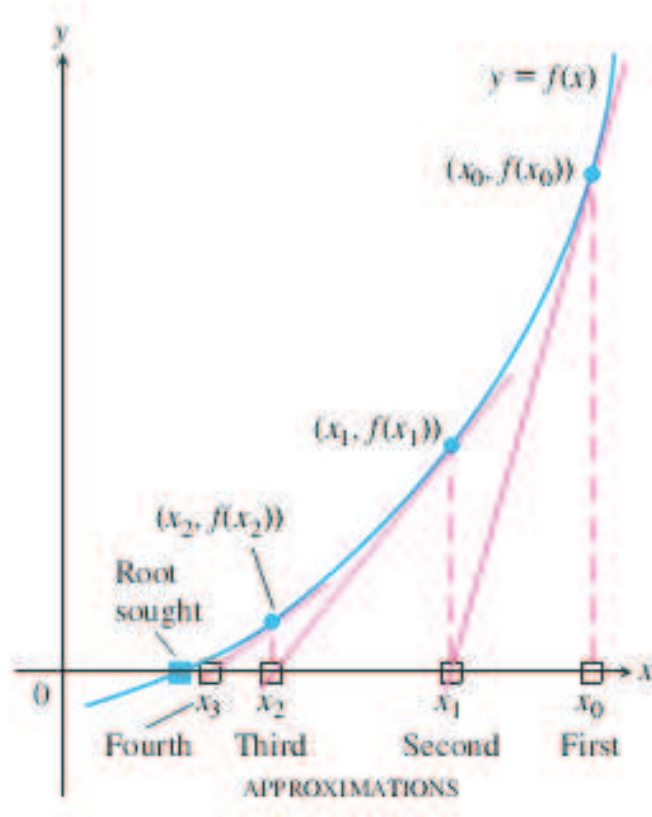
Matematikte en önemli sorunlardan birisi denklemlerin çözümleridir. $x^2 - 3x + 2 = 0$ gibi kuadretik bir polinom denklemin çözümü için formül vardır. Ancak 3.,4. ve daha yüksek mertebeden polinomlar için bu mümkün değildir veya $x - \sin x = 0$ denkleminin çözümü için bir formül yoktur. Veya iki eğrinin örneğin $y = \tan x$ ve $y = x^3$ eğrileri hangi noktada kesişir sorusunun cevabını almak gibi..Bunun için bazı sayısal yöntemler verilmiştir. Bu bölümde türevi içerdikleri için Newton yöntemi diye adlandırılma yöntemi vereceğiz.

Uyarı 28.1. *Newton Yöntemini uygulamak için aşağıdaki yöntem uygulanır.*

- 1) x_0 başlangıç yaklaşımı alınır,
- 2)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0$$

formülü ile diğer yaklaşımlar bulunur ve çözüme yaklaşılr.



Örnek 28.2. $x^2 - 2 = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Gerçek çözüm $x = \pm\sqrt{2} = \pm 1.4142$ dir ancak Newton yöntemi ile çözümü elde edelim. $f'(x) = 2x$

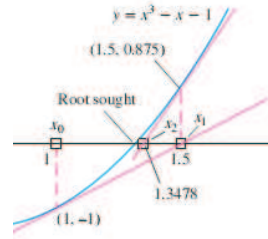
$$\begin{array}{llll}
 x_0 = 1 & f(x_0) = 1^2 - 2 = -1 & f'(x_0) = 2 * 1 = 2 & x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(-1)}{2} = \frac{3}{2} \\
 x_1 = \frac{3}{2} & f(x_1) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} & f'(x_1) = 2 * \frac{3}{2} = 3 & x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{17}{12} \approx 1.4167 \\
 x_2 = \frac{17}{12} & f(x_2) = \left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2 = \frac{1}{144} & f'(x_2) = 2 * \frac{17}{12} = \frac{17}{6} & x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{408} \approx \underbrace{1.4142}_{\text{Gerçek Değer}}
 \end{array}$$

□

Örnek 28.3. $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonu ile $g(x) = 1$ doğruları hangi noktalarda kesişir.

Çözüm $x^3 - x$ fonksiyonu ile $g(x) = 1$ fonksiyonunun kesim noktası $x^3 - x = 1 \Rightarrow x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin çözüm noktasını bularak gerçekleştirilir. $h(x) = x^3 - x - 1 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.3478 26087
2	1.3478 26087	0.1006 82173	4.4499 05482	1.3252 00399
3	1.3252 00399	0.0020 58362	4.2684 68292	1.3247 18174
4	1.3247 18174	0.0000 00924	4.2646 34722	1.3247 17957
5	1.3247 17957	-1.8672E-13	4.2646 32999	1.3247 17957



□

Uyarı 28.4. *Newton yöntemi $f'(x_n) = 0$ olması durumunda gerçek çözüme yaklaşılamaz!*

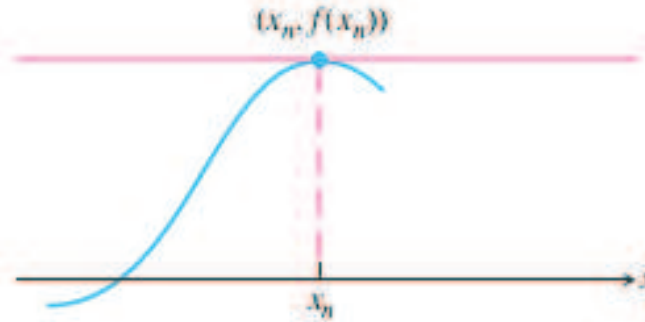


FIGURE 4.49 If $f'(x_n) = 0$, there is no intersection point to define x_{n+1} .

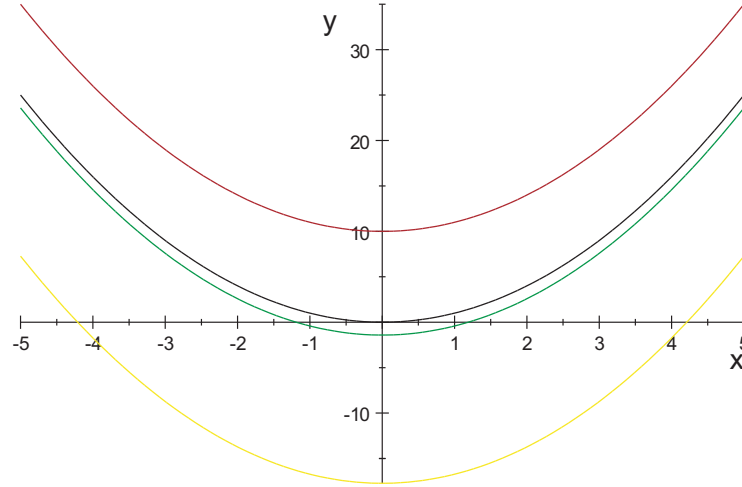
CHAPTER 5

İntegral

29. Belirsiz İntegral

Tanım 29.1. $f(x)$ fonksiyonu tanımlı olduğunda $F'(x) = f(x)$ bağıntısını sağlayan bir F fonksiyonu varsa bu F fonksiyonuna f nin bir antitürevidir denir. Antitürevlerin ortak özellikleri, aynı apsisli noktalardaki teğetlerinin paralel olmalarıdır.

Örnek 29.2. $f(x) = 2x$ fonksiyonunun antitürevlerinden bazıları, x^2 , $x^2 - \sqrt{2}$, $x^2 + 10$, $x^2 - \sqrt{100\pi}$ dir.



Teorem 29.3. (a, b) açık aralığında $F'(x) = f(x)$ ise, bu aralıkta f nin her bir $G(x)$ antitürevi c bir keyfi sabit olmak üzere $G(x) = F(x) + c$ biçimindedir. Başka bir deyişle, iki antitürev arasındaki fark sabittir.

Tanım 29.4. Bir f fonksiyonun tüm antitürevlerinin sınıfına f fonksiyonunun x değişkenine göre belirsiz integrali denir ve $\int f(x) dx$ ile gösterilir. $\int$ simgesine integral işareti, $f(x)$ fonksiyonuna integrant, x 'e de integrasyon değişkeni adı verilir. Bu tanıma göre

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) + c = \int f(x)$$

Not 29.5. Türev konusunda gördüğümüz bağıntılardan faydalananarak aşağıdaki temel integral alma kurallarını verelim:

$$\begin{array}{ll}
1) \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, m \neq -1 & 2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \\
3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, a > 0 & 4) \int e^x dx = e^x + c \\
5) \int \sin x dx = -\cos x + c & 6) \int \cos x dx = \sin x + c \\
7) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c & 8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \\
9) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c & 10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\
11) \int \sinh x dx = \cosh x + c & 12) \int \cosh x dx = \sinh x + c \\
13) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c & 14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln (x + \sqrt{x^2-1}) + c
\end{array}$$

Teorem 29.6. (İntegral kuralları) Eğer k reel sayı olsun

1) İki fonksiyonun toplamının integrali, integrallerin toplamına eşittir:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2) İki fonksiyonun farkının integrali, integrallerin farkına eşittir:

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

3) Bir fonksiyonun katsayı ile çarpılıp intagrellenmesi, integralin o katsayı ile çarpılmasına eşittir:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Örnek 29.7. Aşağıdaki fonksiyonların integrallerini alınız:

$$\begin{array}{ll}
1) \int (6x^3 - 2x^2 + 8x + 10) dx & 2) \int \left(2 \sin x + 6\sqrt{x^5} + \frac{9}{x} \right) dx \\
3) \int \left(\frac{7}{\cos^2 x} + 2e^x - \frac{4}{1+x^2} \right) dx & 4) \int \left(-\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{x^3+x^2-x+3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
5) \int \left(3^x + e^x + \sinh x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx & 6) \int \left(\cosh x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{5}{x} - x^5 \right) dx
\end{array}$$

Çözüm 1)

$$\begin{aligned}
\int (6x^3 - 2x^2 + 8x + 10) dx &= 6 \int x^3 dx - 2 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 10 \int 1 dx \\
&= 6 \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^3}{3} + 8 \frac{x^2}{2} + 10x + c
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\int \left(2 \sin x + 6\sqrt{x^5} + \frac{9}{x} \right) dx &= 2 \int \sin x dx + 6 \int \sqrt{x^5} dx + 9 \int \frac{1}{x} dx \\
&= -2 \cos x + 6 \frac{x^{7/2}}{7/2} + 9 \ln x + c
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{7}{\cos^2 x} + 2e^x - \frac{4}{1+x^2} \right) dx &= 7 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 2 \int e^x dx - 4 \int \frac{dx}{1+x^2} \\
&= 7 \tan x + 2e^x - 4 \arctan x + c
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\int \left(-\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx &= -2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \underbrace{\frac{x^3}{\sqrt{x}}}_{x^{3-1/2}=x^{5/2}} dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 2 \cot x + \frac{x^{7/2}}{7/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{3/2}}{3/2} + 3 \frac{x^{1/2}}{1/2} + 5 \arcsin x + c \\
&= 2 \cot x + \frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{2x^{3/2}}{3} + 6x^{1/2} + 5 \arcsin x + c
\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
\int \left(3^x + e^x + \sinh x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx &= \int 3^x dx + \int e^x dx + \int \sinh x dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \\
&= \frac{3^x}{\ln 3} + e^x + \cosh x + \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right) + c
\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
\int \left(\cosh x + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{5}{x} - x^5 \right) dx &= \int \cosh x dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + 5 \int \frac{dx}{x} - \int x^5 dx \\
&= \sinh x + \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) + 5 \ln x - \frac{x^6}{6} + c
\end{aligned}$$

□

30. Değişken Değiştirme Yöntemi

g sürekli türevelenebilir bir fonksiyon olmak üzere $x = g(t)$ dönüşümü yardımı ile $dx = g'(t) dt$ ifadesiyle birlikte $\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$ olarak hesaplanır. Ve tekrar $t = g^{-1}(x)$ ters dönüşümü ile x değişkenli ifade elde edilir. Burada g fonksiyonunun tersi olan bir fonksiyon olduğu gerçeği ihmal edilmemelidir.

Örnek 30.1. $\int (1 - 4x)^6 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = 1 - 4x &\Rightarrow dt = -4dx \Rightarrow \\ \int (1 - 4x)^6 dx &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int t^6 \left(-\frac{dt}{4}\right) = -\frac{1}{4} \frac{t^7}{7} + c \Rightarrow \\ &\stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} -\frac{(1 - 4x)^7}{28} + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.2. $\int \frac{(4 + \ln x)^5}{x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = 4 + \ln x &\Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \int \frac{(4 + \ln x)^5}{x} dx &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c \Rightarrow \\ &\stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{(4 + \ln x)^6}{6} + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.3. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = \sqrt{x} &\Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt \Rightarrow \\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int \frac{e^t}{t} 2t dt = 2e^t + c \Rightarrow \\ &\stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} 2e^{\sqrt{x}} + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.4. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = \cos x &\Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \\ \int \frac{\sin x}{\cos x} dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} - \int \frac{dt}{t} = -\ln t + c \Rightarrow \\ &\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} -\ln |\cos x| + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.5. $\int \frac{x^4}{1+x^{10}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = x^5 &\Rightarrow dt = 5x^4 dx \Rightarrow \\ \int \frac{x^4}{1+x^{10}} dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \frac{1}{5} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{5} \arctan t + c \Rightarrow \\ &\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{1}{5} \arctan (x^5) + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = f(x) &\Rightarrow dt = f'(x) dx \Rightarrow \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c \Rightarrow \\ &\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \ln |f(x)| + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.7. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = \cos x + \sin x &\Rightarrow dt = (-\sin x + \cos x) dx \Rightarrow \\ \int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} - \int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + c \Rightarrow \\ &\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} -\ln |\cos x + \sin x| + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.8. $\alpha \neq 1$ olmak üzere $\int (f(x))^\alpha f'(x) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = f(x) &\Rightarrow dt = f'(x) dx \Rightarrow \\ \int (f(x))^\alpha f'(x) dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \Rightarrow \\ &\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.9. $\int \sqrt{\sin^5 x} \cos x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = \sin x &\Rightarrow dt = \cos x dx \Rightarrow \\ \int \sqrt{\sin^5 x} \cos x dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \int t^{5/2} dt = \frac{t^{7/2}}{7/2} + c \Rightarrow \\ &\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{2\sqrt{\sin^7 x}}{7} + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.10. $\int \cos(ax) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} t = ax &\Rightarrow dt = a dx \Rightarrow \\ \int \cos(ax) dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \frac{1}{a} \int \cos t dt = \frac{1}{a} \sin t + c \Rightarrow \\ &\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{1}{a} \sin(ax) + c \end{aligned}$$

□

Örnek 30.11. $\int e^{ax} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
t = ax &\Rightarrow dt = a dx \Rightarrow \\
\int e^{ax} dx &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^t + c \Rightarrow \\
&\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{1}{a} e^{ax} + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 30.12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \\
t = \frac{x}{a} &\Rightarrow dt = \frac{dx}{a} \Rightarrow \\
\int \frac{dx}{a^2+x^2} &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \frac{1}{a^2} \int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \arctan t + c \Rightarrow \\
&\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 30.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\
t = \frac{x}{a} &\Rightarrow dt = \frac{dx}{a} \Rightarrow \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &\underset{\text{dönüşüm}}{=} \frac{1}{a} \int \frac{adt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c \Rightarrow \\
&\underset{\text{ters dönüşüm}}{=} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 30.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} \\
t = \left(\frac{x+1}{2}\right) &\Rightarrow dt = \frac{dx}{2} \Rightarrow \\
\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c \Rightarrow \\
&\stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 30.15. $\int x^2\sqrt{x-2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
t = x - 2 &\Rightarrow dt = dx \Rightarrow \\
\int x^2\sqrt{x-2}dx &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int (t+2)^2 \sqrt{t}dt \\
&= \int (t^2 + 4t + 4) \sqrt{t}dt = \int (t^{5/2} + 4t^{3/2} + 4t^{1/2}) dt \\
&= \frac{t^{7/2}}{7/2} + 4\frac{t^{5/2}}{5/2} + 4\frac{t^{3/2}}{3/2} + c \\
&\stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{2(x-2)^{7/2}}{7} + \frac{8(x-2)^{5/2}}{5} + \frac{8(x-2)^{3/2}}{3} + c
\end{aligned}$$

□

Uyarı 30.16. Her bir integral için ayrı bir dönüşüm uygulanmaktadır. Ancak aşağıda bazı özel dönüşümler verilmiştir:

- 1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen integraller için $x = a \sin t$ dönüşümü yapılır.
- 2) $\sqrt{x^2 - a^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen integraller için $x = a \sec t$ dönüşümü yapılır.
- 3) $\sqrt{a^2 + x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen integraller için $x = a \tan t$ dönüşümü yapılır.
- 4) $\sqrt[n]{ax+b}$ şeklinde köklü ifadeleri içeren integraller için $ax+b = t^p$ dönüşümü yapılır, burada p sayısı, n_i sayılarının EKOK (en küçük ortak kat) ıdır.
- 5) İntegral trigonometrik rasyonel ifade içeriyorsa yarım açılı yöntemi denilen $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapılarak trigonometrik terim içermeyen rasyonel ifade elde edilir.

Örnek 30.17. $\int \frac{8+x}{\sqrt{9-x^2}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Uyarı 30.16 deki 1.tip integralden:

$$\begin{aligned}
 x &= 3 \sin t \Rightarrow dx = 3 \cos t dt \\
 \int \frac{8+x}{\sqrt{9-x^2}} dx &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int \frac{8+3 \sin t}{\sqrt{9-9 \sin^2 t}} 3 \cos t dt \\
 &= \int \frac{(8+3 \sin t)}{3 \sqrt{1-\sin^2 t}} 3 \cos t dt = \int \frac{(8+3 \sin t)}{3 \sqrt{\cos^2 t}} 3 \cos t dt \\
 &= \int (8+3 \sin t) dt = 8t - 3 \cos t + c \stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} 8 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - 3 \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 30.18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Uyarı 30.16 deki 2.tip integralden:

$$\begin{aligned}
 x &= 3 \sec t \Rightarrow dx = 3 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \\
 \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int \frac{3 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{3 \sec t \sqrt{9 \sec^2 t - 9}} \\
 &= \int \frac{\tan t dt}{3 \tan t} = \frac{1}{3} \int dt = \frac{t}{3} + c \stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{1}{3} \arccos \frac{3}{x} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 30.19. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+4}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Uyarı 30.16 deki 3.tip integralden:

$$\begin{aligned}
 x &= 2 \tan t \Rightarrow dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt \\
 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{4 \tan^2 t \sqrt{4 \tan^2 t + 4}} \\
 &= \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{4 \tan^2 t \frac{2}{\cos t}} = \frac{1}{4} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \quad \begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{array} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2} \\
 &= -\frac{1}{4u} + c \stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} -\frac{1}{4 \sin t} + c \stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 30.20. $\int \frac{(\sqrt[4]{x+1}+2)dx}{\sqrt[6]{x+1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Uyarı 30.16 deki 4.tip integralden:

$$\begin{aligned}
 EKOK(4,6) &= 12 \Rightarrow x+1 = t^{12} \Rightarrow dx = 12t^{11} dt \\
 \int \frac{(\sqrt[4]{x+1}+2) dx}{\sqrt[6]{x+1}} &\stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \int \frac{(t^3+2)}{t^2} 12t^{11} dt \\
 &= 12 \int (t^3+2) t^9 dt = 12 \int (t^{12} + 2t^9) dt = 12 \frac{t^{13}}{13} + 24 \frac{t^{10}}{10} + c \\
 &\stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} 12 \frac{(x+1)^{13/12}}{13} + 24 \frac{(x+1)^{10/12}}{10} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 30.21. $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x) \sin x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Uyarı 30.16 deki 5.tip integralden:

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{x}{2} &= t \Rightarrow x = 2 \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\
 \int \frac{1 + \sin x}{(1 + \cos x) \sin x} dx &= \int \frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{(1 + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx \stackrel{\text{dönüşüm}}{=} \\
 &= \int \frac{1 + 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{(1 + \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}) 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{1}{t^2+1} (t+1)^2}{\frac{2}{t^2+1} 2 \frac{t}{t^2+1}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(t+1)^2 dt}{t} = \frac{1}{2} \int \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} + 2t + \ln t \right) + c \stackrel{\text{ters dönüşüm}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) + c
 \end{aligned}$$

□

31. Kısmi İntegrasyon Yöntemi

$u(x), v(x)$ fonksiyonları için çarpımın diferansiyelinden

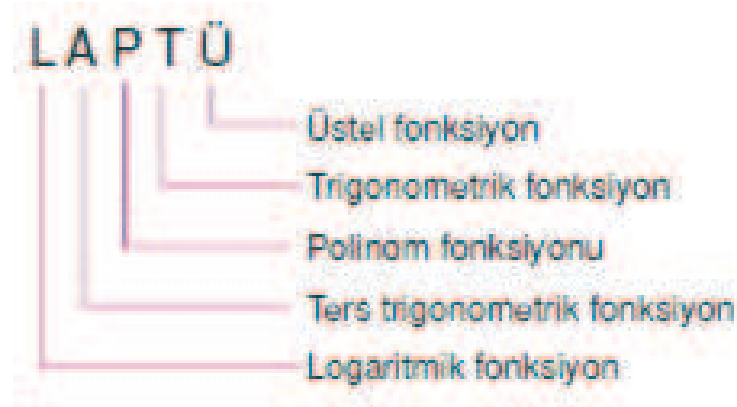
$$d(uv) = v.du + u.dv$$

elde ederiz. Burda her iki yanın integralini alırsak

$$\begin{aligned}
 \int d(uv) &= \int v.du + \int u.dv \Rightarrow \\
 u.v &= \int v.du + \int u.dv \Rightarrow \\
 \int u.dv &= u.v - \int v.du
 \end{aligned}$$

formülüne kısmi integrasyon formülü denir.

Uyarı 31.1. Kısmi integrasyon formülünü uygularken LAPTÜ kuralına dikkat edilmelidir. Aşağıdaki sıraya göre önce gelene u denir sonrasındaki terime ise dv denir.



Örnek 31.2. $\int xe^{3x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow x$: polinom, $e^{3x} \rightarrow$ üstel

$$\begin{aligned}
 x = u &\Rightarrow dx = du \quad e^{3x} dx = dv \Rightarrow \frac{1}{3}e^{3x} = v \\
 \int xe^{3x} dx &= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \\
 &= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 31.3. $\int x \sin 2x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow x$: polinom, $\sin 2x \rightarrow$ trigonometrik

$$\begin{aligned}
 x = u &\Rightarrow dx = du \quad \sin 2x dx = dv \Rightarrow -\frac{1}{2} \cos 2x = v \\
 \int x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 31.4. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow x$:polinom, $\frac{1}{\cos^2 x}$ $\rightarrow$ trigonometrik

$$\begin{aligned} x = u &\Rightarrow dx = du \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dv \Rightarrow \tan x = v \\ \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= x \tan x - \int \tan x dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + c \end{aligned}$$

□

Örnek 31.5. $\int x^4 \ln x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow \ln x$:logaritmik, x^4 $\rightarrow$ polinom

$$\begin{aligned} \ln x = u &\Rightarrow \frac{dx}{x} = du \quad x^4 dx = dv \Rightarrow \frac{x^5}{5} = v \\ \int x^4 \ln x dx &= \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{5} \int x^5 \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{1}{25} x^5 + c \end{aligned}$$

□

Örnek 31.6. $\int \arctan x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow \arctan x$:ters trigonometrik, 1 $\rightarrow$ polinom

$$\begin{aligned} \arctan x = u &\Rightarrow \frac{dx}{x^2+1} = du \quad 1 \cdot dx = dv \Rightarrow x = v \\ \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x dx}{x^2+1} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c \end{aligned}$$

□

Örnek 31.7. $\int e^{ax} \cos(bx) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow \cos(bx)$:trigonometrik, e^{ax} $\rightarrow$ üstel

$$\begin{aligned} \cos(bx) = u &\Rightarrow -b \sin(bx) dx = du \quad e^{ax} dx = dv \Rightarrow \frac{1}{a} e^{ax} = v \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \underbrace{\int e^{ax} \sin(bx) dx}_{\text{ikinci kez kısmi integrasyon}} \end{aligned}$$

(LAPTÜ) $\rightarrow \sin(bx)$:trigonometrik, $e^{ax} \rightarrow$ üstel

$$\begin{aligned} \sin(bx) = u &\Rightarrow b \cos(bx) dx = du \quad e^{ax} dx = dv \Rightarrow \frac{1}{a} e^{ax} = v \\ \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \end{aligned}$$

yerine yazalım:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \right) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos(bx) dx \Rightarrow \\ \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) \Rightarrow \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) \right) \Rightarrow \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin(bx) + c \end{aligned}$$

□

Örnek 31.8. $\int x^2 e^{-x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow x^2$:polinom, $e^{-x} \rightarrow$ üstel

$$\begin{aligned} x^2 = u &\Rightarrow 2x dx = du \quad e^{-x} dx = dv \Rightarrow -e^{-x} = v \\ \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \underbrace{\int x e^{-x} dx}_{\text{ikinci kez kısmi integrasyon}} \end{aligned}$$

(LAPTÜ) $\rightarrow x$:polinom, $e^{-x} \rightarrow$ üstel

$$\begin{aligned} x = u &\Rightarrow dx = du \quad e^{-x} dx = dv \Rightarrow -e^{-x} = v \\ \int x e^{-x} dx &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} \end{aligned}$$

yerine yazalım:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) \Rightarrow \\ \int x^2 e^{-x} dx &= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c\end{aligned}$$

□

Uyarı 31.9. Yukarıdaki yol izlenerek $p_m(x)$, m . dereceden bir polinom olmak üzere

$$\int p_m(x) e^x dx = e^x (p_m(x) - p'_m(x) + p''_m(x) - p'''_m(x) + \cdots + (-1)^m p_m^{(m)}(x))$$

formülü ile bulunur.

