INTEGRAL :

Türevi alınan bir fonksiyonun ilk halini bulmak için yapılan işleme integral denir.

$\dfrac{d(x^2)}{dx} = 2x$ ise $d(x^2) = 2x\,dx$ eşitliğine diferansiyel denir.

x^2 nin türevini al

önümde türevi alınmış bir fonksiyon var. (x e göre türevi alınmış)

$2x$ fonksiyonunun ilk halini bulmak için integralini alalım.

$$\int 2x\,dx = x^2$$

integral işareti

Ancak, x^2+1 in türevi
x^2+3 ün türevi
x^2+5 in türevi
$\vdots$
x^2+c nin türevi de $2x$ olur.

c → sabit sayı

İntegrali alınan bir fonksiyonun, ilk halinde varsa sabit sayıyı bulamadığımız için sonuca "c" eklemek gerekir.

$$\int 2x\,dx = x^2+c \text{ olmalıdır.}$$

→ $d(x^2+1) = 2x\,dx$ ise

$\int 2x\,dx = x^2+c$ yazılmalıdır.

İntegral Alma Kuralları :

* $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

* $\int dx = x + c$

* $\int a\, dx = ax + c$

* $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

* $\int e^x dx = e^x + c$

* $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

* $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

* $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

* $\int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

* $\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

İntegral Alma Özellikleri :

* $\int (f(x) \mp g(x))\, dx = \int f(x) dx \mp \int g(x) dx$

* $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$

İntegral, toplama üzerinde tanımlıdır. Yani integral içindeki işlem, toplama veya çıkarma olmalıdır.

İntegral Alma Yöntemleri

Değişken Değiştirme :

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx \quad \text{veya} \quad \int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$$

işlemlerinde direkt olarak integral alamıyorsak, $f(x)$ veya $g(x)$ ten birine "u" denir. u denilen fonksiyonun türevi, diğer fonksiyonu vermelidir.

Örneğin,

$$\int (x^2-3x)^3 \cdot (2x-3)\, dx \quad \text{ifadesinde}$$

$x^2-3x=u$ denirse, türevi diğer fonksiyonu verecektir.

$$u = \underbrace{x^2-3x}$$

u'ya göre türev al

x'e göre türev al

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$du = (2x-3)\,dx$ eşitliği bulunur. Soruda bulunan ifadeler yerlerine yazılırsa

$$\int \underbrace{(x^2-3x)^3}_{u} \cdot \underbrace{(2x-3)\,dx}_{du} = \int u^3\, du$$

integral kolaylaştı

$$\int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + c \quad (\text{u yerine değerini yazalım})$$

$$= \frac{(x^2-3x)^4}{4} + c$$

Neye u denir?

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx \Rightarrow u = \sin x$$

$$\int \sqrt[3]{x^2+3} \cdot x \, dx \Rightarrow u = x^2+3$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} \, dx \Rightarrow u = \ln x$$

$$\int e^{x^2+3} \cdot x \, dx \Rightarrow u = x^2+3$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(\ln x)} \Rightarrow u = \ln x$$

$$\int \frac{e^x}{\sin^2(e^x)} \, dx \Rightarrow u = e^x$$

(#) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$ integralinde $u^2 = x+1$ dönüşümü yapılırsa;

$$u^2 = x+1 \longrightarrow x = u^2 - 1$$

$$2u\,du = dx$$

$$\int \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2}} \cdot 2u\,du = \int \frac{u^2-1}{\cancel{u}} \cdot 2\cancel{u} \cdot du$$

$$= 2\int (u^2-1)\, du$$ integrali elde edilir.

NOT: Kesir şeklindeki fonksiyonlarda ilk önce paydanın türevine bakılmalıdır?

- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$ dir.

- $$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

↳ içinin türevine bölmeyi unutma!

(#) $$\int \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x| + c$$

(#) $$\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x^2| + c$$

↳ türevi $3x^2+6x = 3(x^2+2x)$

- $$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

- $$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

(#) $$\int \sin(2x-1)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-1) + c$$

(#) $$\int \cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$$

(#) $$\int e^{3x+2}\,dx = \frac{e^{3x+2}}{3} + c$$

(#) $$\int \frac{1}{\cos^2(5x+1)}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\tan(5x+1) + c$$

(#) $$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$$

Basit Kesirlere Ayırma

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+x}\,dx$

Payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşit ise polinom bölmesi yapılmalıdır.

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}\,dx$

Paydanın türevine bakılmalıdır.

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}\,dx = \ln|x^2-x-1| + c$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$

Payda çarpanlarına ayrılabiliyorsa, basit kesirlere ayrılmalıdır.

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

A nın paydasını 0 yapan değeri, eşitliğin solundaki kesirde x yerine yaz. (x-1 çarpanını görmeden)

$$A = \frac{1}{\underset{1}{x}(\cancel{x-1})\underset{1}{(x+1)}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$\Longrightarrow$ Çarpanlarına ayrılmazsa, pay kısmı 1. dereceden yazılmalıdır.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

Payda eşitleyerek A, B ve C değerleri bulunabilir.