Örnek 31.10. $\int (x^3 + 2x^2 + x + 3) e^x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Yukarıdaki Uyarıdan

$$\begin{aligned}\int (x^3 + 2x^2 + x + 3) e^x dx &= e^x [(x^3 + 2x^2 + x + 3) - (3x^2 + 4x + 1) + (6x + 4) - 6] \\ &= e^x (x^3 - x^2 + 3x) + c\end{aligned}$$

□

Örnek 31.11. $\int \frac{x}{(x+1)^2} e^x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}x e^x = u &\Rightarrow (x+1) e^x dx = du \quad \frac{dx}{(x+1)^2} = dv \Rightarrow -\frac{1}{x+1} = v \\ \int \frac{x}{(x+1)^2} e^x dx &= -\frac{x e^x}{x+1} + \int \frac{(x+1) e^x}{x+1} dx = -\frac{x e^x}{x+1} + e^x + c\end{aligned}$$

□

Örnek 31.12. $\int \sqrt{x^2 + m} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + m} = u &\Rightarrow \frac{1}{2}2x(x^2 + m)^{-1/2} dx = du \quad dx = dv \Rightarrow x = v \\
\int \sqrt{x^2 + m} dx &= x\sqrt{x^2 + m} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + m}} dx \\
&= x\sqrt{x^2 + m} - \int \frac{(x^2 + m - m)}{\sqrt{x^2 + m}} dx \\
&= x\sqrt{x^2 + m} - \int \sqrt{x^2 + m} dx + m \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} \\
&= x\sqrt{x^2 + m} - \int \sqrt{x^2 + m} dx + m \ln(x + \sqrt{x^2 + m}) \Rightarrow \\
2 \int \sqrt{x^2 + m} dx &= x\sqrt{x^2 + m} + m \ln(x + \sqrt{x^2 + m}) \Rightarrow \\
\int \sqrt{x^2 + m} dx &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + m} + m \ln(x + \sqrt{x^2 + m}) \right) + c
\end{aligned}$$

□

32. İndirgeme Bağlıları

Örnek 32.1. $I_n = \int \cos^n x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \cos^{n-1} x \cos x dx \\
&\quad \cos^{n-1} x = u \Rightarrow -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x dx = du \quad \cos x dx = dv \Rightarrow \sin x = v \\
I_n &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \underbrace{\int \cos^{n-2} x dx}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int \cos^n x dx}_{I_n} \Rightarrow \\
nI_n &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} \Rightarrow \\
I_n &= \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. □**Örnek 32.2.** $\int \cos^4 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Yukarıdaki formüle göre

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \cos^4 x dx \Rightarrow \\
I_4 &= \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} I_2
\end{aligned}$$

yine yukarıdaki formülden,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} I_0 \\
I_0 &= \int dx = x \Rightarrow \\
I_4 &= \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} I_2 \\
&= \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right) \Rightarrow \\
I_4 &= \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 32.3. $n > 1, I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} \frac{1}{\sin^2 x} dx \\
 \frac{1}{\sin^{n-2} x} &= u \Rightarrow -(n-2) \sin^{-n+1} x \cos x dx = du \quad \frac{1}{\sin^2 x} dx = dv \Rightarrow -\cot x = v \\
 I_n &= -\frac{1}{\sin^{n-2} x} \cot x - (n-2) \int \sin^{-n+1} x \cos x \cot x dx \\
 &= -\frac{1}{\sin^{n-2} x} \cot x - (n-2) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx \\
 &= -\frac{1}{\sin^{n-2} x} \cot x - (n-2) \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin^n x} dx \\
 &= -\frac{1}{\sin^{n-2} x} \cot x - (n-2) \int \frac{dx}{\sin^n x} + (n-2) \underbrace{\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}}_{I_{n-2}} \\
 (n-1) I_n &= -\frac{1}{\sin^{n-2} x} \cot x + (n-2) I_{n-2} \Rightarrow \\
 I_n &= -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}
 \end{aligned}$$

□

Örnek 32.4. $I_4 = \int \frac{dx}{\sin^4 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Yukarıdaki formüle göre

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int \frac{dx}{\sin^4 x} \Rightarrow \\
 I_4 &= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^3 x} + \frac{2}{3}I_2 \\
 I_2 &= -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{0}{1}I_0 \Rightarrow \\
 I_4 &= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^3 x} + \frac{2}{3}\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) + c \\
 &= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^3 x} - \frac{2\cos x}{3\sin x} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 32.5. $n \geq 1, I_n = \int \tan^n x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm $n = 1$ için

$$I_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c$$

$n > 1$ için

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x - 1) dx \\
 &= \underbrace{\int \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) dx}_{\tan x = u \Rightarrow (1 + \tan^2 x) dx = du} - \underbrace{\int \tan^{n-2} x dx}_{I_{n-2}} \\
 &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}
 \end{aligned}$$

□

Örnek 32.6. $I_3 = \int \tan^3 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Yukarıdaki formülden

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - I_1 \\
 &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 32.7. $n \geq 1, I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm $n = 1$ için

$$I_1 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$n > 1$ için

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} \\ dx &= dv \Rightarrow v = x \\ u &= \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} \Rightarrow du = -(n-1)(a^2+x^2)^{-n} 2x dx \\ I_{n-1} &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(a^2+x^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - 2(n-1)a^2 \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2I_n \Rightarrow \\ 2(n-1)a^2I_n &= \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \Rightarrow \\ I_n &= \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right] \end{aligned}$$

□

Örnek 32.8. $\int \frac{dx}{(4x^2+4x+10)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
4x^2 + 4x + 10 &= (2x + 1)^2 + 9 \Rightarrow \\
\int \frac{dx}{(4x^2 + 4x + 10)^2} &= \int \frac{dx}{\underbrace{((2x + 1)^2 + 9)^2}_{2x+1=t \Rightarrow dx=dt/2}} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + 9)^2}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki formülde $a = 3, n = 2$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{18} \left[\frac{t}{(9 + t^2)} + I_1 \right] \\
&= \frac{1}{18} \left[\frac{t}{(9 + t^2)} + \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} \right] \Rightarrow \\
\frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + 9)^2} &= \frac{1}{36} \left[\frac{t}{(9 + t^2)} + \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} \right] + c \Rightarrow \\
&= \frac{1}{36} \left[\frac{2x + 1}{(9 + (2x + 1)^2)} + \frac{1}{3} \arctan \frac{2x + 1}{3} \right] + c
\end{aligned}$$

□

Uyarı 32.9. Payda da $(ax + b)^n$ şeklinde terim varsa basit kesirler $A_1/(ax + b), A_2/(ax + b)^2, \dots, A_n/(ax + b)^n$ şeklinde olur.

Örnek 32.10. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ integralini $x = \tan t$ dönüşümü yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
x &= \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt \Rightarrow \\
\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{(1 + \tan^2 t) dt}{(1 + \tan^2 t)^2} = \int \frac{dt}{(1 + \tan^2 t)} \\
&= \int \cos^2 t dt = \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\
&= \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{2} + c \Rightarrow \\
&= \frac{1}{4} 2 \sin t \cos t + \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\arctan x}{2} + c \\
&= \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{\arctan x}{2} + c
\end{aligned}$$

□

33. Basit Kesirlere Ayırma

Örnek 33.1. $\int \frac{dx}{3x+2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int \frac{dx}{3x+2}}_{3x+2=t \Rightarrow 3dx=dt} &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln |t| + c = \frac{1}{3} \ln |3x+2| + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 33.2. $\int \frac{2dx}{(5x+1)^3}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int \frac{2dx}{(5x+1)^3}}_{5x+1=t \Rightarrow 5dx=dt} &= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{2}{5} \frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{5(5x+1)^2} + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 33.3. $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+4x+13}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
x^2 + 4x + 13 &= (x+2)^2 + 9 \\
\int \frac{(2x+5) dx}{x^2 + 4x + 13} &= \int \frac{(2x+5) dx}{(x+2)^2 + 9} = \int \frac{((2x+4) + 1) dx}{(x+2)^2 + 9} = \underbrace{\int \frac{(2x+4) dx}{(x+2)^2 + 9}}_{(x+2)^2 + 9 = t \Rightarrow 2(x+2)dx = dt} + \underbrace{\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9}}_{(x+2)=u \Rightarrow dx=du} \\
&= \int \frac{dt}{t} + \int \frac{du}{u^2 + 9} = \ln t + \frac{1}{3} \arctan \frac{u}{3} + c \\
&= \ln |(x+2)^2 + 9| + \frac{1}{3} \arctan \frac{(x+2)}{3} + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 33.4. $\int \frac{4dx}{x^2-4}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x^2-4} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow x(A+B) + 2(A-B) = 4 \Rightarrow A+B=0, A-B=2 \Rightarrow \\
A &= 1-B = -1 \\
\int \frac{4dx}{x^2-4} &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x-2| - \ln|x+2| + c \\
&= \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c
\end{aligned}$$

□

Uyarı 33.5. $(x+a)^n$ veya $(x-a)^n$ gibi ifadeler varsa basit kesirlere $\frac{A_1}{(x-a)}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$ veya $\frac{A_1}{(x+a)}, \frac{A_2}{(x+a)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x+a)^n}$ şeklinde ayrılır.

Örnek 33.6. $\int \frac{(2x+1)}{(x-1)^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\frac{(2x+1)}{(x-1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow A(x-1) + B = 2x+1 \Rightarrow A=2, B-A=1 \Rightarrow B=3 \\
\int \frac{(2x+1)}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 33.7. $\int \frac{(-2x+4)}{(1+x^2)(x-1)^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 \frac{(-2x+4)}{(1+x^2)(x-1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \Rightarrow \\
 -2x+4 &= A(x-1)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(x-1)^2 \Rightarrow \\
 -2x+4 &= A(x^3-x^2+x-1) + B(1+x^2) + (Cx+D)(x^2-2x+1) \Rightarrow \\
 -2x+4 &= x^3(A+C) - x^2(A-B+2C-D) + x(A+C-2D) + B-A+D \\
 \begin{aligned}
 A+C &= 0 & D &= 1 \\
 A-B+2C-D &= 0 & A &= -2 \\
 A+C-2D &= -2 & C &= 2 \\
 B-A+D &= 4 & B &= 1
 \end{aligned} \Rightarrow \\
 \int \frac{(-2x+4)}{(1+x^2)(x-1)^2} dx &= -\int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2x+1}{1+x^2} dx \\
 &= -2 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=u \Rightarrow 2x dx = du} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= -2 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + \ln|1+x^2| + \arctan x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 33.8. $\int \frac{3x^4+2x+1}{x^2+4x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm Öncelikle pay, paydadan büyük olduğu için payı paydaya böleceğiz:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^4 + 2x + 1}{x^2 + 4x} &= 3x^2 - 12x + 48 - \frac{190x - 1}{x^2 + 4x} \Rightarrow \\
\int \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^2 + 4x} dx &= \int (3x^2 - 12x + 48) dx - \int \frac{190x - 1}{x^2 + 4x} dx \\
&= x^3 - 6x^2 + 48x - 190 \int \frac{x}{x^2 + 4x} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4x} dx \\
&= x^3 - 6x^2 + 48x - 190 \int \frac{x}{x(x+4)} dx + \underbrace{\int \frac{1}{(x+2)^2 - 4} dx}_{x+2=t \Rightarrow dx=dt} \\
&= x^3 - 6x^2 + 48x - 190 \ln(x+4) + \int \frac{dt}{t^2 - 4} \\
\frac{1}{t^2 - 4} &= \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} \Rightarrow A + B = 0, 2(A - B) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4} \Rightarrow \\
&= x^3 - 6x^2 + 48x - 190 \ln(x+4) + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+2} \\
&= x^3 - 6x^2 + 48x - 190 \ln(x+4) + \frac{1}{4} \ln(t-2) - \frac{1}{4} \ln(t+2), [x+2=t] \\
&= x^3 - 6x^2 + 48x - 190 \ln(x+4) + \frac{1}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \ln(x+4) + c \\
&= x^3 - 6x^2 + 48x + \ln \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{(x+4)^{761}}} + c
\end{aligned}$$

□

34. Trigonometrik İntegraller

34.1. $\int \sin ax \sin bxdx, \int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx$ **tipindeki integraller.** $\int \sin ax \sin bxdx, \int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx$ tipindeki integraller için

$$\begin{aligned}
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] \\
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]
\end{aligned}$$

formülleri kullanılır.

Örnek 34.1. $\int \sin 4x \sin 7x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 \int \sin 4x \sin 7x dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(-3)x - \cos(10)x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int [\cos 3x - \cos 10x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos \underbrace{3x}_{3x=t \Rightarrow 3dx=dt} dx - \frac{1}{2} \int \cos \underbrace{10x}_{10x=u \Rightarrow 10dx=du} dx \\
 &= \frac{1}{6} \int \cos t dt - \frac{1}{20} \int \cos u du \\
 &= \frac{1}{6} \sin t - \frac{1}{20} \sin u, [3x = t, 10x = u] \\
 &= \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{20} \sin 10x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.2. $\int \sin 5x \cos 3x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 \int \sin 5x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(8)x + \sin(2)x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int [\sin 8x - \sin 2x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sin \underbrace{8x}_{8x=t \Rightarrow 8dx=dt} dx - \frac{1}{2} \int \sin \underbrace{2x}_{2x=u \Rightarrow 2dx=du} dx \\
 &= \frac{1}{16} \int \sin t dt - \frac{1}{4} \int \sin u du \\
 &= -\frac{1}{16} \cos t + \frac{1}{4} \cos u, [8x = t, 2x = u] \\
 &= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.3. $\int \cos 4x \cos 3x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 \int \cos 4x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (7) x + \cos (1) x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int [\cos 7x - \cos x] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos \underbrace{7x}_{7x=t \Rightarrow 7dx=dt} dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx \\
 &= \frac{1}{14} \int \cos t dt - \frac{1}{2} \int \cos x dx \\
 &= \frac{1}{14} \sin t - \frac{1}{2} \sin x, [7x = t] \\
 &= \frac{1}{14} \sin 7x - \frac{1}{2} \sin x + c
 \end{aligned}$$

□

34.2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ tipindeki integraller. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ integralini hesaplarken

- (1) m tek ise $\cos x = t$
- (2) n tek ise $\sin x = t$
- (3) m ve n tek ise $\cos x = t$ veya $\sin x = t$ dönüşümleri yapılmalıdır.
- (4) m ve n her ikisi de çift ise $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ dönüşümleri ile kuvvetler düşürülür.
- (5) İntegral $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının rasyonel kombinasyonu şeklinde ve $\sin x$ yerine $-\sin x$ ve $\cos x$ yerine $-\cos x$ yazıldığında rasyonel ifadenin işareti değişiyorsa $\cos x = t$ dönüşümü yapılır.
- (6) İntegral $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının rasyonel kombinasyonu şeklinde ve $\sin x$ yerine $-\sin x$ ve $\cos x$ yerine $-\cos x$ yazıldığında rasyonel ifadenin işareti değişmiyorsa $\tan x = t$ veya $\cot x = t$ dönüşümü yapılır.

Örnek 34.4. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm m tek olduğundan $\cos x = t$ dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned}
 \cos x &= t \Rightarrow -\sin x dx = dt \\
 \int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx \\
 &= -\int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^4 t^2 dt \\
 &= -\int (1-t^2)^2 t^2 dt \\
 &= -\int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt \\
 &= -\frac{t^7}{7} + \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + c \\
 &= -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.5. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm n tek olduğundan $\sin x = t$ dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned}
 \sin x &= t \Rightarrow \cos x dx = dt \\
 \int \sin^4 x \cos^3 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx \\
 &= \int t^4 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 dt \\
 &= \int t^4 (1-t^2) dt \\
 &= \int (-t^6 + t^4) dt \\
 &= -\frac{t^7}{7} + \frac{1}{5}t^5 + c \\
 &= -\frac{\sin^7 x}{7} + \frac{1}{5}\sin^5 x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.6. $\int \sin^9 x \cos^3 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm m ve n tek olduğundan $\sin x = t$ veya $\cos x = t$ dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned}
 \sin x &= t \Rightarrow \cos x dx = dt \\
 \int \sin^9 x \cos^3 x dx &= \int \sin^8 x \cos^2 x \cos x dx \\
 &= \int t^8 (\sqrt{1-t^2})^2 dt \\
 &= \int t^8 (1-t^2) dt \\
 &= \int (-t^{11} + t^9) dt \\
 &= -\frac{t^{12}}{12} + \frac{1}{10} t^{10} + c \\
 &= -\frac{\sin^{12} x}{12} + \frac{1}{10} \sin^{10} x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.7. $\int \cos^5 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm n tek olduğundan $\sin x = t$ dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned}
 \sin x &= t \Rightarrow \cos x dx = dt \\
 \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx \\
 &= \int (\sqrt{1-t^2})^4 dt \\
 &= \int (1-t^2)^2 dt \\
 &= \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\
 &= \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t + c \\
 &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.8. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ dönüşümleri ile kuvvetler düşürülür.

$$\begin{aligned}
\sin^4 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} \\
&= \frac{1}{8} (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) (1 + \cos 2x) \\
&= \frac{1}{8} (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) \\
&= \frac{1}{8} \left(1 - 3 \cos 2x + 3 \frac{1 + \cos 4x}{2} - \cos^3 2x \right) \Rightarrow \\
\int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{8} \left(1 - 3 \cos 2x + 3 \frac{1 + \cos 4x}{2} - \cos^3 2x \right) dx \\
&= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx \\
\int \cos^3 2x dx &= \int \cos^2 2x \cos 2x dx, \sin 2x = t \Rightarrow 2 \cos 2x dx = dt \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{1 - t^2} \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{2} \int (1 - t^2) dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{6} t^3 = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \\
\int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + c \\
&= \frac{1}{48} \sin^3 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{5}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 34.9. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\frac{(-\sin x)^3}{(-\cos x)^2} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$$

olduğundan

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = - \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^2}{t^2} dt \\
 &= - \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int dt - \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{1}{t} + c \\
 &= \cos x + \frac{1}{\cos x} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.10. $\int \cos^3 x \tan^5 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\cos^3 x \tan^5 x = \cos^3 x \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^5 = \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{(-\sin x)^5}{(-\cos x)^2} = -\frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}$$

olduğundan

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned}
 \int \cos^3 x \tan^5 x dx &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \sin x dx = - \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^4}{t^2} dt \\
 &= - \int \frac{(1-t^2)^2}{t^2} dt = 2 \int dt - \int \frac{dt}{t^2} - \int t^2 dt = 2t + \frac{1}{t} - \frac{t^3}{3} + c \\
 &= 2 \cos x + \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^3 x}{3} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\frac{1}{(-\sin x)^2 (-\cos x)^4} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x}$$

olduğundan

$$\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} dt \\
 &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt = 2 \int dt + \int \frac{dt}{t^2} + \int t^2 dt = 2t - \frac{1}{t} + \frac{t^3}{3} + c \\
 &= 2 \tan x - \frac{1}{\tan x} + \frac{\tan^3 x}{3} + c
 \end{aligned}$$

□

34.3. $\int \tan^m x \sec^n x dx$ **tipindeki integraller.** $\int \tan^m x \sec^n x dx$ tipindeki integraller için

- (1) n çift ise $\tan x = t$ dönüşümü yapılır.
- (2) m tek ise $\sec x = t$ dönüşümü yapılır.
- (3) $m = 0, n = 1$ ise yani $\int \sec x dx$ integralini hesaplamak için integrantı $(\sec x + \tan x)$ ile çarpıp bölünür.
- (4) m çift n tek ise $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ dönüşümü yapılarak $\sec x$ in tek kuvvetleri haline getirilir.

Örnek 34.12. $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm $n = 4$ çift olduğundan

$$\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

dönüşümü uygulanır.

$$\begin{aligned}
 \int \tan^6 x \sec^4 x dx &= \int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} dt = \int t^6 (1+t^2) dt = \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + c \\
 &= \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + c
 \end{aligned}$$

□

Örnek 34.13. $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm $m = 5$ tek olduğundan

$$\sec x = t \Rightarrow \tan x \sec x dx = dt$$

dönüşümü uygulanır.

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \tan x \sec x dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \tan x \sec x dx = \int \frac{\left(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)^4}{\left(\frac{1}{t}\right)^6} dt = \int t^2 (t^2 - 1)^2 dt = \\ &= \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sec^7 x}{7} - 2\frac{\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

□

Örnek 34.14. $\int \sec x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\underbrace{\sec x + \tan x}} dx \\ &= \int \frac{=u \Rightarrow (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx = du}{u} du \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + c\end{aligned}$$

□

Örnek 34.15. $\int \tan^2 x \sec x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx = \int (\sec^3 x - \sec x) dx \\
\int \sec^3 x dx &= \int \sec x \sec^2 x dx \\
\sec x &= u \Rightarrow \sec x \tan x dx = du, \sec^2 x dx = dv = v = \tan x \\
\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx \Rightarrow \\
\int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x dx \\
&= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \Rightarrow \\
\int \tan^2 x \sec x dx &= \int (\sec^3 x - \sec x) dx \\
&= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| - \ln |\sec x + \tan x| + c \\
&= \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c
\end{aligned}$$

□

34.4. $\int \cot^m x \csc^n x dx$ **tipindeki integraller.** $\int \tan^m x \sec^n x dx$ tipindeki integraller için

- (1) n çift ise $\tan x = t$ dönüşümü yapılır.
- (2) m tek ise $\sec x = t$ dönüşümü yapılır.
- (3) $m = 0, n = 1$ ise yani $\int \csc x dx$ integralini hesaplamak için integrantı $(\csc x + \cot x)$ ile çarpıp bölünür.
- (4) m çift n tek ise $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ dönüşümü yapılarak $\csc x$ in tek kuvvetleri haline getirilir.

Örnek 34.16. $\int \cot^3 x \csc^4 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x \csc^4 x dx &= \int \cot^3 x \csc^2 x \csc^2 x dx = \int \cot^3 x (\cot^2 x + 1) \csc^2 x dx \\
\cot x &= u \Rightarrow -\csc^2 x dx = du \\
\int \cot^3 x (\cot^2 x + 1) \csc^2 x dx &= -\int u^3 (u^2 + 1) du \\
&= -\frac{u^6}{6} - \frac{u^4}{4} + c \\
&= -\frac{\cot^6 x}{6} - \frac{\cot^4 x}{4} + c
\end{aligned}$$

□

35. İrrasyonel fonksiyonların İntegrali

35.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **tipindeki integraller.** Bu tipteki integralin hesabı a, b, c katsayılarına göre değişir.

- (1) $b^2 - 4ac > 0$ ve $a < 0$ ise ifade $\int \frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}}$ ifadesine dönüşür ve burda da $\int \frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{m} + c$ integralinden faydalanılır.
(2) $a > 0$ ise ifade $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm m^2}}$ ifadesine dönüşür ve burda da $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm m^2}} = \ln |t + \sqrt{t^2 \pm m^2}| + c$ integralinden faydalanılır.

Örnek 35.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
-x^2 + 2x + 3 &= -(x^2 - 2x - 3) = -[(x-1)^2 - 4] = 4 - (x-1)^2 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} \stackrel{x-1=t}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin \frac{t}{2} + c \\
&= \arcsin \frac{(x-1)}{2} + c
\end{aligned}$$

□

Örnek 35.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
4x^2 + 4x + 3 &= (2x + 1)^2 + 2 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 2}} \stackrel{2x+1=t}{=} \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2}} = \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2 + 2}| + c \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| 2x + 1 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 2} \right| + c
\end{aligned}$$

□

35.2. $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ **tipindeki integraller.** $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ tipindeki integraller için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \frac{mx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \int \frac{n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \\
&= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + n \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \\
&= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + n \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \\
&= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{\underbrace{ax^2+bx+c}_{=u \Rightarrow (2ax+b)dx=du}}} dx + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \\
&= \frac{m}{2a} \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \\
&= \frac{m}{a} \sqrt{u} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx}_{\text{yukarıdaki integral gibi çözülür}}
\end{aligned}$$

Örnek 35.3. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx &= 3 \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4-4}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{\underbrace{\sqrt{x^2+4x+1}}_{=u \Rightarrow (2x+4)dx=du}} dx + \int \frac{-4}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 4 \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-3}} dx \\
&= 3\sqrt{2x+4} - 4 \ln \left| x+2 + \sqrt{(x+2)^2-3} \right| + c
\end{aligned}$$

□

35.3. $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ **tipindeki integraller.** $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ tipindeki integraller için $\frac{1}{mx+n} = t$ dönüşümü yapılır.

Örnek 35.4. $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+3}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} &= t \Rightarrow x-1 = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{t} + 1 \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \\
\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+3}} dx &= \int \frac{t}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2+3}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}(4t^2+2t+1)}} \\
&= -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2+2t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(2t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} \quad \begin{matrix} 2t+\frac{1}{2}=u \\ dt=\frac{du}{2} \end{matrix} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2+\frac{3}{4}} \right| + c = -\frac{1}{2} \ln \left| 2t + \frac{1}{2} + \sqrt{4t^2+2t+1} \right| + c \\
&\stackrel{\frac{1}{x-1}=t}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} + \sqrt{4\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x-1}\right) + 1} \right| + c \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+3)}{2(x-1)} + \sqrt{\frac{x^2+3}{(x-1)^2}} \right| + c
\end{aligned}$$

□

35.4. $\int \frac{1}{(x-n)^m \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ tipindeki integraller için $\frac{1}{x-n} = t$ dönüşümü yapılır.

Örnek 35.5. $\int \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+2x-2}} dx$ integralini hesaplayınız.

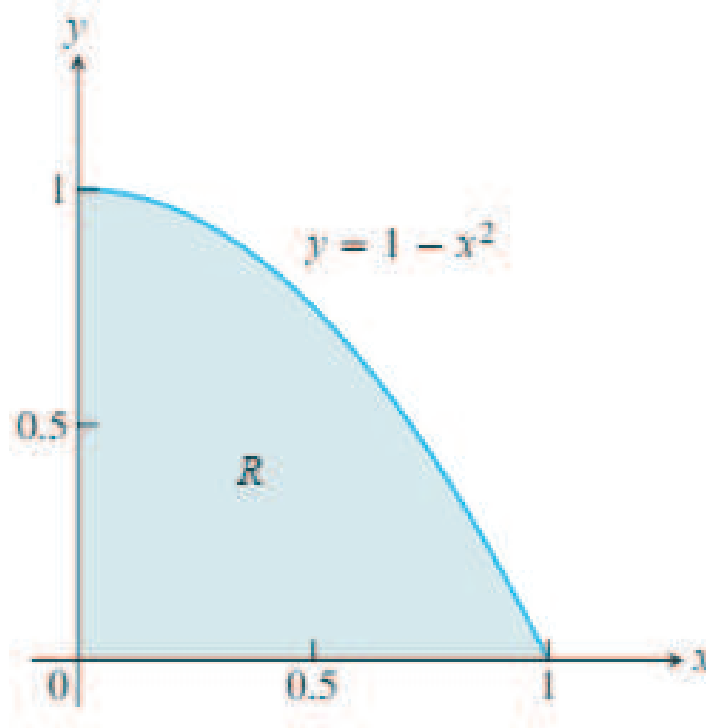
Çözüm

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} &= t \Rightarrow x-1 = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{t} + 1 \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt \\
\int \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+2x-2}} dx &= \int \frac{t^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2+2\left(\frac{1}{t}+1\right)-2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}(t^2+4t+1)}} \\
&= -\int \frac{t dt}{\sqrt{t^2+4t+1}} = -\int \frac{t dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}} = -\int \frac{(t+2-2) dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}} \\
&= -\int \frac{(t+2) dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}} + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}} \\
&\quad \begin{array}{l} (t+2)^2-3=u \\ 2(t+2) dt=du \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{(t+2)^2-3} \\ t+2=v \end{array} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} + 2 \int \frac{dv}{\sqrt{v^2-3}} = \sqrt{u} + 2 \ln |v + \sqrt{v^2-3}| + c \\
&= -\sqrt{(t+2)^2-3} + 2 \ln |t+2 + \sqrt{(t+2)^2-3}| + c \\
&= -\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}+2\right)^2-3} + 2 \ln \left| \frac{1}{x-1} + 2 + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1}+2\right)^2-3} \right| + c \\
&= -\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}(x^2+2x-2)} + 2 \ln \left| \frac{2x-1}{x-1} + \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}(x^2+2x-2)} \right| + c \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+2x-2}}{x-1} + 2 \ln \left| \frac{2x-1 + \sqrt{x^2+2x-2}}{x-1} \right| + c
\end{aligned}$$

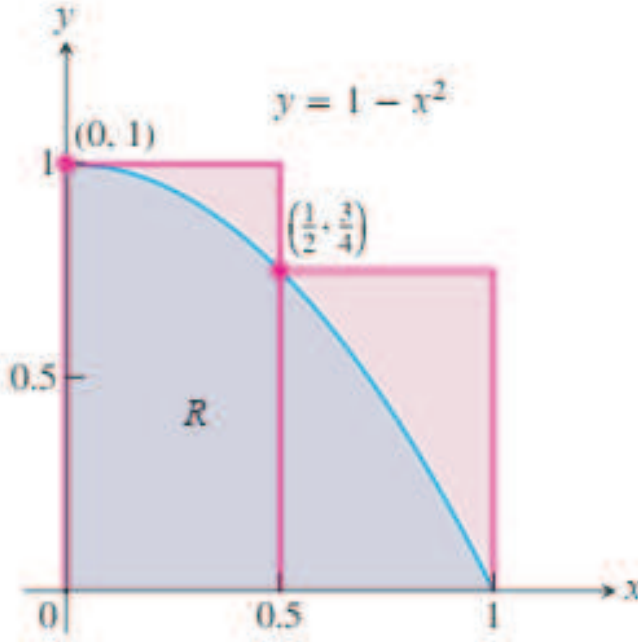
□

36. Belirli İntegraller

Örnek 36.1. Aşağıdaki şekilde verildiği üzere $y = 1 - x^2$ eğrisi ve $x = 0, y = 0, x = 1$ doğruları ile kısıtlanan R bölgesinin alacağını hesaplayınız.

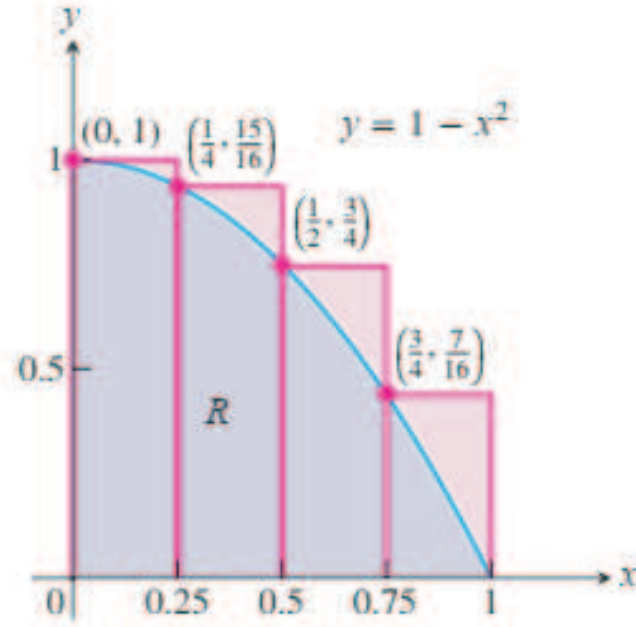


Çözüm Bu alanı hesaplamak için, üçgenin alanı dikdörtgenin alanı gibi belirli bir formül bulunmamaktadır. Ancak bazı yaklaşımlar yaparak tahmini bir değer söylemeye çalışalım. Öncelikle $[0, 1]$ aralığını 2 eşit parçaya bölerek buralardan eğrinin üstünde kalacak şekilde dikdörtgenler çizip bu dikdörtgenlerin alanının hesaplayalım:



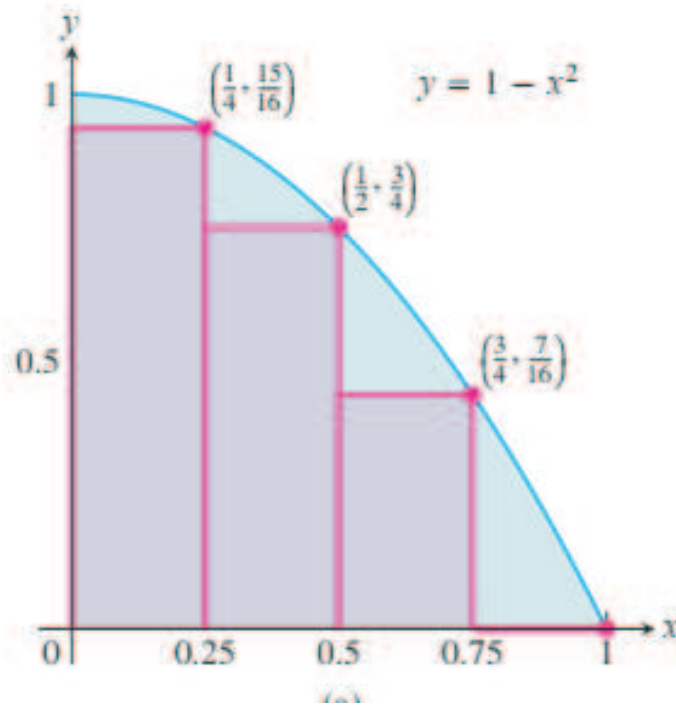
$$A \approx 1 * 0.5 + \frac{3}{4} * 0.5 = 0.875$$

Bu alan elbette R bölgesinin alanından büyüktür. Şimdi biraz daha yakın bir çözüm bulalım ve $[0, 1]$ aralığını 4 eşit parçaya bölerek buralardan eğrinin üstünde kalacak şekilde dikdörtgenler çizip bu dikdörtgenlerin alanının hesaplayalım:



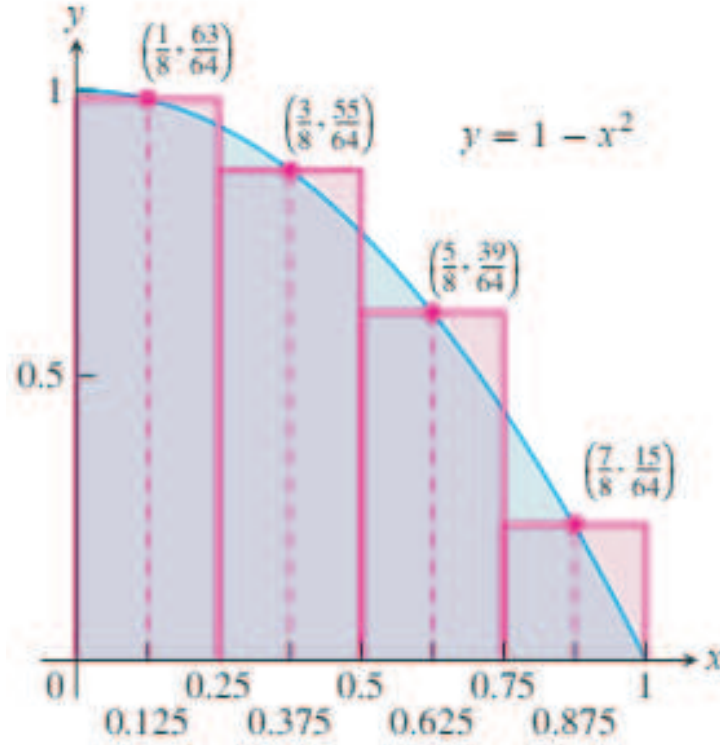
$$A \approx 1 * 0.25 + \frac{15}{16} * 0.25 + \frac{3}{4} * 0.25 + \frac{7}{16} * 0.25 = 0.78125$$

Bu alan elbette R bölgesinin alanından büyüktür. Bu şekilde gerçek alandan daha büyük sonuç elde edilen bu toplamlara üst toplam denir. Şimdi de tam tersini yani R bölgesinin alanından az olacak şekilde sonuçlar alalım ve $[0, 1]$ aralığını 4 eşit parçaya bölerek buralardan eğrinin altında kalacak şekilde dikdörtgenler çizip bu dikdörtgenlerin alanının hesaplayalım:



$$A \approx \frac{15}{16} * 0.25 + \frac{3}{4} * 0.25 + \frac{7}{16} * 0.25 + 0 * 0.25 = 0.53125$$

Ve tabii ki bu elde ettiğimiz tahmini alan R bölgesinin gerçek alanından bu sefer küçük olacaktır. Bu eşkildeki toplamlara da alt toplamlar denir. Ve son olarak alanlarda orta nokta kuralı diye adlandırılan bir yaklaşım yapalım. Yine de $[0, 1]$ aralığını 4 eşit parçaya bölerek buralardan aralığın orta noktasından geçecek şekilde dikdörtgenler çizip bu dikdörtgenlerin alanının hesaplayalım:



$$A \approx \frac{63}{64} * 0.25 + \frac{55}{64} * 0.25 + \frac{39}{64} * 0.25 + \frac{15}{64} * 0.25 = 0.67188$$

Şu ana kadar $[0, 1]$ aralığını 4 eşit parçaya bölerek işlemlerimizi yaptık. Aşağıdaki tabloda aralığı böldüğümüz alt aralıklara göre alt toplam, üst toplam ve orta nokta kuralını ait değerleri verelim:

Alt aralıkların Sayısı	Alt Toplam	Orta Nokta Kuralı	Üst Toplam
2	0.375	0.6875	0.875
4	0.53125	0.671875	0.78125
16	0.634765625	0.6669921875	0.697265625
50	0.6566	0.6667	0.6766
100	0.66165	0.666675	0.67165
1000	0.6661665	0.66666675	0.6671665

Bu tabloya göre aralık sayısı arttıkça değerlerin birbirine çok yakınlaştığını ve bu değer de R bölgesinin gerçek değerine yakınsadığını görebiliriz. $\square$

37. Aralığın Parçalanması

İntegral teorisinin temel kavramı olan parçalanma tanımını verelim:

Tanım 37.1. $[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < b = x_n$ olacak şekilde n alt aralığa bölelim. $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması denir. $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ aralıklarına da $[a, b]$ aralığının P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralığı denir. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu denir ve alt aralıklarının boyunun en büyüğüne P parçalanmasının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Eğer tüm aralıkların boyu eşit ise bu parçalanmaya düzgün parçalanma adı verilir.

Örnek 37.2. $[1, 2]$ aralığının parçalanmaları $P_1 = \{1, \frac{3}{2}, 2\}$, $P_2 = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\}$ olmak üzere bu parçalamaların normlarını bulunuz. Bu parçalanmalar düzgün parçalanmalar mıdır?

Çözüm P_1 parçalanması aralık boylarına bakalım.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ \Delta_2 &= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ \|P_1\| &= \max\{\Delta_1, \Delta_2\} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ve P_1 parçalanması düzgün parçalanmadır. P_2 parçalanması aralık boylarına bakalım.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \\ \Delta_2 &= \frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \\ \Delta_3 &= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ \|P_2\| &= \max\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ve P_2 parçalanması düzgün parçalanma değildir. □

Teorem 37.3. Eğer P parçalanması düzgün bir parçalanması ise

$$\|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$$

Tanım 37.4. $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ toplamı kısaca $\sum_{k=1}^n a_k$ sembolü ile gösterilir. Burada $\sum$ sembolüne toplama sembolü denir ve sigma diye okunur.

Lemma 37.5. 1) Toplama Kuralı: $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
2) Çıkarma Kuralı: $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$

- 3) Sabit ile Çarpma Kuralı: $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$
 4) $\sum_{k=1}^n c = cn$

Lemma 37.6. Toplam sembolü ile ilgili bazı förmüller aşağıda verilmiştir.

- 1) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 2) $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 3) $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Örnek 37.7. $\sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k + 10)$ toplamını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k + 10) &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k + 10 \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 3 \frac{10 * 11 * 21}{6} - 2 \frac{10 * 11}{2} + 10 * 10 \\ &= 1145 \end{aligned}$$

□

Tanım 37.8. $f : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a, b]$ aralığının $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\begin{aligned} M_k &= \max \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ m_k &= \min \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \end{aligned}$$

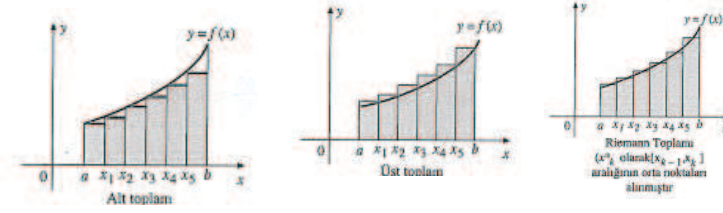
olsun.

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad \ddot{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

toplamlarına sırası ile f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen alt toplamı ve üst toplamı denir. $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında alınan herhangi bir nokta olmak üzere

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

toplama f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Riemann toplamı denir.

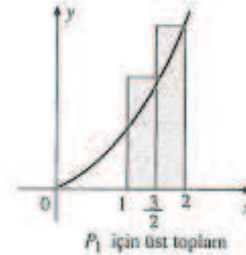
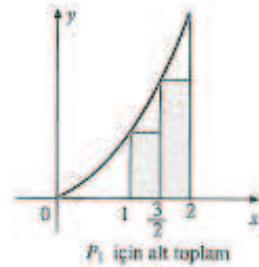


Her P parçalanması için

$$A(f, P) \leq R(f, P) \leq \ddot{U}(f, P)$$

önermesi doğrudur.

Örnek 37.9. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $P = \{1, \frac{3}{2}, 2\}$, $P_2 = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$ parçalanmalarına karşılık gelen alt ve üst toplamlarını bulunuz.



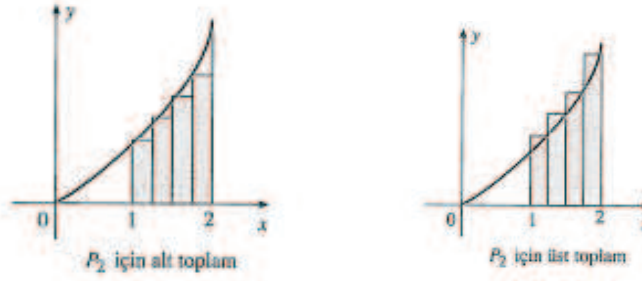
Çözüm

$$\begin{aligned}
 A(f, P_1) &= f(1) * \frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{2}\right) * \frac{1}{2} \\
 &= 1 * \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 * \frac{1}{2} \\
 &= \frac{13}{8} = 1.625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{U}(f, P_1) &= f\left(\frac{3}{2}\right) * \frac{1}{2} + f(2) * \frac{1}{2} \\
 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 * \frac{1}{2} + (2)^2 * \frac{1}{2} \\
 &= \frac{25}{8} = 3.125
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(f, P_2) &= f(1) * \frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{4}\right) * \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{2}\right) * \frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{4}\right) * \frac{1}{4} \\
 &= 1 * \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 * \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 * \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 * \frac{1}{4} \\
 &= \frac{63}{32} = 1.9688
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{U}(f, P_2) &= f\left(\frac{5}{4}\right) * \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{2}\right) * \frac{1}{4} + f\left(\frac{7}{4}\right) * \frac{1}{4} + f(2) * \frac{1}{4} \\
 &= \left(\frac{5}{4}\right)^2 * \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 * \frac{1}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 * \frac{1}{4} + 2^2 * \frac{1}{4} \\
 &= \frac{87}{32} = 2.7188
 \end{aligned}$$



□

Tanım 37.10. $f, [a, b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = I$$

limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun a dan b ye integrali denir ve

$$\int_a^b f(x) dx$$

ile gösterilir. Bu durumda $f, [a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir denir.

Örnek 37.11. $\int_0^1 x^2 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm $[0, 1]$ aralığını eşit uzunluklu n parçaya bölelim:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1$$

ve $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
 A(f, P) &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) \\
 &= \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\
 &= \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \\
 \ddot{U}(f, P) &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right] \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
 \end{aligned}$$

Parçalanma düzgün olduğundan $\|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$ kuralı geçerlidir. O halde

$$\begin{aligned}
 A(f, P) &\leq R(f, P) \leq \ddot{U}(f, P) \Rightarrow \\
 \lim_{\|P\| \rightarrow 0} A(f, P) &\leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P) \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ddot{U}(f, P) \Rightarrow \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right] &\leq \int_0^1 x^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right] \Rightarrow \\
 \frac{1}{3} &\leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

□

Teorem 37.12. $f, [a, b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer

- 1) f sürekli ise integrallenebilirdir.
- 2) f parçalı sürekli ise integrallenebilirdir.
- 3) f monoton veya iki monoton fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabiliyorsa integrallenebilirdir.

Örnek 37.13. $f(x) = \begin{cases} 1, x - \text{rasyonel} \\ 0, x - \text{irrasyonel} \end{cases}$ fonksiyonu integrallenemeyen bir fonksiyondur. Çünkü

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0$$

$$\ddot{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = 1$$

$$\begin{aligned} A(f, P) &\leq R(f, P) \leq \ddot{U}(f, P) \Rightarrow \\ \lim_{\|P\| \rightarrow 0} A(f, P) &\leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P) \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ddot{U}(f, P) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [0] &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [1] \Rightarrow \\ 0 &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = ? \end{aligned}$$

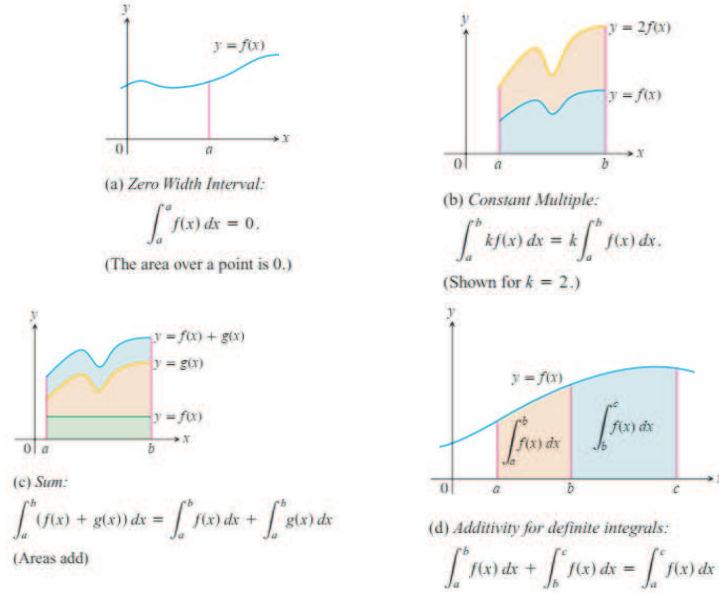
Teorem 37.14. $f, [a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x \in (a, b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dır. Bu formüle Newton-Leibnitz formülü de denir.

Teorem 37.15. $f, g, [a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

- 1) $\int_a^a f(x) dx = 0$
- 2) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- 3) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır. Yani $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$
- 4) $c \in (a, b)$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- 5) $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$



Örnek 37.16. $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$, $\int_1^4 f(x) dx = -2$, $\int_{-1}^1 g(x) dx = 7$ ise

1) $\int_4^1 f(x) dx = -\int_1^4 f(x) dx = -(-2) = 2$

2) $\int_{-1}^1 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 g(x) dx = 2 * 5 + 3 * 7 = 31$

3) $\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 - 2 = 3$

Örnek 37.17. $\int_0^1 x^2 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

□

Uyarı 37.18. $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$ integralinde $g(x) = u$ dönüşümü yapılarak integral $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$ formuna dönüşür.

Örnek 37.19. $\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} x \sin x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2} x \sin x dx &= - \int_1^0 u^{3/2} du = \int_0^1 u^{3/2} du = \frac{u^{5/2}}{5/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{5} \\
\cos x &= u \\
-\sin x dx &= du \\
\cos(0) &= 1 = u \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 = u
\end{aligned}$$

□

Örnek 37.20. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx &= \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan u \Big|_0^1 \\
\sin x &= u \\
\cos x dx &= du \\
\sin(0) &= 0 = u \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 = u \\
&= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

□

Örnek 37.21. $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm (LAPTÜ) $\rightarrow x$: polinom, $\cos x \rightarrow$ trigonometrik

$$\begin{aligned}
x = u &\Rightarrow dx = du \quad \cos x dx = dv \Rightarrow -\sin x = v \\
\int_0^{\pi} x \cos x dx &= -x \sin x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin x dx \\
&= -\pi \sin \pi + 0 \sin 0 - \cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2
\end{aligned}$$

□

38. İntegrallenebilen Fonksiyonlar için Önemli Özellikler

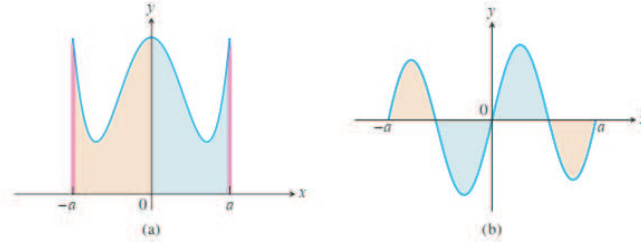
Teorem 38.1. $f, [a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

- 1) $\forall x \in [a, b],$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- 2) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Teorem 38.2. $f : [-a, a] \rightarrow IR$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

1) f -tek fonksiyon ise yani $f(-x) = -f(x)$ sağlanıyorsa $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

2) f -çift fonksiyon ise yani $f(-x) = f(x)$ sağlanıyorsa $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$



(a) f even, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ (b) f odd, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Örnek 38.3. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3 \cos x}{1 + \sin^{10} x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 \cos x}{1 + \sin^{10} x} \Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^3 \cos(-x)}{1 + \sin^{10}(-x)} \\ &= \frac{-x^3 \cos(x)}{1 + \sin^{10}(x)} = -f(x) \end{aligned}$$

olduğundan f -tek fonksiyon o halde $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3 \cos x}{1 + \sin^{10} x} dx = 0$. □

Örnek 38.4. $\int_{-2}^2 (x^4 - 4x^2 + 6) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^2 + 6 \Rightarrow f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 6 \\ &= x^4 - 4x^2 + 6 = f(x) \end{aligned}$$

olduğundan f -çift fonksiyon o halde

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^4 - 4x^2 + 6) dx &= 2 \int_0^2 (x^4 - 4x^2 + 6) dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} - 4 \frac{x^3}{3} + 6x \right]_0^2 \\ &= 2 * \left[\frac{2^5}{5} - 4 * \frac{2^3}{3} + 6 * 2 \right] = \frac{232}{15} \end{aligned}$$

□

Teorem 38.5. $f : [a, b] \rightarrow IR$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

- 1) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu her noktada diferansiyellenebilirdir ve $F'(x) = f(x)$.
 - 2) $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu her noktada diferansiyellenebilirdir ve $F'(x) = f(u(x)) u'(x)$.
 - 3) $F(x) = \int_{v(x)}^b f(t) dt$ ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu her noktada diferansiyellenebilirdir ve $F'(x) = -f(v(x)) v'(x)$.
 - 4) $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$ ile tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu her noktada diferansiyellenebilirdir ve $F'(x) = f(u(x)) u'(x) - f(v(x)) v'(x)$.
- Bu formüle Leibnitz formülü de denir.