KISMİ İNTEGRAL

$$\int d(u\cdot v) = u\cdot v$$

$$\int u\,dv + v\,du = u\cdot v$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$\int f(x)\cdot g(x)\,dx$ integrali bilinen yollardan alınamazsa, kısmi integral aklımıza gelmelidir.

$f(x)$ ve $g(x)$ den hangisine u denilmelidir?

LOPTÜ

L → logaritma fonksiyon: $\log x$, $\ln x$, ⋮

P → Polinom fonksiyon: x, x^2+1, ...

T → Trigonometrik fonksiyon: $\sin x$, $\cos x$, ...

Ü → üstel fonksiyon: e^x, 2^x, ...

Sıralamasında önce gelen fonksiyona u denir. kalanlara ise dv denir.

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\cdot\underbrace{g(x)\,dx}_{dv} = u\cdot v - \int v\,du$$

Örneğin,

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{polinom} \\ \text{fonksiyon}}}{x} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{trigonometrik fonksiyon}} \, dx$$

$u = x$ (polinom fonksiyona u denir)

$\cos x \, dx = dv$ (kalanlara dv denir)

$du = dx$ (iki tarafın türevi alındı)

$\sin x = v$ (iki tarafın integrali alındı)

Bulunan ifadeler $u \cdot v - \int v \cdot du$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx$$

$$= x \cdot \sin x - (-\cos x) + c$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + c$$

PRATIK YOL

$$\int (x+2) \cdot e^x \, dx$$

(LOPTÜ'den seç) — Türevi

(Diğer ifade) — İntegrali

Türevi	İntegrali
$+/\ x+2$	e^x
$-/\ 1$	e^x
$+/\ 0$	e^x

integrali

integrali

Loptü sıralamasında önce gelenin türevi alınır. Türev "0" olana kadar devam et.

+ 'dan başlayarak işaret değiştir.

Çapraz yöntemle çarpma işlemi yap.

$$= (x+2)e^x - 1 \cdot e^x + c$$

$$= (x+2)e^x - e^x + c$$

$$\int \ln x \, dx = ?$$

$$\int \ln x \, dx = \int \underset{\downarrow}{\ln x} \cdot 1 \, dx$$

logaritmik fonksiyon (türevi alınacak)

polinom fonksiyon (integrali alınacak)

Türev	Integral
$+$ $\ln x$	1
$-$ $\frac{1}{x}$	x

son adımda (düz çarpım) integral şeklinde yazılacak

$$= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = ?$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx$$

üstel fonksiyon (integrali alınacak)

trigonometrik fonksiyon (türevi alınacak)

Türev	Integral
$+$ $\sin x$	e^x
$-$ $\cos x$	e^x
$+$ $-\sin x$	e^x

Soruda e^x in yanındaki ifadenin ters işaretlisini bulunca işlem bitirilir.

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$$

eşitliğin diğer tarafına + olarak atılırsa

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) + c$$

$$= \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

* $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

$u = \cos x$ denilmelidir.

$du = -\sin x \, dx$

$-du = \sin x \, dx$

$= \int -\frac{1}{u} \, du$

* $\int \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \, dx = \int \frac{2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{2} \, dx$

$= \frac{1}{2} \int \sin x \, dx$

Trigonometrik özdeşlikleri kullanmayı unutma

$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

* $\int \sin(\underbrace{2x+3}) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+3) + c$

İçinin türevine bölmeyi unutma

* $\int \tan^2 x \, dx = \int 1 + \tan^2 x - 1 \, dx$

İntegral kurallarını hatırlayalım

$\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + c$

$= \int (1 + \tan^2 x) \, dx - \int 1 \, dx$

* $\int e^x \cdot \sin x \, dx \Rightarrow$ Kısmi İntegrali unutma

Üstel fonksiyon

Trigonometrik fonksiyon

Yüksek Mertebeden Trigonometrik İntegral

Trigonometrik fonksiyonların integrali alınırken, trigonometrik fonksiyonlar birinci dereceye düşürülebilir.

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\qquad$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x + 1 = 2\cos^2 x$ $\qquad$ $\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

$\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \int \dfrac{\cos 2x + 1}{2} dx$ yazılmalıdır.

$\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \int \dfrac{1 - \cos 2x}{2} dx$ yazılmalıdır.

$\Rightarrow \int 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$ integralinde

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$\sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\int \sin^2 2x \, dx = \int \dfrac{1 - \cos 4x}{2} dx$ yazılabilir.

$\Rightarrow \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \, dx$ integrali alınırken;

Derecesi çift olan trigonometrik fonksiyona u denir.

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx \Rightarrow -\dfrac{du}{\sin x} = dx$

$\int \sin^5 x \cdot u^2 \cdot \dfrac{-du}{\sin x} = \int -\sin^4 x \cdot u^2 \cdot du$

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$

$= (1 - \cos^2 x)^2 = (1 - u^2)^2$

$= -\int (1-u^2)^2 \cdot u^2 \cdot du$ integrali düzenlenip, integral alınabilir.

$$\Rightarrow \int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$$

İki trigonometrik fonksiyonun dereceleri tek ise,

$u = \sin x$ veya $u = \cos x$ denilebilir.