Örnek 38.6. $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ olduğuna göre $F'(x) = e$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{x^2} = e \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

□

Örnek 38.7. Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

- 1) $\frac{d}{dx} \int_a^x \cos t dt$
- 2) $\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$
- 3) $\frac{d}{dx} \int_x^0 3t \sin t dt$
- 4) $\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \cos t dt$
- 5) $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \sin(t^2) dt$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt$

Çözüm 1)

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \cos t dt = \cos x$$

2)

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+x^2}$$

3)

$$\frac{d}{dx} \int_x^0 3t \sin t dt = -3x \sin x$$

4)

$$\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \cos t dt = \cos(x^2) 2x$$

5)

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \sin(t^2) dt = \sin(x^4) 2x - \sin(t^2)$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt = \infty \cdot 0$$

L'Hôpital Kuralından

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}}{\frac{d}{dx} (x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{1+x^4}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(1+x^4)} = 0 \end{aligned}$$

□

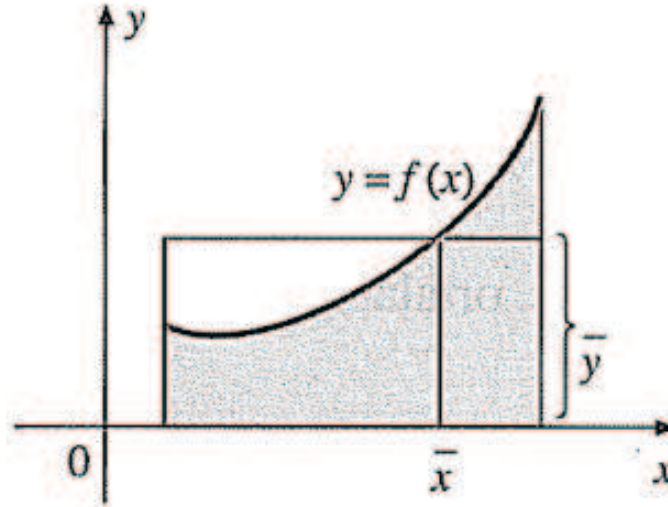
Tanım 38.8. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değeri

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ifadesi ile hesaplanır. Buna göre

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \bar{y}$$

olduğundan integral (pozitif bir fonksiyonun altında kalan alan) eni $b-a$ boyu $\bar{y}$ olan bir dikdörtgenin alanına eşittir.



Örnek 38.9. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız.

Çözüm

$$\bar{y} = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 3$$

□

Teorem 38.10. (Ortalama Değer Teoremi) $f : [a, b] \rightarrow IR$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

olacak şekilde en az bir $\bar{x} \in [a, b]$ sayısı vardır.

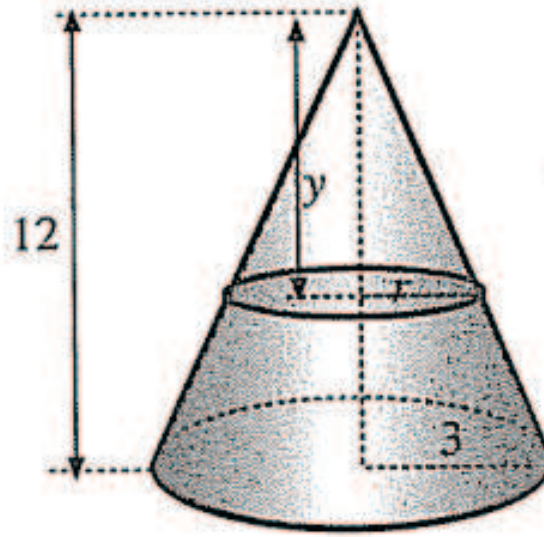
Örnek 38.11. $f(x) = mx + n$ fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Fonksiyon bu ortalama değerini hangi noktasında alır?

Çözüm

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (mx + n) dx = \frac{1}{b-a} \left. m \frac{x^2}{2} + nx \right|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{m}{2} (b^2 - a^2) + n(b-a) \right) = \frac{m}{2} (b+a) + n \\ \bar{y} &= f(\bar{x}) \Rightarrow \frac{m}{2} (b+a) + n = mx + n \Rightarrow x = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

□

Örnek 38.12. Taban yarıçapı 3cm yüksekliği 12cm olan bir dik dairesel koni tepesinden y birim uzakta tabanına paralel bir düzlem ile kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?



Çözüm Dik dairesel koninin iç kesmindeki dik üçgende benzerlikten

$$\frac{r}{3} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 4r$$

Kesitin alanı:

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\pi y^2, 0 \leq y \leq 12$$

Buna göre ortalama alan

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{12-0} \int_0^{12} A(y) dy = \frac{1}{12} \int_0^{12} \left(\frac{1}{16}\pi y^2\right) dy = \frac{\pi}{12 * 16} \int_0^{12} y^2 dy \\ &= \frac{\pi}{192} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{12} = \frac{\pi}{192} * \frac{12^3}{3} = 3\pi \end{aligned}$$

□

Teorem 38.13. (Genelleşmiş Ortalama Değer Teoremi) $f : [a, b] \rightarrow IR, g : [a, b] \rightarrow IR$ fonksiyonları aynı işaretli ve integrallenebilen bir fonksiyonlar olsun.

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

CHAPTER 6

Belirli İntegrallerin Uygulamaları

Bu bölümde belirli integraleden faydalanarak, alan hesabı, hacim hesabı, eğri uzunluğu hesaplanması, kütle merkezi ve dönel yüzeylerin hacmi gibi konular ele alınacaktır.

39. Alan Hesabı

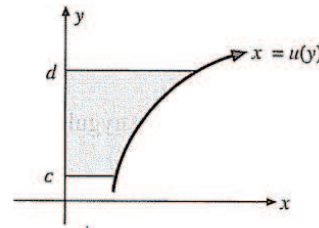
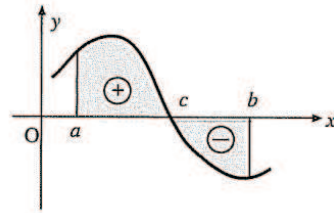
$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a, x = b$ ve Ox - eksenini ile sınırlandırılmış bölgenin alanını

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

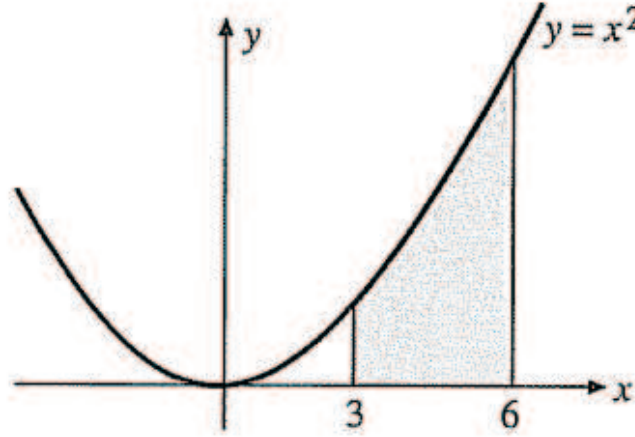
formülü ile hesaplarız. Aynı şekilde $x = u(y)$ fonksiyonunun $y = c, y = d$ ve Oy - eksenini ile sınırlandırılmış bölgenin alanını

$$A = \int_c^d |u(y)| dy$$

formülü ile hesaplarız.



Örnek 39.1. $y = x^2$ eğrisi, $x = 3, x = 6$ doğrusu ve Ox - eksenini ile sınırlandırılmış bölgenin alanını bulunuz.

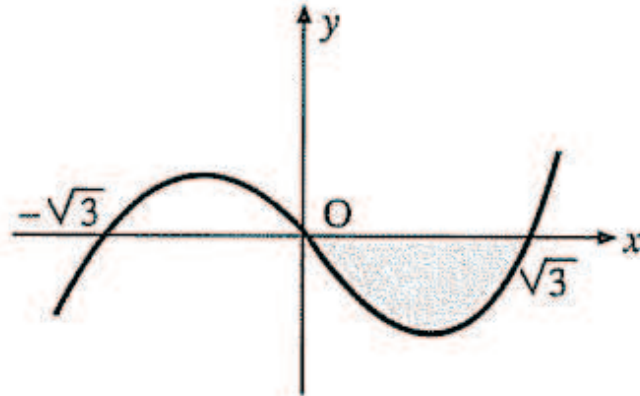


Çözüm

$$A = \int_3^6 |x^2| dx = \int_3^6 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_3^6 = \frac{1}{3} (6^3 - 3^3) = 63$$

□

Örnek 39.2. Dördüncü bölgede $y = x^3 - 3x$ eğrisi ile Ox - eksenini tarafından sınırlandırılmış bölgenin alanını bulunuz.

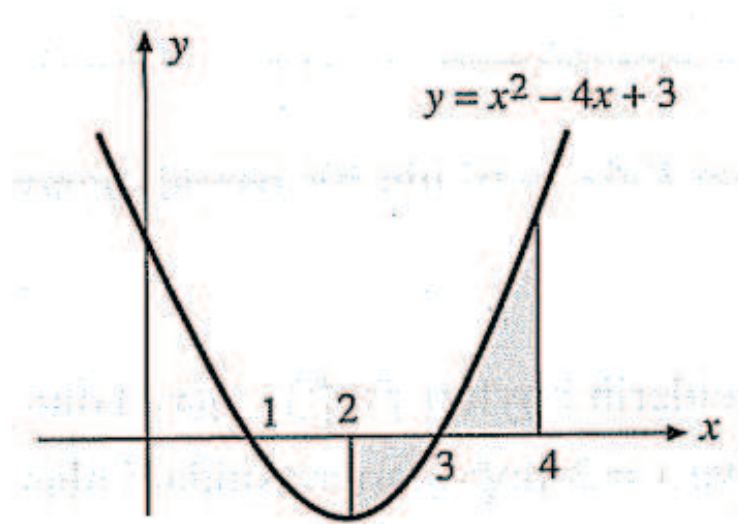


Çözüm

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} |x^3 - 3x| dx = - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) dx = - \left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right|_0^{\sqrt{3}} = - \left(\frac{(\sqrt{3})^4}{4} - \frac{3 * (\sqrt{3})^2}{2} \right) = \frac{9}{4}$$

□

Örnek 39.3. $y = x^2 - 4x + 3$ eğrisi ile $x = 2, x = 4$ doğruları ile Ox - eksenini tarafından sınırlandırılmış bölgenin alanını bulunuz.

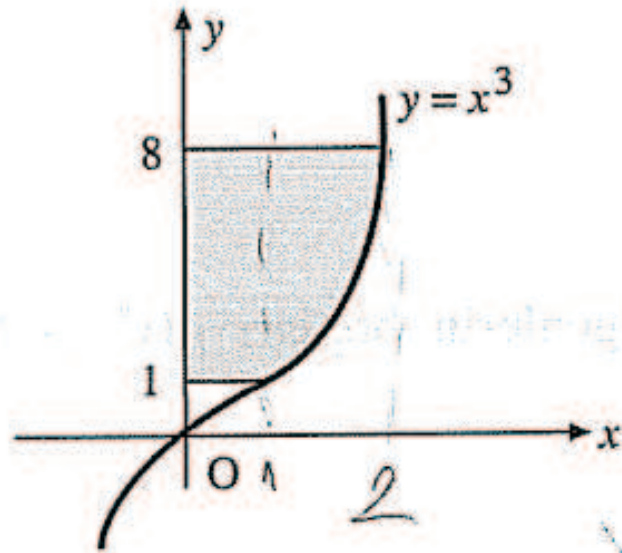


Çözüm

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 |x^2 - 4x + 3| dx = - \int_2^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= - \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right|_2^3 + \left. \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 3x \right|_3^4 \\ &= - \left(\frac{3^3}{3} - 2 * 3^2 + 3 * 3 \right) + \left(\frac{4^3}{3} - 2 * 4^2 + 3 * 4 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 2 * 3^2 + 3 * 3 \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \end{aligned}$$



Örnek 39.4. $y = x^3$ eğrisi ile $y = 1, y = 8$ doğruları ile Oy - eksenini tarafından sınırlandırılmış bölgenin alanını bulunuz.

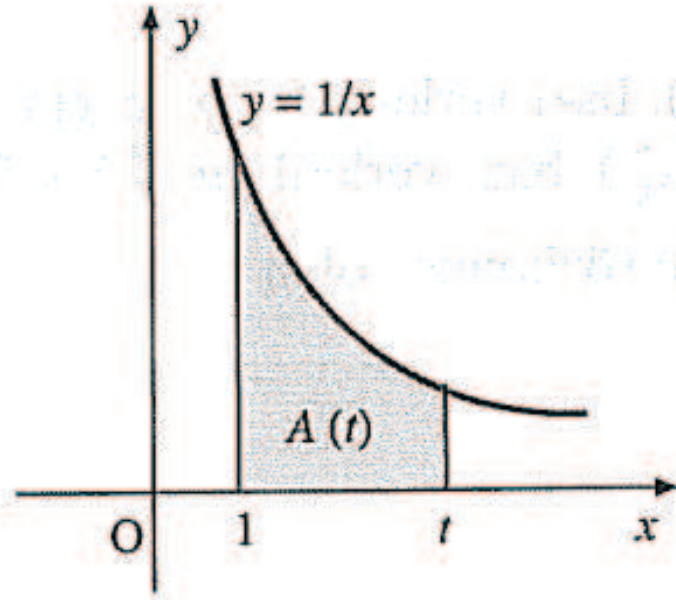


Çözüm

$$\begin{aligned} A &= \int_1^8 |\sqrt[3]{y}| dy = \int_1^8 y^{1/3} dy = \left. \frac{y^{4/3}}{4/3} \right|_1^8 = \frac{3}{4} (8^{4/3} - 1^{4/3}) \\ &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$



Örnek 39.5. $y = \frac{1}{x}$ eğrisi ile $x = 1, x = t$ doğruları ile Ox - eksenini tarafından sınırlandırılmış bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm

$$A = \int_1^t \left| \frac{1}{x} \right| dx = \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^t = \ln t$$

Böylece her bir t sayısına karşılık gelen alan t 'nin doğal logaritmasıdır. □

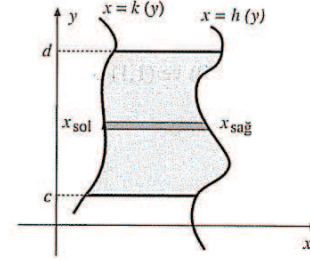
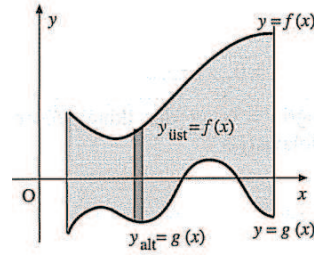
39.1. İki Eğri Arasında Kalan Alan Hesabı. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonu ve $x = a, x = b$ doğruları ile sınırlandırılmış bölgenin alanını

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

formülü ile hesaplarız. Aynı şekilde $k(y)$ ve $h(y)$ fonksiyonu ve $y = c, y = d$ doğruları ile sınırlandırılmış bölgenin alanını

$$A = \int_c^d |k(y) - h(y)| dy$$

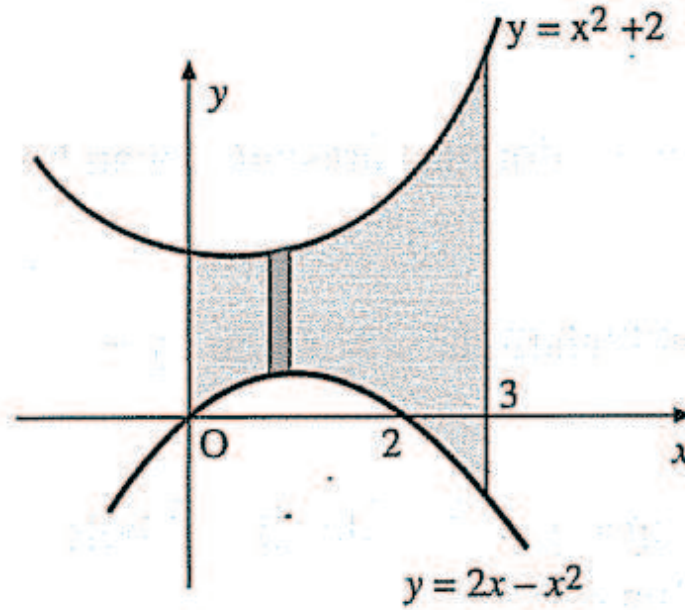
formülü ile hesaplarız.



Bu alanı hesaplarken şu yöntemi uygulamak işlemleri kolaylaştırmaktadır.

- (1) $f(x)$, $g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları çizilerek alanı istenilen bölge belirlenir.
- (2) Bölge içinde kalacak şekilde Oy -eksenine paralel çizgiler çizilerek şeridin üst ucundaki ve alt ucundaki eğriler belirlenir ve ona göre çıkarma işlemi uygulanır.
- (3) Çıkan fonksiyon üzerinden integral alınarak alan hesaplanır.

Örnek 39.6. $y = x^2 + 2$, $y = 2x - x^2$ parabolleri ile $x = 0$ ve $x = 3$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

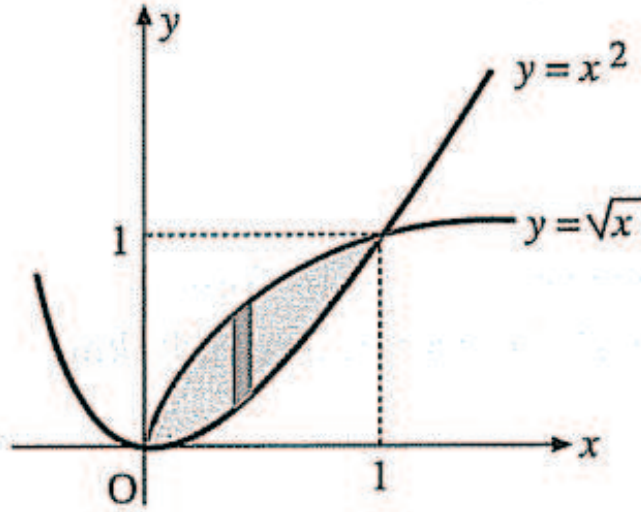


Çözüm $y = x^2 + 2$ parabolü $y = 2x - x^2$ parabolünün üstünde kalmaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^3 |x^2 + 2 - (2x - x^2)| dx = \int_0^3 (2x^2 - 2x + 2) dx \\
 &= \left. 2\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right|_0^3 = \left(2\frac{3^3}{3} - 3^2 + 2 \cdot 3 \right) = 15
 \end{aligned}$$

□

Örnek 39.7. $y = x^2, y^2 = x$ parabolleri arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



Çözüm Önce parabollerin kesim noktalarını bulalım:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y^2 &= x \end{aligned} \Rightarrow (x^2)^2 = x \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$y^2 = x$ parabolü $y = x^2$ parabolünün üstünde kalmaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2| dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left. \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \left(2\frac{1^{3/2}}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

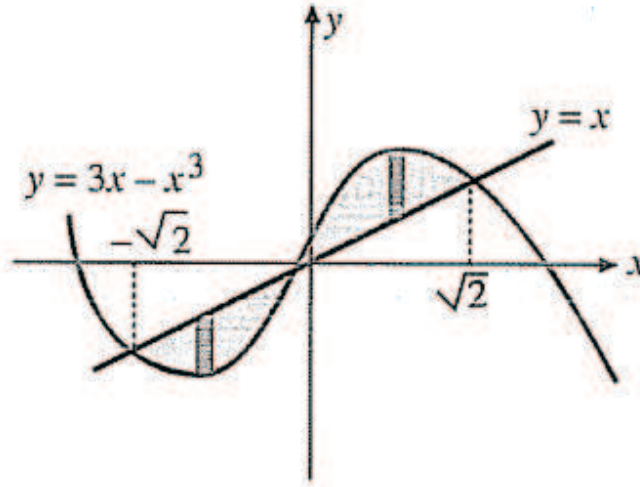
Çözüm $y = x^2 + 2$ parabolü $y = 2x - x^2$ parabolünün üstünde kalmaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 |x^2 + 2 - (2x - x^2)| dx = \int_0^3 (2x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \left. 2\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right|_0^3 = \left(2\frac{3^3}{3} - 3^2 + 2 \cdot 3 \right) = 15 \end{aligned}$$

□

□

Örnek 39.8. $y = 3x - x^3$ parabolü ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



Çözüm Önce eğrilerin kesim noktalarını bulalım:

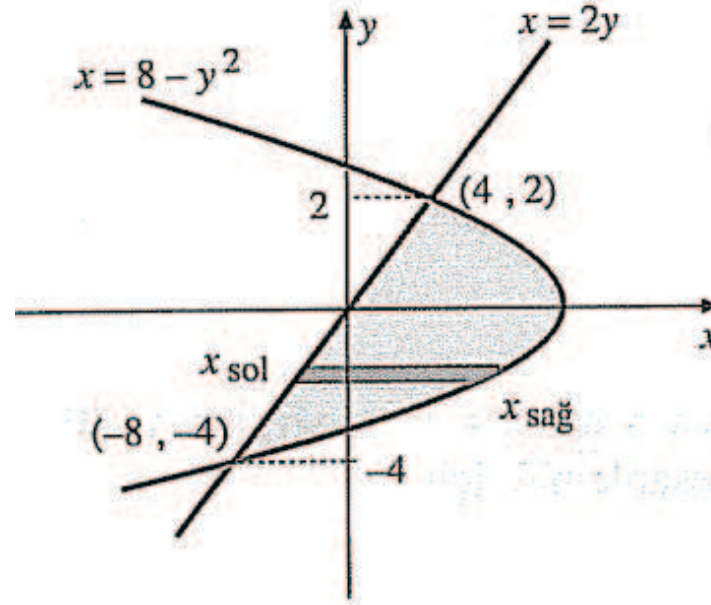
$$\begin{aligned} y &= 3x - x^3 \\ y &= x \end{aligned} \Rightarrow 3x - x^3 = x \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$$

$[-\sqrt{2}, 0]$ aralığında $y = x$ doğrusu $y = 3x - x^3$ parabolünün üstünde, $[0, \sqrt{2}]$ aralığında $y = 3x - x^3$ parabolü $y = x$ doğrusu üstünde kalmaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |3x - x^3 - x| dx = \int_{-\sqrt{2}}^0 (x - (3x - x^3)) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (3x - x^3 - x) dx \\ &= \left. \frac{x^4}{4} - x^2 \right|_{-\sqrt{2}}^0 + \left. -\frac{x^4}{4} + x^2 \right|_0^{\sqrt{2}} \\ &= -\left(\frac{(-\sqrt{2})^4}{4} - (-\sqrt{2})^2 \right) + \left(-\frac{(\sqrt{2})^4}{4} + (\sqrt{2})^2 \right) = 2 \end{aligned}$$

□

Örnek 39.9. $x = 8 - y^2$ parabolü ile $x = 2y$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.



Çözüm Önce eğrilerin kesim noktalarını bulalım:

$$\begin{aligned} x &= 8 - y^2 \\ x &= 2y \end{aligned} \Rightarrow 8 - y^2 = 2y \Rightarrow y = -4, y = 2$$

$x = 8 - y^2$ parabolü $x = 2y$ doğrusunun üstünde kalmaktadır. Buna göre

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^2 |8 - y^2 - 2y| dx = \int_{-4}^2 (8 - y^2 - 2y) dx \\ &= 8y - \frac{y^3}{3} - y^2 \Big|_{-4}^2 \\ &= \left(8 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - 2^2 \right) - \left(8 \cdot (-4) - \frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2 \right) = 36 \end{aligned}$$

39.2. Parametrik Eğrilerin Sınırladığı Bölgenin Alanı. g ve h türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere $x = g(t)$, $y = h(t)$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplamak için

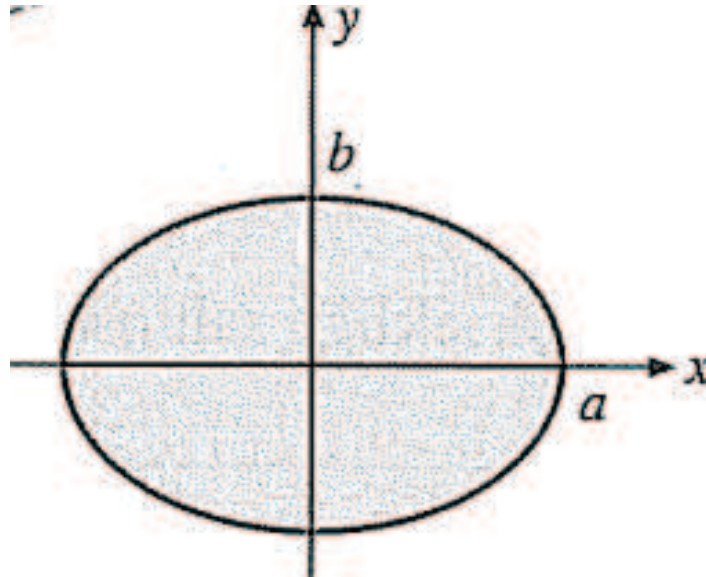
$$A = \int_{t_1}^{t_2} |h'(t)| g'(t) dt$$

formülü ile hesaplanır. Burada $t_1 = g^{-1}(a)$, $t_2 = g^{-1}(b)$ dir. Benzer şekilde $y = c$, $y = d$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplamak için

$$A = \int_{t_3}^{t_4} |g'(t)| h'(t) dt$$

formülü ile hesaplanır. Burada $t_3 = h^{-1}(a)$, $t_4 = h^{-1}(b)$ dir.

Örnek 39.10. $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ parametrik denklemi ile verilen elipsin alanını bulunuz.



Çözüm

$$\begin{aligned}
x &= 0 \Rightarrow 0 = a \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\
x &= a \Rightarrow 0 = a \cos t \Rightarrow t = 0 \\
A &= 4 \int_{\pi/2}^0 (b \sin t) (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \\
&= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab t - \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab
\end{aligned}$$

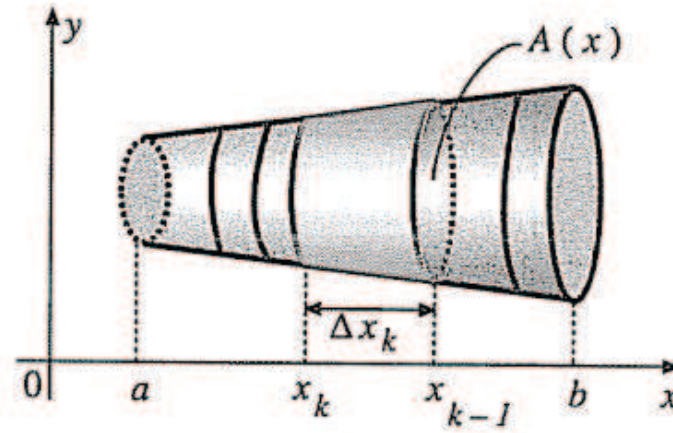
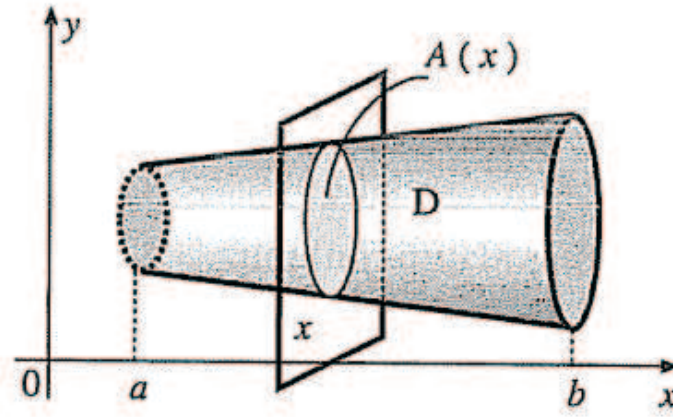
□

40. Kesit Yöntemi ile Hacim Hesabı

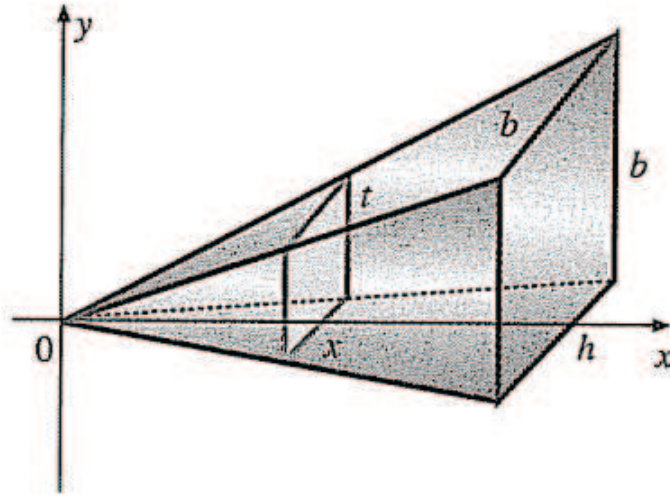
Üç boyutlu bir uzayda bir cisim $[a, b]$ aralığına yerleştirilmiş olsun. Ox -eksenine dik olan bir düzlem ile cismin kesim noktası $A(x)$ ile gösterilmek üzere cismin hacmi

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

formülü ile hesaplanır.



Örnek 40.1. Tabanı b birim olan bir kare piramidin yüksekliği h olmak üzere piramidin hacmini bulunuz.



Çözüm Piramidin $Ox - \text{eksenine}$ yerleştirip bu eksene dik bir kesit aldığımızda elde ettiğimiz şekil bir karedir. Bu karenin bir kenarına t diyelim. Ve bu kesiti aldığımız yükseklikte x dersek üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{x}{h} = \frac{t}{b} \Rightarrow t = \frac{b}{h}x$$

Karenin alanı

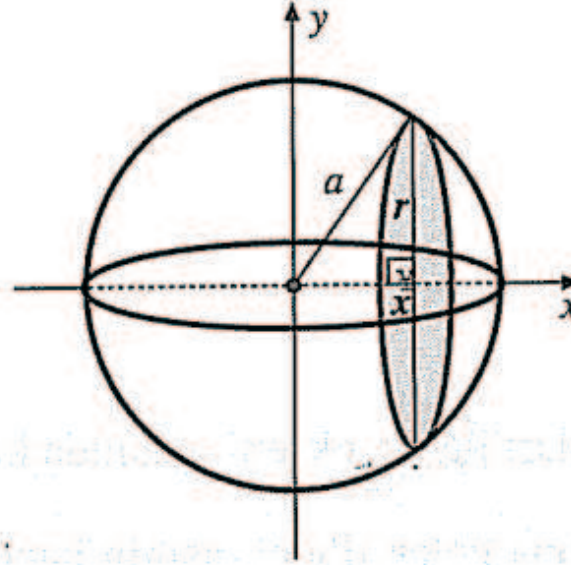
$$A = t^2 = \left(\frac{b}{h}x\right)^2$$

olmak üzere hacim

$$V = \int_0^h \left(\frac{b}{h}x\right)^2 dx = \frac{b^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3}b^2h$$

□

Örnek 40.2. a yarıçaplı bir kürenin hacmini bulunuz.



Çözüm Kürenin merkezinden x birim uzaklıkta bir kesit alalım ve aldığımız kesitin yarıçapına r dersek kesitin alanı πr^2 olacaktır. İçteki üçgende Pisagor bağıntısından

$$a^2 = r^2 + x^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow$$

$$A = \pi r^2 = \pi (a^2 - x^2) \Rightarrow$$

$$V = \int_{-a}^a \pi (a^2 - x^2) dx = \pi a^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a^3$$

□

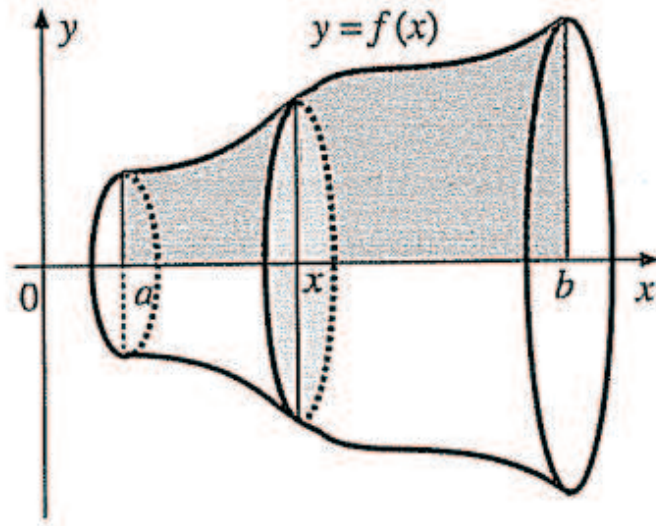
41. Dönel Cisimlerin Hacimlerinin Hesaplanması

41.1. Disk Yöntemi.

- $y = f(x)$ eğrisi ile $x = a, x = b$ doğruları ve Ox -ekseninin sınırlandığı B bölgesinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

formülü ile hesaplarız.



- Benzer şekilde $x = g(y)$ eğrisi ile $y = c, y = d$ doğruları ve Oy -ekseninin sınırladığı B bölgesinin Oy -ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini

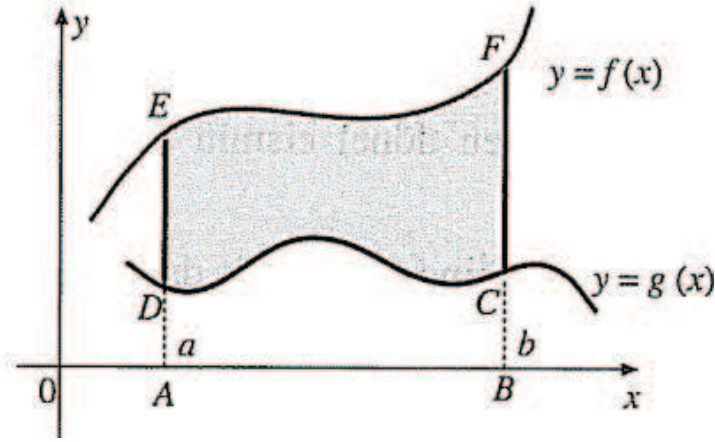
$$V = \pi \int_d^d [g(y)]^2 dy$$

formülü ile hesaplarız.

- $[a, b]$ aralığında $0 \leq g(x) \leq f(x)$ olmak üzere, $f(x), g(x)$ eğrileri ile $x = a, x = b$ doğrularının sınırladığı B bölgesinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

formülü ile hesaplarız.

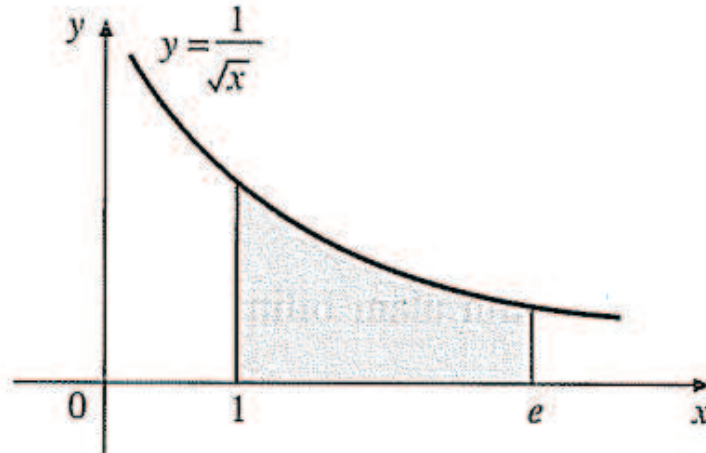


- Benzer şekilde $[c, d]$ aralığında $0 \leq v(y) \leq u(y)$ olmak üzere, $u(y), v(y)$ eğrileri ile $y = c, y = d$ doğrularının sınırlandığı B bölgesinin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini

$$V = \pi \int_c^d [u(y)]^2 dy - \pi \int_c^d [v(y)]^2 dy$$

formülü ile hesaplarız.

Örnek 41.1. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi $x = e, x = 1$ doğruları ve Ox -ekseninin sınırlandığı B bölgesinin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

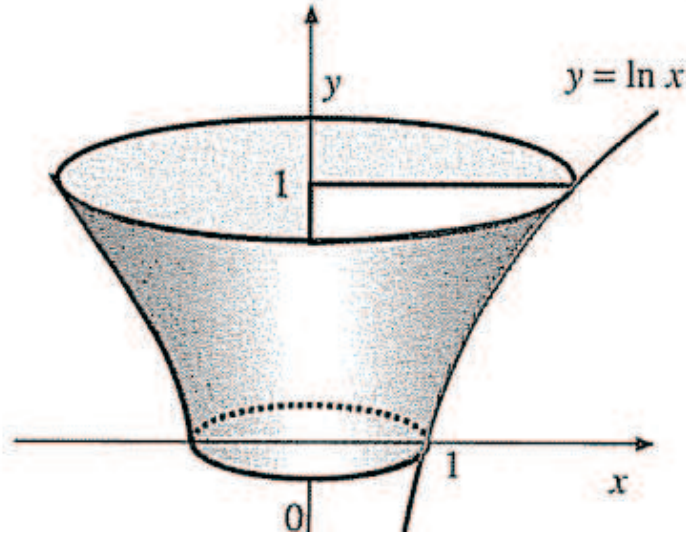


Çözüm

$$V = \pi \int_1^e \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right]^2 dx = \pi \int_1^e \frac{1}{x} dx = \pi \ln x \Big|_1^e = \pi$$

□

Örnek 41.2. $y = \ln x$ eğrisi $y = 1$ doğrusu ve Ox -, Oy -eksenlerinin sınırlandığı B bölgesinin Ox - eksen etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

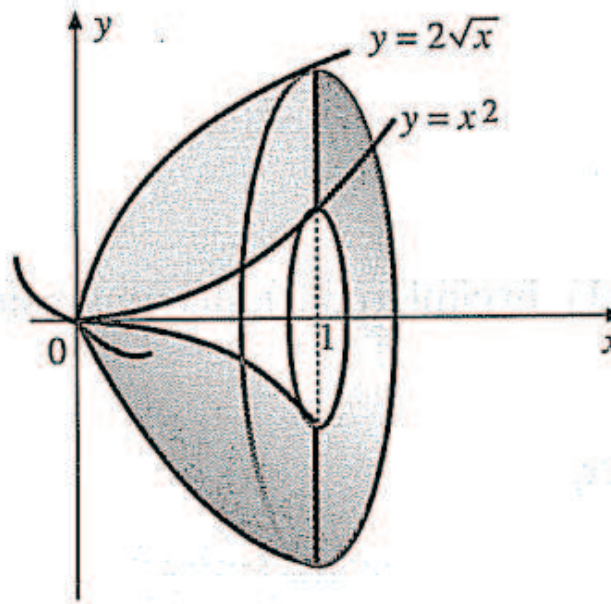


Çözüm

$$\begin{aligned} y &= \ln x \Rightarrow x = e^y \\ V &= \pi \int_0^1 [e^y]^2 dy = \pi \int_0^1 e^{2y} dy = \frac{\pi}{2} e^{2y} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

□

Örnek 41.3. $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ eğrileri ile $x = 1$ doğrularının sınırlandığı B bölgesinin Ox - eksen etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

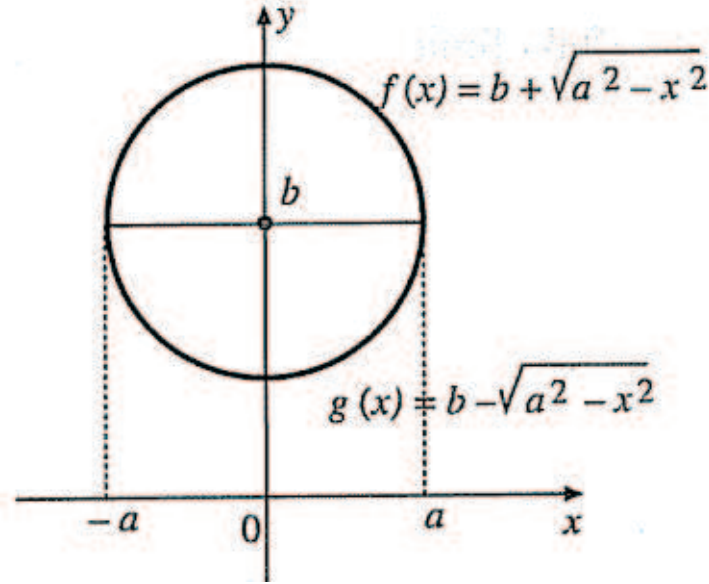


Çözüm

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 [2\sqrt{x}]^2 dx - \pi \int_0^1 [x^2]^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 4x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx \\
 &= \pi 2x^2 \Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{9\pi}{5}
 \end{aligned}$$

□

Örnek 41.4. Merkezi $(0, b)$ noktasında bulunan $a (< b)$ yarıçaplı bir çember tarafından sınırlanan bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin (torun) hacmini bulunuz.



Çözüm Verilen çemberin denklemi

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2 \Rightarrow y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Buna göre üstte kalan eğri $b + \sqrt{a^2 - x^2}$ dan $b - \sqrt{a^2 - x^2}$ eğrisi çıkartılarak elde edilecek hacim

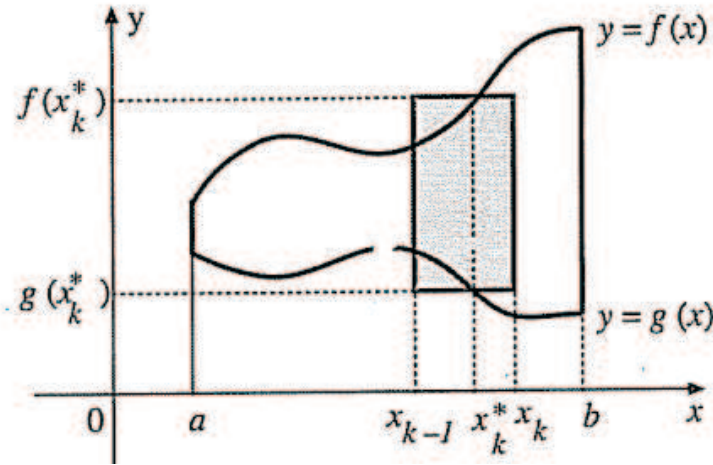
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-a}^a \left[b + \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 dx - \pi \int_{-a}^a \left[b - \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 dx \\
 &= \pi \int_{-a}^a \left[2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 + b^2 - x^2 \right] dx - \pi \int_{-a}^a \left[a^2 - 2b\sqrt{a^2 - x^2} + b^2 - x^2 \right] dx \\
 &= 4b\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4b\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt \\
 &\quad \begin{aligned} x &= a \sin t \\ dx &= a \cos t dt \\ a &= a \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ -a &= a \sin t \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \\
 &= 4ba^2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ba^2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2ba^2\pi t + \frac{\sin 2t}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2ba^2\pi^2
 \end{aligned}$$

41.2. Kabuk Yöntemi.

- $[a, b]$ aralığında $f(x), g(x)$ eğrileri ile $x = a, x = b$ doğrularının sınırladığı B bölgesinin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini

$$V = 2\pi \int_a^b |x[f(x) - g(x)]| dx$$

formülü ile hesaplarız.

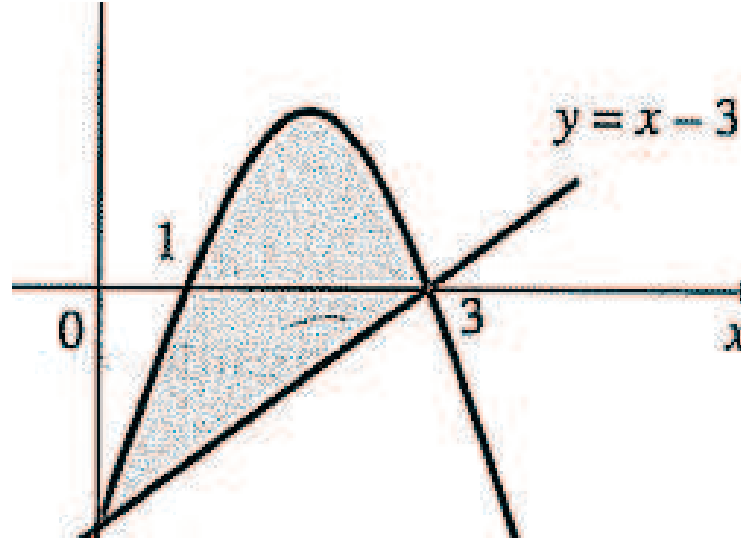


- Benzer şekilde $[c, d]$ aralığında $u(y), v(y)$ eğrileri ile $y = c, y = d$ doğrularının sınırladığı B bölgesinin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini

$$V = \pi \int_c^d |y[u(y) - v(y)]| dy$$

formülü ile hesaplarız.

Örnek 41.5. $y = -x^2 + 4x - 3$ parabolü ile $y = x - 3$ doğrusu arasında kalan bölgenin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

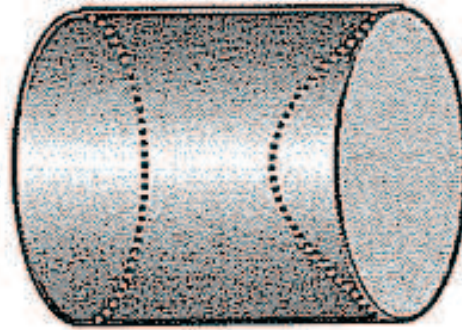
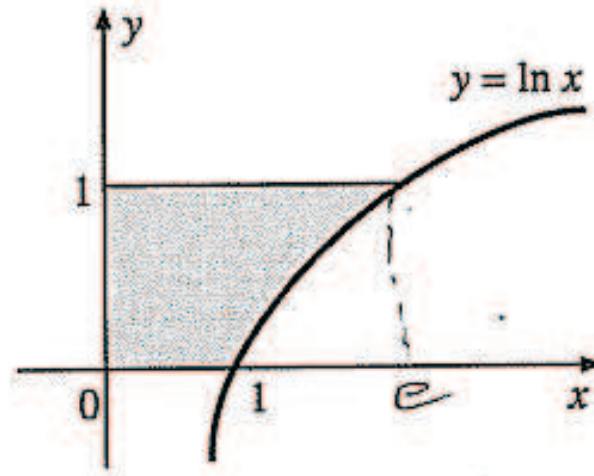


Çözüm

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^3 |x[f(x) - g(x)]| dx = 2\pi \int_0^3 |x[-x^2 + 4x - 3 - (x - 3)]| dx \\
 &= 2\pi \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = 2\pi x^3 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = 2\pi \left(3^3 - \frac{3^4}{4}\right) = \frac{27}{2}\pi
 \end{aligned}$$

□

Örnek 41.6. $y = \ln x$ eğrisi ile Oy , Ox - eksenleri ve $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



Çözüm

$$\begin{aligned}
 y &= \ln x \Rightarrow x = e^y \\
 V &= 2\pi \int_0^1 |y[e^y - 0]| dy = 2\pi \int_0^1 ye^y dy \text{ (LAPTÜ)}, y = u \Rightarrow dy = du, e^y dy = dv \Rightarrow v = e^y \\
 &= 2\pi \left[ye^y \Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy \right] = 2\pi [e - e^y \Big|_0^1] = 2\pi
 \end{aligned}$$

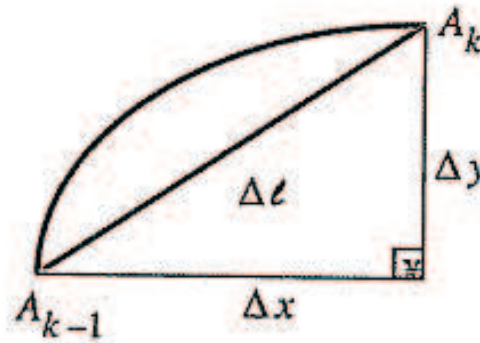
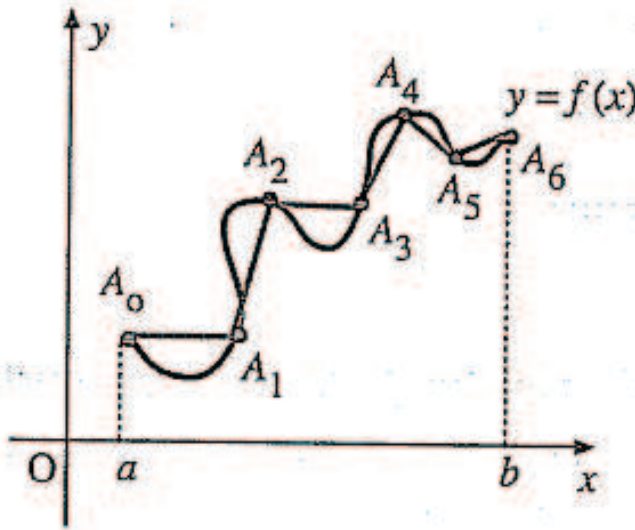
□

42. Eğri Uzunluğu Hesabı

- $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki eğrinin uzunluğunu

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

formülü ile hesaplanır.



- $x = g(y)$ fonksiyonunun $[c, d]$ aralığındaki eğrinin uzunluğunu

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

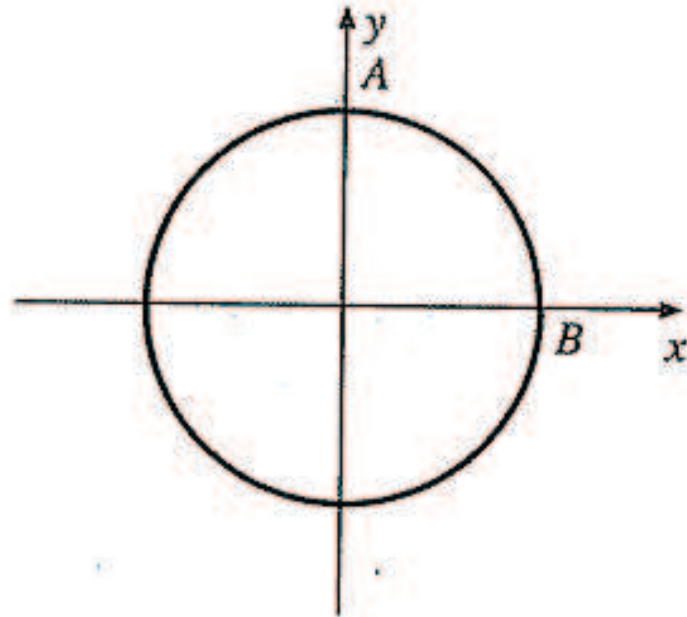
formülü ile hesaplanır.

- $x = u(t), y = v(t)$ parametrik denklemi ile verilen bir eğrinin $[t_1, t_2]$ aralığındaki uzunluğunu

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

formülü ile hesaplanır.

Örnek 42.1. a yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz.

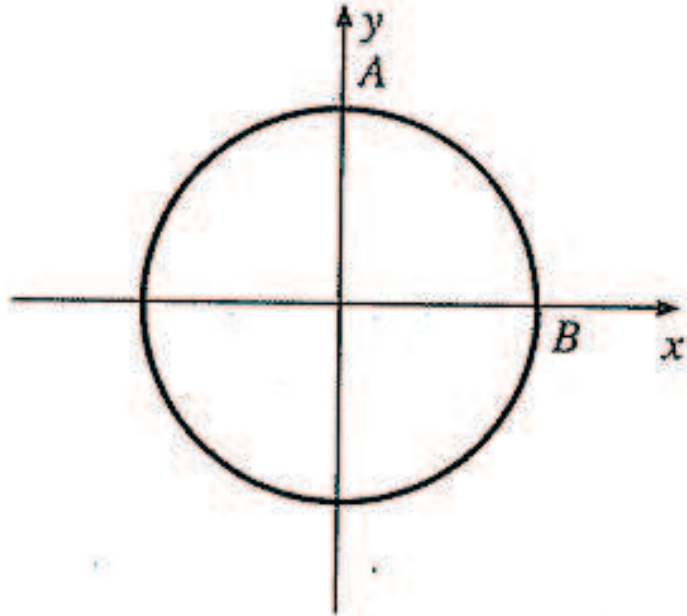


Çözüm Çemberin uzunluğu AB yayının uzunlunun 4 katına eşittir. Buna göre

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= a^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = \pm (a^2 - x^2)^{-1/2} x \\
 \ell &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\
 &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4a \frac{\pi}{2} = 2a\pi
 \end{aligned}$$

□

Örnek 42.2. a yarıçaplı çemberin uzunluğunu bulunuz.

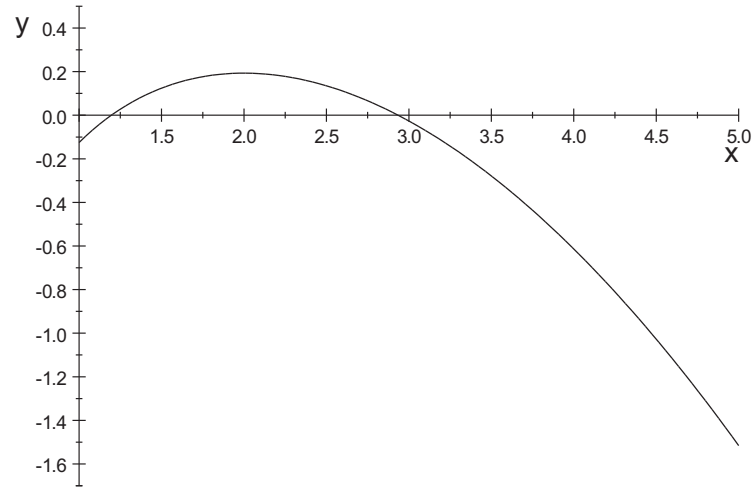


Çözüm Çemberin uzunluğu AB yayının uzunlunun 4 katına eşittir. Buna göre

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= a^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = \pm (a^2 - x^2)^{-1/2} x \\
 \ell &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\
 &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4a \frac{\pi}{2} = 2a\pi
 \end{aligned}$$

□

Örnek 42.3. $y = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ fonksiyonunun $[2, 4]$ aralığındaki eğrinin uzunluğunu hesaplayınız.

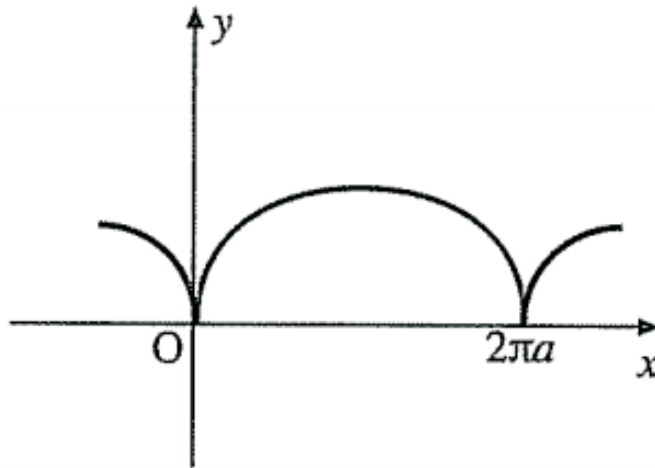


Çözüm

$$\begin{aligned}
y &= \ln x - \frac{1}{8}x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x \\
\ell &= \int_2^4 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x\right)^2} dx \\
&= \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{16x^2} (x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{4} \int_2^4 \frac{(x^2 + 4)}{x} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_2^4 \left(x + \frac{4}{x}\right) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} + 4 \ln x\right]_2^4 \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{4^2}{2} + 4 \ln 4 - \frac{2^2}{2} - 4 \ln 2\right) = \ln 4 - \ln 2 + \frac{3}{2} \\
&= \ln 2 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

Örnek 42.4. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ parametrik denklemi ile verilen bir eğrinin $[0, 2\pi]$ aralığındaki uzunluğunu hesaplayınız.



Çözüm

$$\begin{aligned}
x' &= a(1 - \cos t), y' = a \sin t \\
\ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{-2a^2(\cos t - 1)} dt \\
&= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}\right)} dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a - \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a
\end{aligned}$$

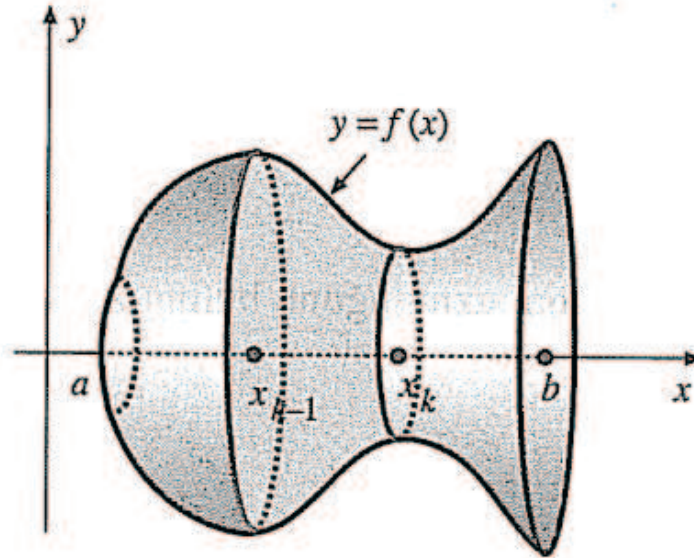
□

43. Dönel Yüzeylerin Alan Hesabı

- $y = f(x)$ eğrisi ile $x = a, x = b$ doğruları ve Ox -ekseninin sınırladığı B bölgesinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

formülü ile hesaplarız.



- $x = u(y)$ eğrisi ile $y = c, y = d$ doğruları ve Oy -ekseninin sınırladığı B bölgesinin Oy - eksenı etrafında döndürölmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanı

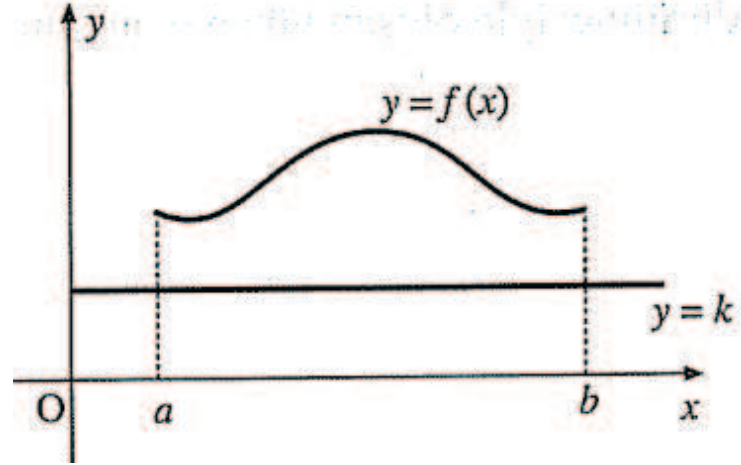
$$S = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

formölü ile hesaplarız.

- $y = f(x)$ eğrisi ile $x = a, x = b$ doğruları ve $y = k$ doğrusunun sınırladığı B bölgesinin $y = k$ doğrusu etrafında döndürölmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |y - k| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

formölü ile hesaplarız.



- $x = u(y)$ eğrisi ile $y = c, y = d$ doğruları ve $x = m$ doğrusunun sınırladığı B bölgesinin $x = m$ doğrusu etrafında döndürölmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_c^d |x - m| \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

formölü ile hesaplarız.

- $x = u(t), y = v(t)$ parametrik denklemi ile verilen bir eğrinin Ox - eksenı etrafında döndürölmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

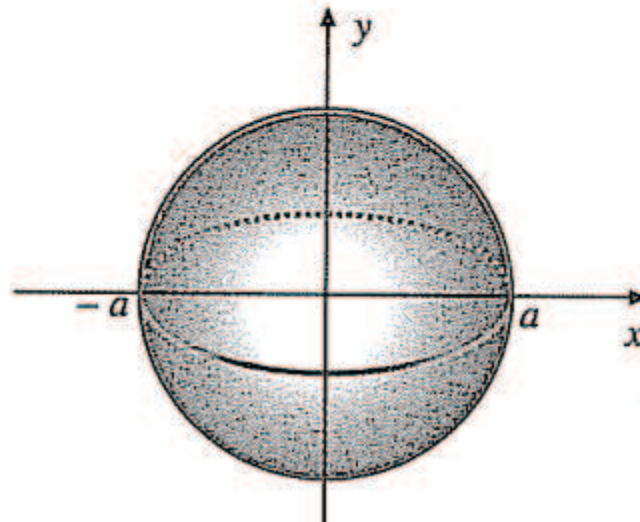
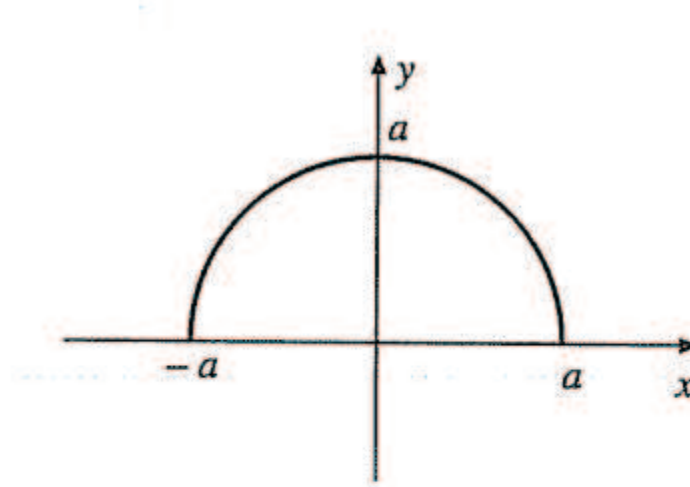
formölü ile hesaplanır.

- $x = u(t), y = v(t)$ parametrik denklemi ile verilen bir eğrinin Oy - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

formülü ile hesaplanır.

Örnek 43.1. a yarıçaplı kürenin yüzey alanını hesaplayınız.

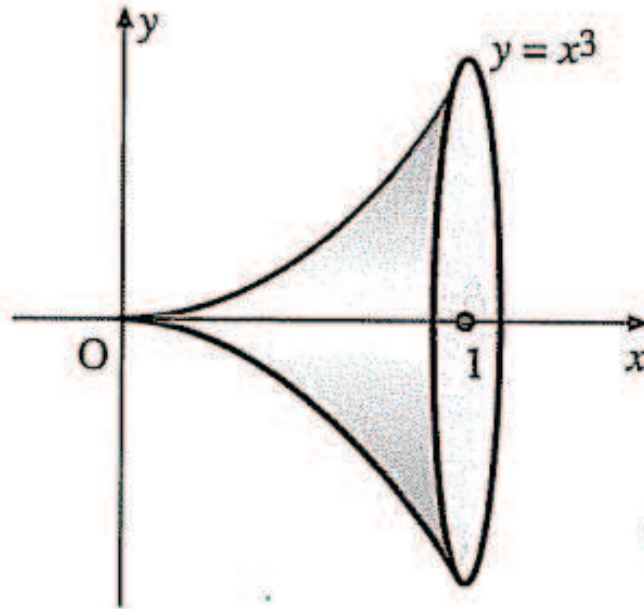


Çözüm $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarıçemberinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesi ile küre oluşur.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = -(a^2 - x^2)^{-1/2} x \\ S &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = 2\pi a \int_0^{2\pi} dx = 4\pi^2 a \end{aligned}$$

□

Örnek 43.2. $y = x^3$ eğrisi ile $x = 0, x = 1$ doğruları ve Ox -ekseninin sınırlandığı B bölgesinin Ox -ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanını hesaplayınız.

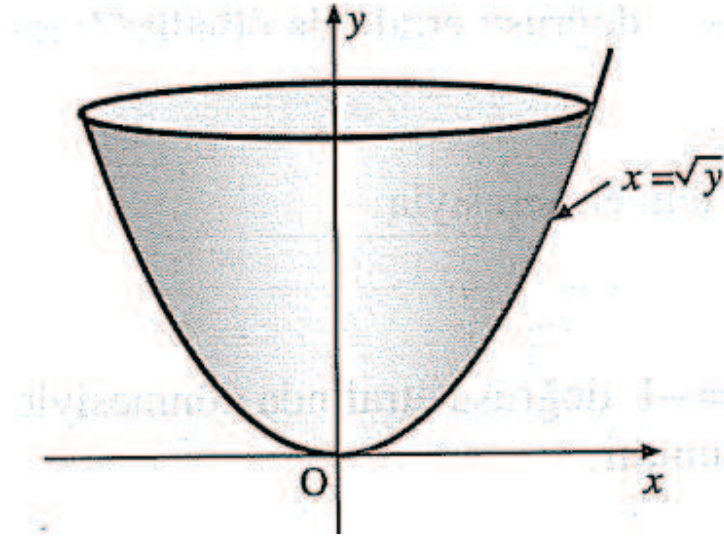


Çözüm

$$\begin{aligned}
y &= x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 \\
S &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \\
&= \frac{2\pi}{36} - \frac{(1 + 9x^4)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27} \left(\sqrt[3]{10^3} - 1 \right)
\end{aligned}$$

□

Örnek 43.3. $x = \sqrt{y}$ eğrisi ile $y = 0, y = 2$ doğruları ve Oy -ekseninin sınırlandığı B bölgesinin Oy -ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanını hesaplayınız.

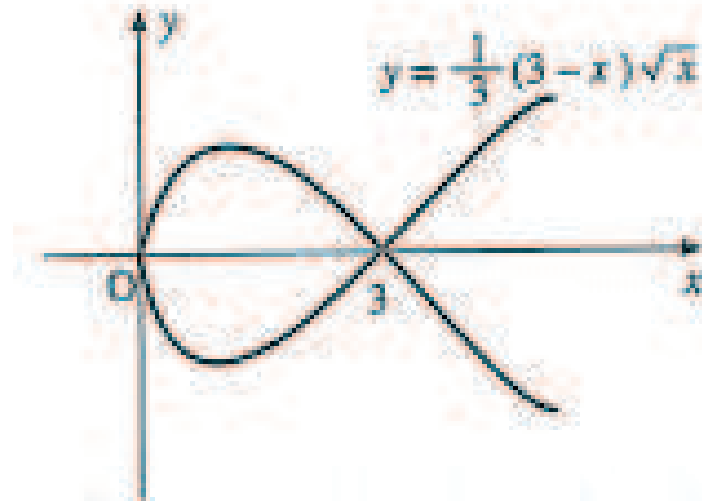


Çözüm

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{y} \Rightarrow x' = \frac{1}{2}y^{-1/2} \\
S &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}y^{-1/2}\right)^2} dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \sqrt{\frac{1}{4y} (4y + 1)} dy \\
&= \pi \int_0^2 \sqrt{4y + 1} dy = \frac{\pi}{4} - \frac{(4y + 1)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{6} \left(\sqrt[3]{9^3} - 1 \right) = \frac{13}{3}\pi
\end{aligned}$$

□

Örnek 43.4. $9y^2 = x(3-x)^2$ eğrisinin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanını hesaplayınız.



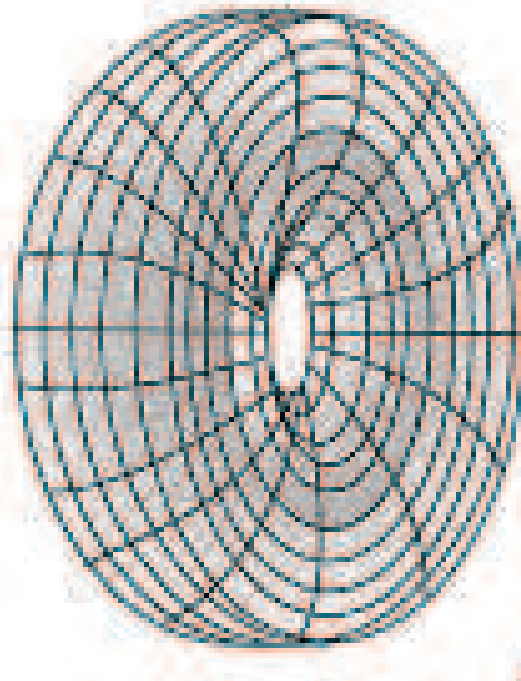
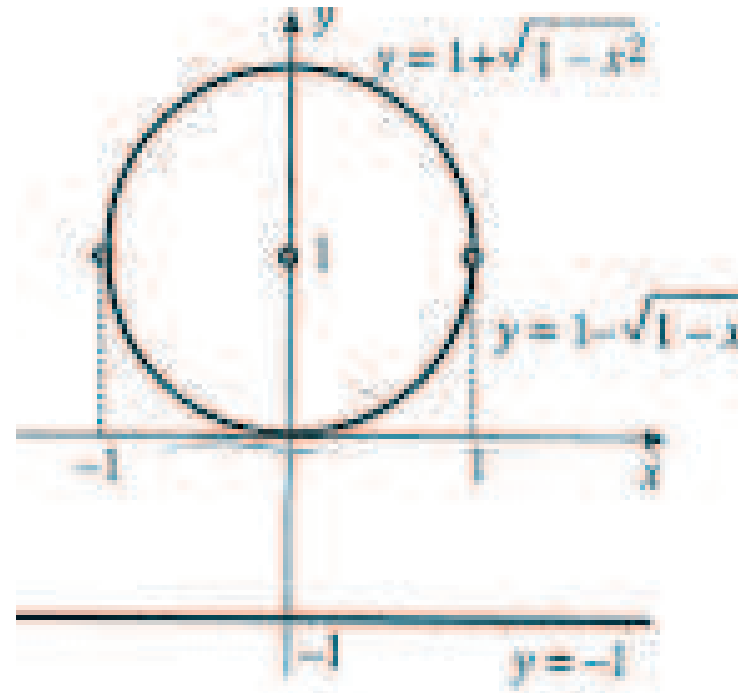
Çözüm

$$9y^2 = x(3-x)^2 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{3} (3-x) \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow y' = \pm \frac{1}{3} \left(-\sqrt{x} + \frac{(3-x)}{2\sqrt{x}} \right) = \pm \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3} (3-x) \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{(x-1)}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx = \frac{2\pi}{3} \int_0^3 (3-x) \sqrt{x} \sqrt{\frac{1}{4x} (x+1)^2} dx \\ &= \frac{\pi}{3} \int_0^3 (3-x) (x+1) dx = \frac{\pi}{3} \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \frac{\pi}{3} \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_0^3 = \frac{\pi}{3} \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3 \right) = 3\pi \end{aligned}$$

□

Örnek 43.5. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanını hesaplayınız.



Çözüm

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow y' = \pm \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)$$

S yüzey alanı bu eğrilerin alanları toplamı olur:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2} + 1 \right) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2} dx + 2\pi \int_{-1}^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2} + 1 \right) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{4dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 8\pi \arcsin x \Big|_{-1}^1 = 8\pi^2 \end{aligned}$$

□

Örnek 43.6. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrik denklemi ile verilen bir eğrinin Ox - eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzeyin alanını hesaplayınız.

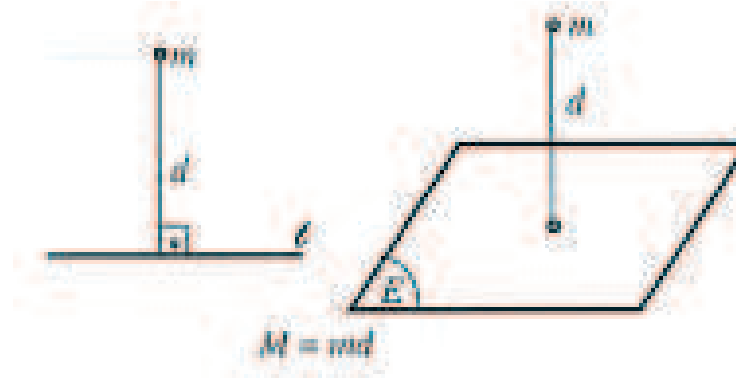
Çözüm

$$\begin{aligned} x' &= a(1 - \cos t), y' = a \sin t \Rightarrow S = 2\pi \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t)) \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt = 2\pi a^2 \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right) \sqrt{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)} dt \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} dt = -16\pi a^2 \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= -16\pi a^2 \left(\cos \pi - \frac{1}{3} \cos^3 \pi - \cos 0 + \frac{1}{3} \cos^3 0 \right) = -16\pi a^2 \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{64}{3} \pi a^2 \end{aligned}$$

□

44. Moment ve Ağırlık Merkezi

Tanım 44.1. Kütlesi m olan bir cismin bir noktaya veya bir eksene veya bir düzleme olan uzaklığına d dersek $M = m * d$ sayısına moment denir.



Tanım 44.2. Eğer cisim bir eğri parçası, bir düzlem parçası ise kütlenin yay uzunluğuna göre değişim oranına yani $\frac{dm}{dl} = \sigma$ oranına kütlenin yoğunluk fonksiyonu adı verilir. Cisim bir eğri parçası ise kütlesi

$$dm = \sigma dl \Rightarrow dm = \sigma \sqrt{1 + (y')^2} dx \Rightarrow$$

$$m = \int \sigma dl = \int \sigma \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

bir düzlem parçası ise kütlesi

$$m = \int \sigma dA = \int \sigma y dx$$

formülleri ile hesaplanır.

Tanım 44.3. Momenti istenen cisim $y = f(x)$ denklemlili bir eğri ise Ox eksenine göre momenti

$$M_x = \int_a^b y dm = \int_a^b y \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Oy eksenine göre momenti

$$M_y = \int_a^b x dm = \int_a^b x \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$(0,0)$ noktasına göre momenti

$$M_0 = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} dm = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olacaktır.

Tanım 44.4. Momenti istenen cisim $g(x) \leq f(x)$ olmak üzere $g(x) \leq y \leq f(x)$ bölgesi ise Ox eksenine göre momenti

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) \sigma(x) dx$$

Oy eksenine göre momenti

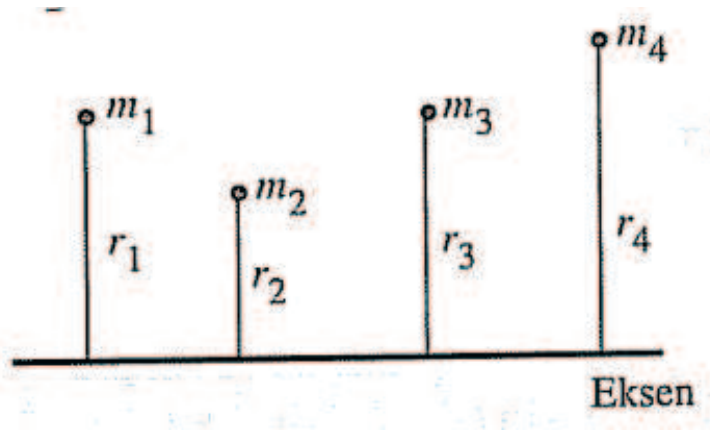
$$M_y = \int_a^b x (f(x) - g(x)) \sigma(x) dx$$

olacaktır. Cismin ağırlık merkezi de

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

şeklinde hesaplanır.

Tanım 44.5. Kütleleri $m_1, m_2, \dots, m_n$ olan cisimler Ox -eksenine sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_n$ uzaklıkta olsun.



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$$

ifadesine Ox -eksenine göre eylemsizlik momenti (atalet) denir. Eğer eylemsizlik momenti hesaplanacak cisim $y = f(x), a \leq x \leq b$ denklemleri bir eğri parçası ise

$$dm = \sigma dl = \sigma \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olmak üzere

$$I_x = \int_a^b y^2 dm = \int_a^b y^2 \sigma \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

ifadesi Ox -eksenine göre eylemsizlik momentidir. Benzer şekilde Oy -eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_y = \int_a^b x^2 dm = \int_a^b x^2 \sigma \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

ile hesaplanır. Eğer eğri denklemi $x = u(t), y = v(t), t_1 \leq t \leq t_2$ şeklinde parametrik olarak verilmişse

$$dm = \sigma dl = \sigma \sqrt{(u')^2 + (v')^2} dt$$

olmak üzere

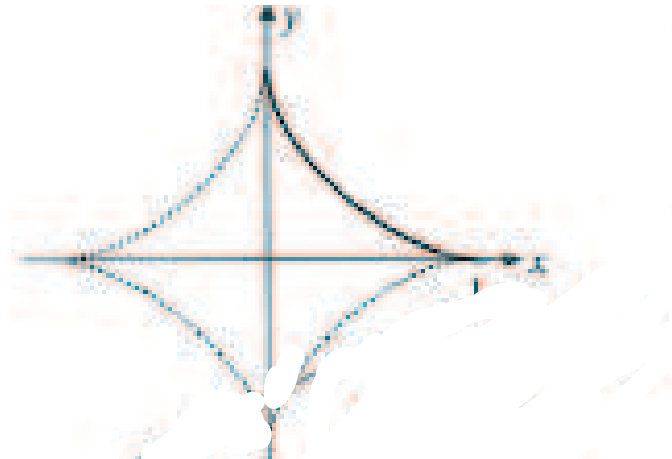
$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2 dm = \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) \sigma \sqrt{(u')^2 + (v')^2} dt$$

ifadesi Ox -eksenine göre eylemsizlik momentidir. Benzer şekilde Oy -eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} x^2 dm = \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) \sigma \sqrt{(u')^2 + (v')^2} dt$$

ile hesaplanır.

Örnek 44.6. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ astroid eğrisini birinci bölgesindeki parçası üzerine yerleştirilmiş bir telin her noktadaki yoğunluğu o noktanın apsisinin karesine eşittir. Bu telin kütlesini bulunuz.



Çözüm

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= x^2, x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/3} \\
m &= \int_0^1 \sigma dl = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + \left(-\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/3}\right)^2} dx \\
&= \int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \int_0^1 x^2 \frac{1}{x^{1/3}} dx = \frac{3}{8} x^{8/3} \Big|_0^1 = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

□

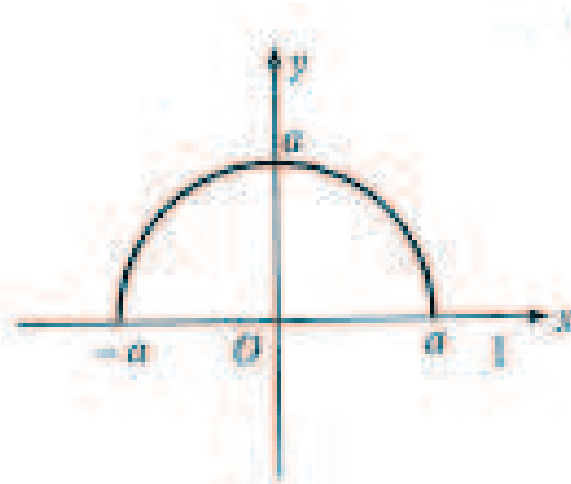
Örnek 44.7. $y = \frac{1}{x}$ eğrisi $x = 1, x = 2$ doğruları Ox eksenini ile sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktadaki yoğunluğu o noktanın apsisinin 2 katıdır. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= 2x \\
m &= \int_1^2 \sigma dA = \int_1^2 2xy dx = \int_1^2 2x \frac{1}{x} dx = 2
\end{aligned}$$

□

Örnek 44.8. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarı çemberi şeklindeki homojen bir telin Ox - eksenine göre momenti hesaplayınız.



Çözüm Cisim homojen olduğundan dolayı yoğunluğu her yerde aynı ve sabittir. $\sigma(x) = k$ diyelim.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow M_x = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} k \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} k \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = ak \int_{-a}^a dx = 2a^2 k \end{aligned}$$

□

Örnek 44.9. $x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ yarı çemberi şeklindeki bir telin yoğunluğu o noktanın ordinatının iki katıdır. Bu telin ağırlık merkezini bulunuz.

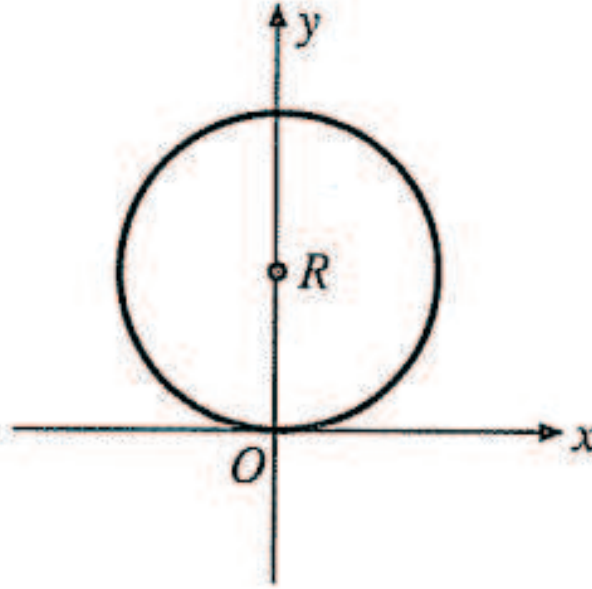
Çözüm Telin yoğunluğu o noktanın ordinatının iki katı olduğundan $\sigma(y) = 2y$

$$\begin{aligned} dm &= \sigma dl = 2y \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dx = 4 \sin t \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} = 8 \sin t \\ m &= \int_0^\pi \sigma dl = \int_0^\pi 8 \sin t dt = 8 - \cos t \Big|_0^\pi = 16 \\ M_x &= \int_0^\pi y dm = 16 \int_0^\pi \sin^2 t dt = 8 \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = 8\pi \\ M_y &= \int_0^\pi x dm = 16 \int_0^\pi \sin t \cos t dt = 16 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^\pi = 0 \\ \bar{x} &= \frac{M_y}{m}, \bar{y} = \frac{M_x}{m} \Rightarrow \bar{x} = \frac{0}{16}, \bar{y} = \frac{8\pi}{16} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$M(0, \frac{\pi}{2})$ noktası telin eğırlık merkezidir.

□

Örnek 44.10. $(0, R)$ merkezli R yarıçaplı çember şeklinde homojen bir halkanın kütlesi m olmak üzere Ox -eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.



Çözüm Cisim homojen olduğundan dolayı yoğunluğu her yerde aynı ve sabittir. $\sigma(x) = k$ diyelim. $x(t) = R \cos t, y = R + R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2 dm = \int_{t_1}^{t_2} v^2(t) \sigma \sqrt{(u')^2 + (v')^2} dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} y^2 dm = k \int_0^{2\pi} (R + R \sin t)^2 \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\ &= kR^3 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 2 \sin t + 1) dt = kR^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} + 2 \sin t + 1 \right) dt \\ &= kR^3 \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t - 2 \cos t \right]_0^{2\pi} = 3kR^3 \pi \end{aligned}$$

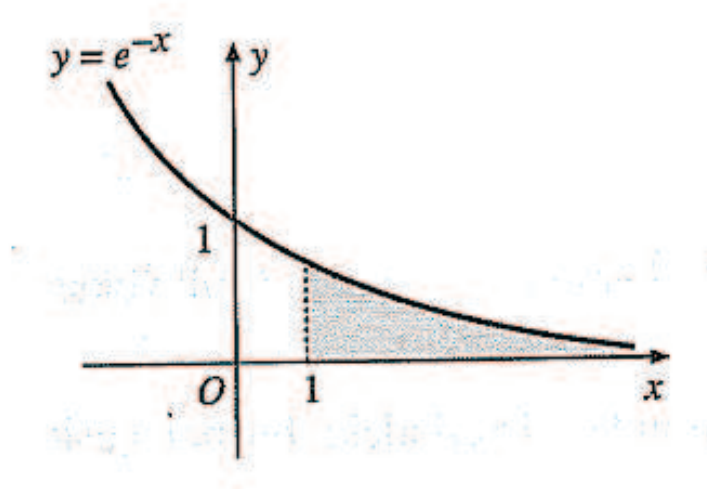
$$m = 2\pi Rk \Rightarrow I_x = \frac{3}{2} mR^2$$

□

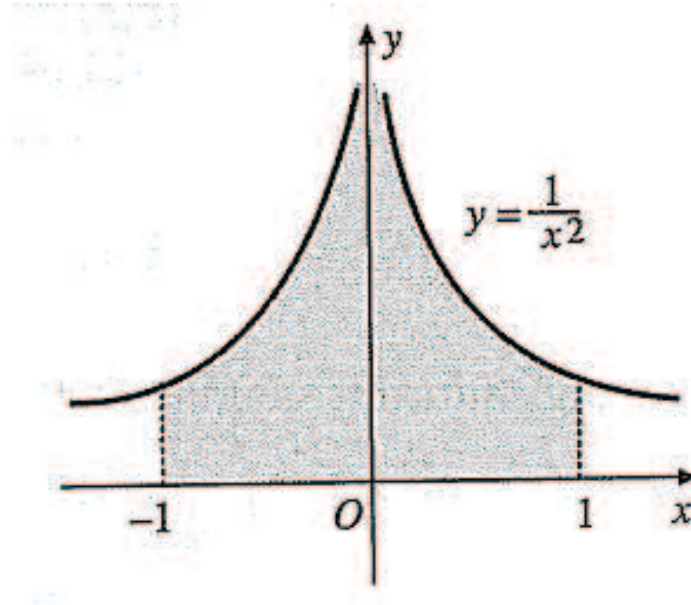
CHAPTER 7

Genelleşmiş İntegraller

Belirli integrali tanımlarken f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı olmasını belirtmiştik. Ancak birçok fonksiyon $[a, b]$ aralığında sınırlı olmayabilir veya bazı fonksiyonlarda $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ aralıklarında tanımlıdır. Örneğin $y = e^{-x}$ eğrisi $x = 1$ doğrusu ve Ox -ekseni tarafından sınırlandırılan bölgenin alnından bahsedebiliriz.



Bunun için $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ integralini hesaplamamız gerekmektedir. Benzer şekilde $y = \frac{1}{x^2}$ eğrisi $x = -1, x = 1$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlandırılan bölgenin alnından bahsedebiliriz.



Bunun için $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ integralini hesaplamamız gerekmektedir. Eğer bu integrali hesaplırsak $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$ buluruz ancak bu mümkün değildir çünkü fonksiyon pozitif olduğundan integral de pozitif olacaktır. Bu şekildeki integralleri yani aralığın sınırsız olduğu veya fonksiyonun sınırsız olduğu koşullardaki integralleri genelleşmiş integraller olarak adlandırırız.

45. Birinci Tip Genelleşmiş İntegraller (Sınırsız aralık, sınırlı fonksiyon)

Tanım 45.1. $f(x)$ sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ formundaki integrallere 1. tip genelleştirilmiş integraller denir.

- Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ limiti mevcut ise $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali yakınsaktır denir ve $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ ile gösterilir. Aksi durumda $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali ıraksaktır.
- Eğer $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$ limiti mevcut ise $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ integrali yakınsaktır denir ve $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$ ile gösterilir. Aksi durumda $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ integrali ıraksaktır.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ ve $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$ limitlerinin ikisi birden mevcut ise $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ integrali yakınsaktır denir ve $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ ile gösterilir. Aksi durumda bu limitlerden en az biri ıraksak ise $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ integrali ıraksaktır.

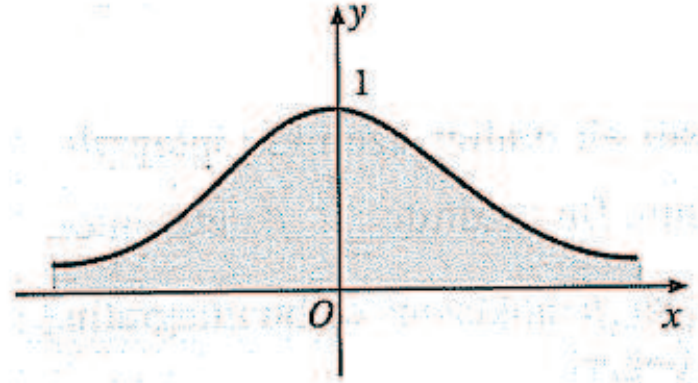
Örnek 45.2. $\int_1^\infty e^{-x} dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

□

Örnek 45.3. $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisi ve Ox -ekseni ile sınırlandırılan bölgenin alanını hesaplayınız.



Çözüm

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^a \frac{1}{1+x^2} dx + \int_a^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_t^a + \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_a^t \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctan a - \arctan t) + \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctan t - \arctan a) \\ &= \arctan a - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan a = \pi \end{aligned}$$

□

Örnek 45.4. $\int_0^\infty x^2 dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\int_0^\infty x^2 dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2 dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3} \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^3}{3} \right) = \infty$$

olduğundan integral ıraksaktır. □

Örnek 45.5. $a > 0$ için $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^t, & p = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^t, & p \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t - \ln a \Big|_a^t, & p = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^t, & p \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \infty, & p = 1 \\ \infty, & p < 1 \\ \frac{a^{-p+1}}{p-1}, & p > 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty, & p \leq 1 \\ \frac{a^{-p+1}}{p-1}, & p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Yani $p > 1$ değerleri için integral yakınsaktır ve diğer değerler için ıraksaktır. □

45.1. Birinci Tip İntegraller için Yakınsaklık Testleri.

Teorem 45.6. (Karşılaştırma testi) $[a, \infty)$ aralığında f ve g fonksiyonları $0 \leq f(x) \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlasın.

- 1) $\int_a^\infty g(x) dx$ integrali yakınsak ise $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali de yakınsaktır.
- 2) $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali ıraksak ise $\int_a^\infty g(x) dx$ integrali de ıraksaktır.

Teorem 45.7. (Limit testi) Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = c$ olsun.

- 1) $0 \leq c < \infty$ ve $p > 1$ ise $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali yakınsaktır.
- 2) $0 < c \leq \infty$ ve $p \leq 1$ ise $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali ıraksaktır.

Örnek 45.8. $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm $x \geq 1 \Rightarrow x \leq x^2 \Rightarrow -x \geq -x^2 \Rightarrow e^{-x} \geq e^{-x^2}$ (exponansiyel fonksiyon monoton artan olduğundan)

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-x} dx &\geq \int_1^\infty e^{-x^2} dx \Rightarrow \\ \int_1^\infty e^{-x^2} dx &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ integralide yakınsaktır. □

Örnek 45.9. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{9x^4+1}}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{9x^4 + 1}} = 3$$

ve limit testine göre $0 \leq c = 3 < \infty$ ve $p = 2 > 1$ olduğundan $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{9x^4 + 1}}$ integrali de yakınsaktır. □

46. İkinci Tip Genelleşmiş İntegraller (Sınırlı aralık, sınırsız fonksiyon)

Tanım 46.1. *f fonksiyonu (a, b) aralığının her bir kapalı alt aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun.*

- Eğer $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ veya $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ oluyorsa (a, b) aralığında fonksiyonun ikinci tip genelleşmiş integrali

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

şeklinde hesaplanır. $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$ limiti var ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali yakınsaktır aksi durumda integral ıraksaktır.

- Eğer $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ veya $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ oluyorsa (a, b) aralığında fonksiyonun ikinci tip genelleşmiş integrali

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

şeklinde hesaplanır. $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ limiti var ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali yakınsaktır aksi durumda integral ıraksaktır.

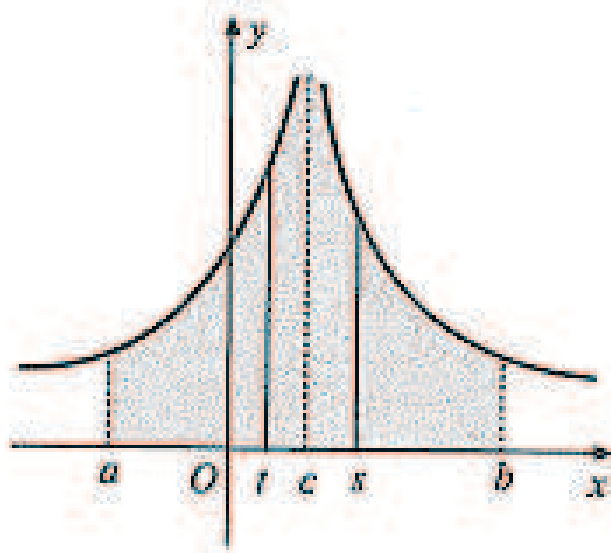
- Eğer c iç nokta ve $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ veya $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ oluyorsa

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

olarak yazılabildiğinden

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c} \int_a^t f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c} \int_t^b f(x) dx$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\lim_{t \rightarrow c} \int_a^t f(x) dx, \lim_{t \rightarrow c} \int_t^b f(x) dx$ limitlerinin ikisi birden mevcut ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali yakınsaktır aksi durumda bu limitlerden en az biri mevcut değil ise integrale ıraksaktır denir.



Örnek 46.2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \infty$$

olduğundan $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ integrali 2.tip genelleşmiş integraldir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} \quad \begin{matrix} 1-x = u \Rightarrow dx = -du \\ u = 1-t \\ u = 0 \end{matrix} = - \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_1^{1-t} \frac{du}{u^{1/4}} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 1^-} \left. \frac{u^{3/4}}{3/4} \right|_1^{1-t} = -\frac{4}{3} \lim_{t \rightarrow 1^-} \left((1-t)^{3/4} - 1 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Buna göre $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ integrali yakınsaktır ve yakınsadığı değer $\frac{4}{3}$.

□

Örnek 46.3. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

olduğundan $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ integrali 2.tip genelleşmiş integraldir.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} \Big|_t^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) = \infty$$

olduğundan integral ıraksaktır. □

Örnek 46.4. $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{(x-b)^p} = \pm \infty$$

olduğundan $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p}$ integrali 2.tip genelleşmiş integraldir.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p} &= \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t \frac{dx}{(x-b)^p} = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{(x-b)^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^t = \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow b^-} ((t-b)^{-p+1} - (a-b)^{-p+1}) = \begin{cases} \frac{(a-b)^{-p+1}}{p-1}, p < 1 \\ \pm \infty, p > 1 \end{cases} \\ p &= 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t \frac{dx}{(x-b)} = \lim_{t \rightarrow b^-} \ln(x-b) \Big|_a^t = -\infty \end{aligned}$$

olduğundan integral $p \geq 1$ değerleri için ıraksaktır, $p < 1$ değerleri için yakınsaktır. □

Örnek 46.5. $\int_0^\pi \tan x dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \infty$$

olduğundan $\int_0^\pi \tan x dx$ integrali 2.tip genelleşmiş integraldir.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \tan x dx &= \int_0^{\pi/2} \tan x dx + \int_{\pi/2}^\pi \tan x dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x dx + \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \int_t^\pi \tan x dx \\
 &= - \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x)|_0^t + \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \ln(\cos x)|_t^\pi \\
 - \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos x)|_0^t &= \infty \\
 \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \ln(\cos x)|_t^\pi &= \infty
 \end{aligned}$$

olduğundan $\int_0^\pi \tan x dx$ integrali ıraksaktır. □

Örnek 46.6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$$

olarak yazılır ve

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-x^2} &= -\infty \\
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} &= \infty
 \end{aligned}$$

olması sebebi ile $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2}, \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ integralleri 2.tip genelleşmiş integraldir.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2} &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \int_t^0 \frac{1}{1-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -1^+} \int_t^0 \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| \right]_t^0 = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -1^+} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \infty
 \end{aligned}$$

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x^2}$ integrali ıraksak olduğundan $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2}$ integrali de ıraksaktır. □

46.1. İkinci Tip İntegraller için Yakınsaklık Testleri.

Teorem 46.7. (Karşılaştırma testi) $[a, b]$ aralığında f ve g fonksiyonları $f(x) \leq g(x)$ eşitsizliğini sağlasın.

- 1) $\int_a^b g(x) dx$ integrali yakınsak ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali de yakınsaktır.
- 2) $\int_a^b f(x) dx$ integrali ıraksak ise $\int_a^b g(x) dx$ integrali de ıraksaktır.

Teorem 46.8. (Limit testi) Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = c$ veya $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^p f(x) = c$ veya ise $\lim_{x \rightarrow t} (t-x)^p f(x) = c, t \in (a, b)$ ise.

- 1) $0 \leq c < \infty$ ve $p < 1$ ise $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali yakınsaktır.
- 2) $0 < c \leq \infty$ ve $p \geq 1$ ise $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali ıraksaktır.

Örnek 46.9. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \sin x} dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\begin{aligned} x &\in (0, \pi/2), \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x \sin x} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \sin x} dx \geq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx \Rightarrow \\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \sin x} dx &\geq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\pi/2} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |x| \Big|_t^{\pi/2} = \infty \end{aligned}$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x \sin x} dx$ integrali ıraksaktır. □

Örnek 46.10. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\begin{aligned} x &\in (1, 2), x \leq x^3 \Rightarrow x-1 \leq x^3-1 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^3-1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \\ &\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \geq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx \Rightarrow \\ \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx &\leq \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^+} 2\sqrt{x-1} \Big|_t^2 = 2 \end{aligned}$$

olduğundan karşılaştırma testine göre $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx$ integrali yakınsaktır. □

Örnek 46.11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{1/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1-x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$0 \leq c = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} < \infty$ ve $p = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan limit testine göre $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ integrali yakınsaktır. $\square$

Örnek 46.12. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^3} dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$0 \leq c = 1 < \infty$ ve $p = 2 > 1$ olduğundan limit testine göre $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^3} dx$ integrali ıraksaktır. $\square$

Örnek 46.13. $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ gamma fonksiyonunun $n > 0$ için yakınsak $n \leq 0$ için ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm İntegrali

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre değişik durumlar için inegralleri inceleyelim.

1) $n \geq 1$ durumu: Bu durumda $n-1 \geq 0$ olduğundan $\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx$ integrali belirli integraldir. Ancak $\int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ integrali ise 1.tip genelleşmiş integraldir. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx &= \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \left[-x^{n-1} e^{-x} + (n-1) \int_1^\infty x^{n-2} e^{-x} dx \right] \\ &= \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \left[-x^{n-1} e^{-x} + (n-1) \left(-x^{n-2} e^{-x} + (n-2) \int_1^\infty x^{n-3} e^{-x} dx \right) \right] \\ &= \dots = -e^{-x} [x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + (n-1)(n-2) \dots 2x + n!] \Rightarrow \\ \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx &= -e^{-x} [x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + (n-1)(n-2) \dots 2x + n!] \Big|_0^1 \\ &= -e^{-1} [1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + (n-1)(n-2) \dots 2 + n!] + n! \\ \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{n-1} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} [x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + (n-1)(n-2) \dots 2x + n!] \Big|_1^t \right] \\ &= e^{-1} [1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + (n-1)(n-2) \dots 2 + n!] \end{aligned}$$

olduğundan yakınsaktır.

2) $0 < n < 1$ durumu: Bu durumda $n - 1 < 0$ olduğundan $\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali 2.tip genelleşmiş integraldir ve yine $\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali ise 1.tip genelleşmiş integraldir. Buna göre $\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ integralinin yakınsaklık durumu için limit testini uygularsak:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-n} (x^{n-1}e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 0$$

$0 \leq c = 0 < \infty$ ve $p = 1 - n < 1$ olduğundan $\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali yakınsaktır ve yine limit testinden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 x^{n-1}e^{-x} = 0$$

$0 \leq c = 0 < \infty$ ve $p = 2 > 1$ olduğundan $\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali yakınsaktır. O halde $0 < n < 1$ durumunda integral yakınsaktır.

3) $n = 0$ durumu: Bu durumda integral

$$\int_0^\infty x^{-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{-1}e^{-x}dx$$

şeklini alır ve $\int_0^1 x^{-1}e^{-x}dx$ integrali 2.tip genelleşmiş integral, $\int_1^\infty x^{-1}e^{-x}dx$ integralide 1.tip genelleşmiş integraldir. Her iki integral içinde limit testini uygularsak:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (x^{-1}e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 0$$

$0 \leq c = 0 \leq \infty$ ve $p = 1 \geq 1$ olduğundan $\int_0^1 x^{-1}e^{-x}dx$ integrali ıraksaktır. O halde diğerini incelemeden direk $\int_0^\infty x^{-1}e^{-x}dx$ integrali ıraksaktır deriz.

4) $n < 0$ durumu:

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

şeklinde yazılan integral için $n - 1 < 0$ olduğundan $\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali 2.tip, $\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali de 1.tip genelleşmiş integrallerdir. Buna göre $\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali için limit testini uygularsak

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (x^{n-1}e^{-x}) = \infty$$

$0 \leq c = \infty \leq \infty$ ve $p = 1 \geq 1$ olduğundan $\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali ıraksaktır. O halde diğerini incelemeden direk $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ integrali ıraksaktır deriz. Sonuç olarak

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \begin{cases} \text{yakınsak, } n > 0 \\ \text{ıraksak, } n \leq 0 \end{cases}$$

□

47. Üçüncü Tip Genelleşmiş İntegraller (Sınırsız aralık,sınırsız fonksiyon)

Tanım 47.1. *f fonksiyonu hem birinci hem de ikinci çeşit integralin özelliklerini taşıyorsa yani fonksiyon hem sınırsız hem de integral alınan aralık sınırsız ise bu integrallere üçüncü tip genelleşmiş integraller denir.*

Örnek 47.2. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm İntegrasyon aralığı sınırsız ve $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğundan üçüncü tip genelleşmiş integraldir.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

şeklinde yazarak hem ikinci hem de birinci tip integralin toplamı şeklinde ifade edebiliriz.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left. -\frac{1}{x} \right|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) = \infty$$

olduğundan $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ integrali ıraksaktır bu yüzden de $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ integrali ıraksaktır. □

CHAPTER 8

Diziler ve Seriler

48. Diziler

Tanım 48.1. Tanım kümesi pozitif tam sayılar olan her fonksiyona dizi denir. Reel değerli bir f fonksiyonu için

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$$

şeklinde de tanımlanır. a_1 dizinin 1.terimi, a_2 dizinin 2.terimi, ..., a_n dizinin n .terimidir ve a_n sayısına dizinin genel terimi denir. Genel terimi a_n olan diziye genelde $\{a_n\}$ şeklinde göstericeğiz. Örneğin $\{\frac{1}{n}\}$ dizisi ile $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\}$ sayıları anlaşılmaktadır.

Tanım 48.2. Tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesinin sonlu bir alt kümesi olan her fonksiyona sonlu dizi denir.

Örnek 48.3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tanım kümesinde tanımlı $f(n) = 3n + 1$ sonlu dizisinin terimlerini bulunuz.

Çözüm

$$f(1) = 3 * 1 + 1 = 4$$

$$f(2) = 3 * 2 + 1 = 7$$

$$f(3) = 3 * 3 + 1 = 10$$

$$f(4) = 3 * 4 + 1 = 13$$

$$f(5) = 3 * 5 + 1 = 16$$

olduğundan $\{4, 7, 10, 13, 16\}$ dizinin terimleridir. □

Örnek 48.4. $\{\frac{n+1}{2n+3}\}$ dizisinin 10.terimini bulunuz.

Çözüm

$$a_n = \frac{n+1}{2n+3} \Rightarrow a_{10} = \frac{10+1}{2*10+3} = \frac{11}{23}$$

□

Örnek 48.5. $a_1 = 1, a_{n+1} = na_n$ şeklinde tanımlanan dizinin 100. terimi ve a_n genel terimini elde ediniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \Rightarrow a_2 = 1a_1 = 1 \\
a_3 &= 2a_2 = 1 * 2 \\
a_4 &= 3a_3 = 1 * 2 * 3 \\
a_5 &= 4a_4 = 1 * 2 * 3 * 4 \\
&\dots \\
a_n &= 1 * 2 * \dots * (n-1) = (n-1)! \\
a_{100} &= 99!
\end{aligned}$$

□

Tanım 48.6. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n = d$ olacak bir şekilde bir d sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisine aritmetik dizi denir ve d sayısına da bu dizinin ortak farkı adı verilir.

Tanım 48.7. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olacak bir şekilde bir r sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisine geometrik dizi denir ve r sayısına da bu dizinin ortak çarpanı adı verilir.

Tanım 48.8. $\{a_n\}$ dizisinin ilk n teriminin toplamını $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ şeklinde ifade ederiz.

Örnek 48.9. $\{5n + 2\}$ dizisinin aritmetik dizi olduğunu gösterip ortak farkı ve ilk 20 teriminin toplamını bulunuz.

Çözüm

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1) + 2 - (5n+2) = 5$$

olduğundan $\{5n + 2\}$ dizisi aritmetik dizidir.

$$\begin{aligned}
S_{20} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{20} \\
&= (5 * 1 + 2) + (5 * 2 + 2) + \dots + (5 * 20 + 2) \\
&= 5 * (1 + 2 + \dots + 20) + 2 * 20 \\
&= 5 * \frac{20 * 21}{2} + 2 * 20 = 1090
\end{aligned}$$

□

Örnek 48.10. $\{3.5^n\}$ dizisinin geometrik dizi olduğunu gösterip ortak çarpanı bulunuz.

Çözüm

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3.5^{n+1}}{3.5^n} = 3.5$$

olduğundan $\{3.5^n\}$ dizisi geometrik dizidir ve ortak çarpanı 3.5 dir.

□

Örnek 48.11. $\{r^{n-1}\}$ geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \\ rS_n &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \\ S_n - rS_n &= 1 - r^n \Rightarrow S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} \end{aligned}$$

□

Tanım 48.12. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

- 1) $a_n < a_{n+1}$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisi kesin monoton artandır.
- 2) $a_{n+1} < a_n$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisi kesin monoton azalandır.
- 3) $a_n \leq a_{n+1}$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisi monoton artandır.
- 4) $a_n \geq a_{n+1}$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisi monoton azalandır.

Örnek 48.13. $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ dizisi monoton azalan olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

□

Uyarı 48.14. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ için $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisi kesin monoton artandır, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisi kesin monoton azalandır.

Örnek 48.15. $\left\{\frac{2^n}{(n+1)!}\right\}$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

Çözüm Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2^n}{(n+1)!} > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2} < 1$$

olduğundan $\left\{\frac{2^n}{(n+1)!}\right\}$ dizisi kesin monoton azalandır.

□

Tanım 48.16. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq M$ olacak şekilde M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır denir ve M sayısına da üst sınırı denir.

Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq m$ olacak şekilde m sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlıdır denir ve m sayısına da alt sınırı denir.

Hem üstten hem alttan sınırlı ise kısaca sınırlı dizi denir.

Örnek 48.17. $\left\{(-1)^n \frac{n}{(n+1)}\right\}$ dizisinin sınırlılık durumunu inceleyiniz.

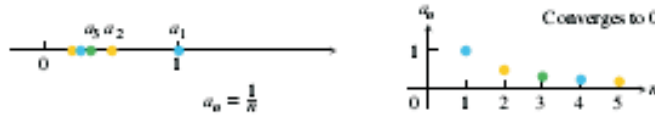
Çözüm

$$\begin{aligned} \left|(-1)^n \frac{n}{(n+1)}\right| &= \frac{n}{(n+1)} < 1 \Rightarrow \\ -1 &< (-1)^n \frac{n}{(n+1)} < 1 \end{aligned}$$

olduğundan $\left\{(-1)^n \frac{n}{(n+1)}\right\}$ dizisi sınırlıdır. □

Tanım 48.18. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n \geq N$ olduğunda $|a_n - a| < \varepsilon$ sağlanıyorsa $\{a_n\}$ dizisinin limiti a dır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ veya $\{a_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ ile gösterilir. Böyle bir durumda $\{a_n\}$ dizisi yakınsaktır denir aksi durumda iraksaktır denir.

Örnek 48.19. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisinin 0 yakınsadığını $\varepsilon = 1/100$ seçerek gösteriniz. Hangi terimden sonra $\varepsilon = 1/100$ ın komşuluğundadır.



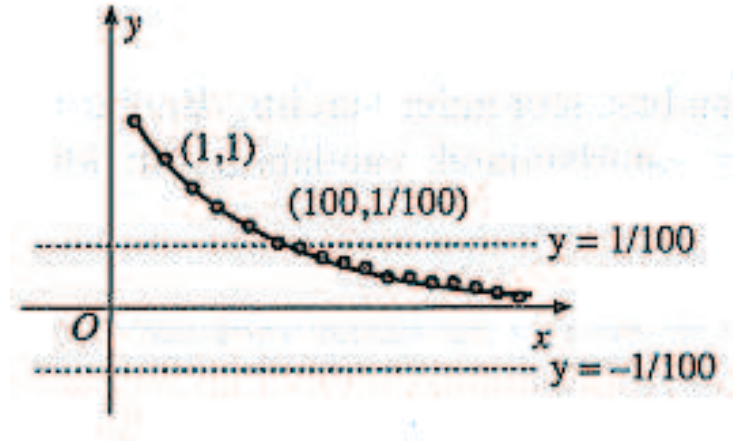
Çözüm $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n \geq N$ olduğunda

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N > 0$ olduğunu bulmalıyız.

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = 100 = N$$

100.terimden sonra 0 noktasının çok yakınına gider.



□

Teorem 48.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $k \in \mathbb{R}$ olsun.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}, \forall n, b_n \neq 0, b \neq 0$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (k a_n) = k a$

Örnek 48.21. $\left\{ \frac{2n}{n+1} \right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = 2$$

□

Teorem 48.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

Örnek 48.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} \right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ olduğundan yukarıdaki teoremden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1} \right) = 1$ elde ederiz.

□

Teorem 48.24. $\{a_n\}$ pozitif dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Örnek 48.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ olduğundan yukarıdaki teoremden $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ sonucunu elde ederiz. $\square$

Teorem 48.26. (Sandviç Teoremi) Sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimler için

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Örnek 48.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan yukarıdaki Sandviç Teoreminden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ sonucunu elde ederiz. $\square$

Teorem 48.28. Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul sınırlı olmasıdır.

Örnek 48.29. Genel terimi $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm Öncelikle dizinin monoton olduğunu gösterelim:

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(2n^2 + 3n + 1)} > 0$$

Şimdi de dizinin sınırlı olduğunu gösterelim:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq a_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ tane}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

Ve yukarıdaki teoremden monoton ve sınırlı bir dizi olduğundan yakınsaktır. $\square$

Örnek 48.30. $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ bağıntısının sağlayan $\{a_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve yakınsadığı sayıyı bulunuz.

Çözüm Öncelikle dizinin üstten sınırlı olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} < 2 \\ a_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2 \\ a_3 &= \sqrt{2 + a_2} < \sqrt{2 + 2} = 2 \\ &\dots \end{aligned}$$

olacağından $a_n < 2$ dir ve yani dizi üstten sınırlıdır.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \frac{(2 - a_n)(1 + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} > 0$$

olduğundan dizi monoton artandır. Yukarıdaki Teoremden $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ diyelim.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \Rightarrow a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a^2 = 2 + a \Rightarrow \\ a^2 - a - 2 &= 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

□

Teorem 48.31. $\{a_n\}$ dizisi sınırlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$.

Örnek 48.32. $\{(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{n}{n^2+1}$ ve $\{a_n\}$ dizisi sınırlıdır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0$ dır.

□

Teorem 48.33. $|a| < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

Örnek 48.34. $\{(-1)^n \frac{2^n}{7^n}\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm $a = -\frac{2}{7}$ dersek $|a| = |-\frac{2}{7}| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2^n}{7^n} = 0$

□

Teorem 48.35. $\{a_n\}$ dizisi için $f(n) = a_n$ olacak şekilde bir fonksiyon mevcut ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Örnek 48.36. $\{\frac{\ln n}{n}\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

olduğundan yukarıdaki Teoremden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ elde ederiz.

□

Örnek 48.37. $\{\frac{2^n}{5^n}\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm

$$f(x) = \frac{2^x}{5^x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{5^x} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{5^x} = \infty$$

olduğundan yukarıdaki Teoremden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{5^n} = 0$ elde ederiz.

□

Örnek 48.38. Genel terimi $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ olan dizinin limitini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \Rightarrow \ln a_n = n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \Rightarrow \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln(n-1)}{\frac{1}{n}} \\
 &\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{n^2-1}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2 \Rightarrow \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = 2 \Rightarrow \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= e^2
 \end{aligned}$$

□

49. Seriler

Tanım 49.1. Verilen bir $\{a_n\}$ dizisi için

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

toplamına sonsuz seri denir ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ şeklinde gösterilir. a_k sayısına da serisinin genel terimi denir.

$$\begin{aligned}
 s_1 &= a_1 \\
 s_2 &= a_1 + a_2 \\
 s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
 &\vdots \\
 s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\{s_n\}$ dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise seri de yakınsaktır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L$$

Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsak değil ise seriye iraksak seri denir.

Tanım 49.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

serisine geometrik seri denir.

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ rs_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^n \Rightarrow \\ s_n - rs_n &= a - ar^n \Rightarrow s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \end{aligned}$$

Buna göre eğer $|r| < 1$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

ve eğer $|r| > 1$ ise iraksaktır.

Örnek 49.3. $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots\right)$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots\right) = \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$

□

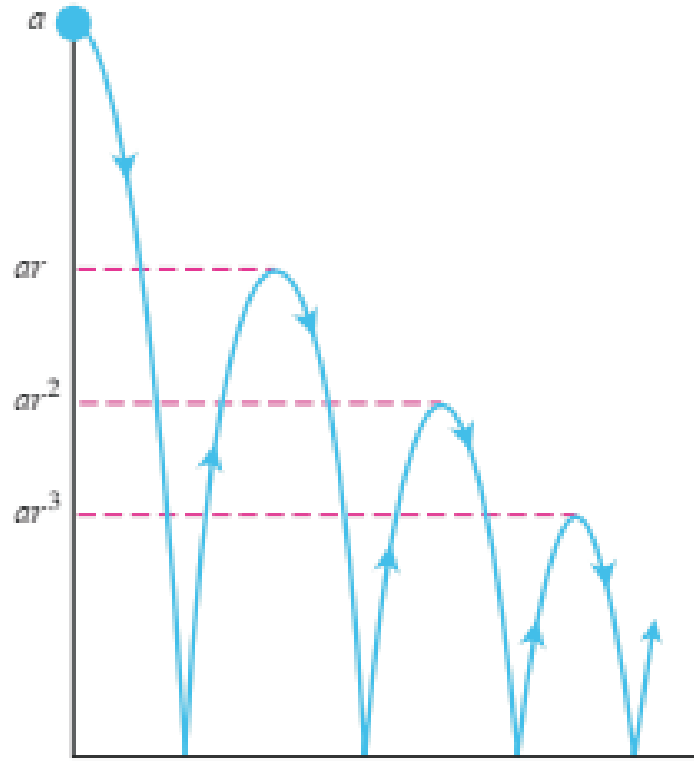
Örnek 49.4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm $a = 5, r = -1/4$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} = \frac{5}{1 - (-1/4)} = 4$$

□

Örnek 49.5. Bir top 6m yükseklikten aşağıya bırakılıyor ve her seferinde yüksekliğin 2/3 katı kadar yukarı çıkıp tekrar inerek bu hareketi tekrarlıyor. Topun yukarı ve aşağı hareketinin toplam uzunluğunu bulunuz.



Çözüm

$$\begin{aligned}
 6 + 2 * \frac{2}{3} * 6 + 2 * \left(\frac{2}{3}\right)^2 * 6 + 2 * \left(\frac{2}{3}\right)^3 * 6 + \dots &= 6 + 2 * 6 * \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots\right) \\
 &= 6 + 2 * 6 * \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 30
 \end{aligned}$$

□

Örnek 49.6. 5.232323... devirli ondalık sayısını iki tam sayının oranı şeklinde ifade ediniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
5.232323\dots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \dots \\
&= 5 + \frac{23}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \frac{1}{(100)^3} + \dots \right) \\
&= 5 + \frac{23}{100} * \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}
\end{aligned}$$

□

Örnek 49.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1
\end{aligned}$$

□

Örnek 49.8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty
\end{aligned}$$

olduğundan seri ıraksaktır.

□

Teorem 49.9. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ dır. Tersine $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnek 49.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

olduğundan yukarıdaki teoremden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ serisi ıraksaktır. □

Örnek 49.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut değildir. O halde yukarıdaki teoremden $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi ıraksaktır. □

Örnek 49.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &< 1 + \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} + 4 * \frac{1}{8} + 8 * \frac{1}{16} + \dots + 2^{n-1} * \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_n = 1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

Teorem 49.13. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ ise

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c * a$

Uyarı 49.14. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ serisi de ıraksaktır.

Örnek 49.15. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Çözüm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{6} \right)^{n-1} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

□

Örnek 49.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}}$ serisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.**Çözüm**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 4 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

□

Uyarı 49.17. Yeniden indislemeler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^{n-4}}$$

50. Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri**50.1. İntegral Testi.**

Teorem 50.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. $a_n = f(n)$ olacak şekilde pozitif, sürekli ve monoton azalan bir fonksiyon için $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ile $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integralinin yakınsaklıkları aynıdır. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\int_1^{\infty} f(x) dx$ integralinin yakınsak olmasıdır.

Örnek 50.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisinin $p > 1$ için yakınsak $p \leq 1$ için ıraksak olduğunu gösteriniz.**Çözüm** $f(x) = \frac{1}{x^p}$ fonksiyonu pozitif monoton azalan fonksiyondur.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^t = \frac{1}{1-p} \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-p+1} - 1) = \begin{cases} 0, & \text{Eğer } p > 1 \\ \infty, & \text{Eğer } p \leq 1 \end{cases}$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ integrali $p > 1$ için yakınsak olduğundan İntegral Testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi $p > 1$ için yakınsaktır. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ integrali $p \leq 1$ için ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi $p \leq 1$ için ıraksaktır. □

Örnek 50.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonu pozitif monoton azalan fonksiyondur.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctan t - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$ integrali yakınsak olduğundan İntegral Testinden $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}$ serisinde yakınsaktır. □

50.2. Karşılaştırma Testi.

Teorem 50.4. $\sum_{n=1}^\infty a_n, \sum_{n=1}^\infty b_n$ pozitif terimli bir seriler olsun. $a_n \leq b_n$ olmak üzere

- 1) $\sum_{n=1}^\infty a_n$ serisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^\infty b_n$ serisi de ıraksaktır.
- 2) $\sum_{n=1}^\infty b_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^\infty a_n$ serisi de yakınsaktır.

Örnek 50.5. $\sum_{n=1}^\infty \frac{5}{5n-1}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{5}{5(n - \frac{1}{5})} = \frac{1}{n - \frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^\infty \frac{5}{5n-1}$ serisi de ıraksaktır. □

Örnek 50.6. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n-1}}$ serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}$ serisi yakınsaktır. □

50.3. Limit Testi.

Teorem 50.7. $\sum_{n=1}^\infty a_n$ pozitif terimli bir seri olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = c$$

olsun.

- 1) $c \geq 0, p > 1$ ise $\sum_{n=1}^\infty a_n$ yakınsaktır.
- 2) $c > 0, p \leq 1$ ise $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ıraksaktır.

Örnek 50.8. $\sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm $\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2n+1}{(n+1)^2} = 2 = c, p = 1$ olduğundan limit testine göre $\sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ serisi ıraksaktır. □

Örnek 50.9. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1+n \ln n}{n^2+5}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1 + n \ln n}{n^2 + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2 \ln n}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 5} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln n}{n^2 + 5} \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln n}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = \infty = c\end{aligned}$$

$p = 1$ olduğundan limit testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n \ln n}{n^2+5}$ serisi ıraksaktır. □

Örnek 50.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{5/2} \frac{\ln n}{n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{-1/n^2} = \infty = c, p = \frac{5}{2}$ olduğundan limit testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ serisi yakınsaktır. □

50.4. Oran Testi.

Teorem 50.11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

olsun.

- 1) $c < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.
- 2) $c > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.
- 3) $c = 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaklığı hakkında kesin bir şey söylenemez.

Örnek 50.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! (n!)^2}{(n+1)!^2 (2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)! (n!)^2}{(n+1)^2 (n!)^2 (2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$$

olduğundan oran testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ serisi ıraksaktır. □

Örnek 50.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^{n+1} (n+1)!^2}{(2n+2)!}}{\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} (n+1)!^2 (2n)!}{(2n+2)! 4^n (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 * 4^n (n+1)^2 (n!)^2 (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)! 4^n (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 * (n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = 1$$

olduğundan oran testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ serisinin yakınsaklığı hakkında net bir şey söyleyemeyiz. □

Örnek 50.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{4^n 2^n n!}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{4^{n+1} 2^{n+1} (n+1)!}}{\frac{1.3.5...(2n-1)}{4^n 2^n n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.3.5... (2n-1) (2n+1)}{4^{n+1} 2^{n+1} (n+1)!} \frac{4^n 2^n n!}{1.3.5... (2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{4 * 2 * (n+1)} = \frac{1}{4}$$

olduğundan oran testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{4^n 2^n n!}$ serisi yakınsaktır. □

50.5. Kök Testi.

Teorem 50.15. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c$$

olsun.

- 1) $c < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.
- 2) $c > 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.
- 3) $c = 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaklığı hakkında kesin bir şey söylenemez.

Örnek 50.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{2}$$

olduğundan kök testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisi yakınsaktır. □

Örnek 50.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^2}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = e$$

olduğundan kök testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$ serisi ıraksaktır. □

Örnek 50.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

olduğundan kök testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ serisinin yakınsaklığı hakkında kesin bir şey söylenemez. Ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 1$ olduğundan iraksaktır. $\square$

51. Kuvvet Serileri

Tanım 51.1. $x = 0$ merkezli kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

formundadır. $x = a$ merkezli kuvvet serisi ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \cdots + c_n (x - a)^n \cdots$$

formundadır. Burada $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayılarıdır. Örneğin, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$ kuvvet serileridir.

Uyarı 51.2. Kuvvet serilerinin yakınsaklığı için oran testini uygulayabiliriz. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x - a)^{n+1}}{c_n (x - a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x - a)}{c_n} \right| < 1$$

ifadesini sağlayan x değerleri için seri yakınsaktır. Veya kök testini uygulayarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n (x - a)^n} < 1$$

eşitsizliğini sağlayan x değerleri için seri yakınsaktır.

Örnek 51.3. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ geometrik serisi aynı zamanda bir kuvvet serisidir. Bu seri hangi x değerleri için yakınsaktır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| = |x| < 1$$

değerleri için yakınsaktır. $\square$

Örnek 51.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisi hangi x değerleri için yakınsaktır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

olduğundan tüm x değerleri için yakınsaktır. □

Örnek 51.5. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ serisi hangi x değerleri için yakınsaktır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (x-2)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{1}{2} (x-2) \right| = \left| -\frac{1}{2} (x-2) \right| < 1 \Rightarrow$$

$$|x-2| < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$$

değerleri için yakınsaktır. □

Örnek 51.6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ serisi hangi x değerleri için yakınsaktır?

Çözüm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{3} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{3}$$

□

Teorem 51.7. (Terim terime diferansiyellenebilme) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, |x-a| < R$ yakınsak olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

olmak üzere f diferansiyellenebilirdir ve

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n (x-a)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n (x-a)^n)'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (n-1) (x-a)^{n-2}$$

şeklinde verilir. $f(x)$ fonksiyonu ve $f'(x), f''(x)$ fonksiyonları aynı x değerleri için yakınsarlar.

Örnek 51.8. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$ olduğuna göre $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$ serilerinin toplamı nedir?

Çözüm $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ serisini diferansiyellersek

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1$$

ve terkar diferansiyellersek

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right)' = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

□

Uyarı 51.9. Terim terime diferansiyellenebilme her seri için mümkün değildir. Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$ serisi her x değeri için yakınsak iken bunun diferansiyeli olan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos(n!x)}{n^2}$ serisi hiçbir x değeri için yakınsak değildir.

Teorem 51.10. (Terim terime integrallenebilme) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, |x-a| < R$ yakınsak olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

olmak üzere f integrallenebilirdir ve

$$\int f(x) dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + C$$

şeklinde verilir. $f(x)$ fonksiyonu ve $\int f(x) dx$ fonksiyonu aynı x değerleri için yakınsarlar.

Örnek 51.11.

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, |x| < 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow \\
f'(x) &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \\
\int f'(x) dx &= \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C \Rightarrow f(x) = \arctan x + C \\
f(0) &= 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \\
\arctan x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, |x| < 1
\end{aligned}$$

□

Örnek 51.12.

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, |x| < 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \Rightarrow \\
f'(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x} \Rightarrow \\
\int f'(x) dx &= \int \frac{1}{1 + x} dx = \ln(x+1) + C \Rightarrow f(x) = \ln(x+1) + C \\
f(0) &= 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \\
\ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, |x| < 1
\end{aligned}$$

□

52. Taylor ve Maclaurin Serileri

Tanım 52.1. $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında tüm türevleri mevcut olsun. $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor serisidir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \end{aligned}$$

Örnek 52.2. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki Taylor serisini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(2) = \frac{2}{8} \\ f'''(x) &= -\frac{2*3}{x^4} \Rightarrow f'''(2) = -\frac{2*3}{2^4} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}} \\ f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{1}(x-2) + \frac{\frac{2}{8}}{2!}(x-2)^2 + \frac{-\frac{2*3}{2^4}}{3!}(x-2)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}}{n!}(x-2)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2^3}(x-2)^2 - \frac{1}{2^4}(x-2)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n \end{aligned}$$

ve yakınsadığı x değerleri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} (x-2)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n} \right| = \frac{|x-2|}{2} < 1 \Rightarrow |x-2| < 2$$

değerleri için seri yakınsaktır. □

Örnek 52.3. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Maclaurin serisini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= e^x \Rightarrow f''(0) = 1 \\ f'''(x) &= e^x \Rightarrow f'''(0) = 1 \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \\ f(x) &= 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

ve yakınsadığı x değerleri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{1}{n!}x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

olduğundan tüm x değerleri için seri yakınsaktır. □

Örnek 52.4. $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Maclaurin serisini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0 \\
f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0 \\
&\dots \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = (-1)^n \\
f^{(2n-1)}(x) &= (-1)^n \sin x \Rightarrow f^{(2n-1)}(0) = 0 \\
f(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}
\end{aligned}$$

ve yakınsadığı x değerleri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$$

olduğundan tüm x değerleri için seri yakınsaktır.

□

Örnek 52.5. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Maclaurin serisini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\sin x \Rightarrow f''(0) = -0 \\
f'''(x) &= -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1 \\
&\dots \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \sin x \Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0 \\
f^{(2n-1)}(x) &= (-1)^{n-1} \cos x \Rightarrow f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1} \\
f(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}
\end{aligned}$$

ve yakınsadığı x değerleri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{(2n+1)(2n)} = 0 < 1$$

olduğundan tüm x değerleri için seri yakınsaktır. □

Örnek 52.6. (Euler Eşitliği)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm $e^{i\theta}$ nın Maclaurin Serisinden

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{1}{1!} (i\theta) + \frac{1}{2!} (i\theta)^2 + \frac{1}{3!} (i\theta)^3 + \dots + \frac{1}{n!} (i\theta)^n + \dots \\
&= 1 + (i\theta) - \frac{1}{2!} (\theta)^2 - \frac{i}{3!} (\theta)^3 + \frac{1}{4!} \theta^4 + \dots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) \\
&= \cos \theta + i \sin \theta
\end{aligned}$$

Burada $\cos \theta, \sin \theta$ nın Maclaurin serilerinin

$$\begin{aligned}\cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

olmasını kullandık.

□