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx \Rightarrow -\dfrac{du}{\sin x} = dx$

$$\int \sin^3 x \cdot u \cdot \frac{-du}{\sin x} = -\int \sin^2 x \cdot u \cdot du$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$

$= -\int (1-u^2) \cdot u \cdot du$ integrali düzenlenip, integral alınabilir.

TÜREV – İNTEGRAL İLİŞKİSİ

$$\frac{d\left(\int f(x)\,dx\right)}{dx} = \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Türev ile integral sadeleşebilir

$\dfrac{\cancel{d}}{\cancel{dx}} \cancel{\int} f(x) \, \cancel{dx}$ şeklinde sadeleştirme yapılabilir.

d ile $\int$ birbiriyle sadeleşir.

dx ler sadeleşir.

$$\int d\left(f(x)\right) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

! İntegral dışarda ise önce $f(x)$ in türevi, sonra integrali alındığı için "+c" unutulmamalıdır.

* $\frac{d}{dx} \int \sin x \, dx = \sin x$

* $\int d(\sin x) = \sin x + c$

* $\int x \cdot f(x) \, dx = x^3 - 4x^2 - 3x - 1$

eşitliğinde sağdaki kısmın türevi, içeriyi verir.

$\int A \, dx = B \Rightarrow$ B nin türevi A dır.

$x \cdot f(x) = 3x^2 - 8x - 3$ tür.

BELİRLİ İNTEGRAL

$$\int_a^b \underbrace{f'(x)}\, dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

Buradaki fonksiyonun aynen integrali alınır.

Sınırlar unutulmamalıdır. Önce üstteki sınır x yerine yazılır, sonra alttaki sınır x yerine yazılıp çıkarılır.

Belirli İntegralin Özellikleri :

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (Sınırlar aynı ise sonuç 0 dır)
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (Sınırlar yer değiştirirse, integral işaret değiştirir)
- $a \leqslant c \leqslant b$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

! Belirsiz integralin tüm özellikleri geçerlidir.

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\pi/2}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1$$
$$= -1$$

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e^2-1}{2}$$

Parçalı fonksiyon ve mutlak değer fonksiyonunun integralleri alınırken, integral kritik noktalara göre parçalanır.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 2x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x+2, & x \geq 1 \end{cases}$$ fonksiyonu için

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x-1)\,dx + \int_{0}^{1}(2x+1)\,dx + \int_{1}^{3}(x+2)\,dx$$ olur.

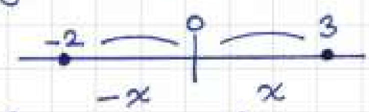
$$f(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$ fonksiyonu için

$$\rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x+1)\,dx$$

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^2 (x+1)\,dx$$ olur.

$$\int_{-2}^{3} |x|\,dx = ?$$

mutlak değerin kritik noktası $x=0$ dır.



$$\int_{-2}^{3} |x|\,dx = \int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \int_0^3 x\,dx$$ olur.

$$\int_{-2}^{3} |x^2-1|\,dx = ?$$

-2	-1	1	3
x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1	

$$\int_{-2}^{3}|x^2-1|dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx$$

Tek-Çift Fonksiyonların İntegrali

$f(-x) = f(x)$ (ÇİFT FONKSİYON)

$f(-x) = -f(x)$ (TEK FONKSİYON)

* İntegralin sınırları simetrik ise

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \rightarrow f(x) \text{ tek fonksiyon ise}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx \rightarrow f(x) \text{ çift fonksiyon ise}$$

$\Rightarrow \int_{-2}^{2} x^2dx = 2\cdot\int_{0}^{2} x^2dx$ yazılabilir.

x^2 → çift fonksiyon

$\Rightarrow \int_{-2}^{2} x^3dx = 0$

x^3 → tek fonksiyon

$$\int_{-2}^{2} x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$$

f(x) tek fonksiyon ise $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx$

$$* \quad \int_{1}^{2} 2x\,dx = \int_{-1}^{-2} 2x\,dx$$

$$x^2 \Big|_{1}^{2} = x^2 \Big|_{-1}^{-2}$$

$$2^2 - 1^2 = (-2)^2 - (-1)^2$$

$3 = 3$ bulunur.

f(x) çift fonksiyon ise $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx$

$$* \quad \int_{1}^{2} x^2\,dx = -\int_{-1}^{-2} x^2\,dx$$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_{1}^{2} = -\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{-2}$$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = -\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$ bulunur.

Türev Altında İntegral

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$$

Sınırlar ve integral içindeki fonksiyon farklı değişkenler içeriyorsa ve $F'(x)$ istenirse :

$$F'(x) = f(\underbrace{b(x)}_{\text{Üst sınır f de yazılır}}) \cdot \underbrace{b'(x)}_{\text{üst sınırın türevi}} - f(\underbrace{a(x)}_{\text{alt sınır f de yazılır.}}) \cdot \underbrace{a'(x)}_{\text{alt sınırın türevi}}$$

$$\frac{d\left(\int_{10}^{x^2} \sin 2t\,dt\right)}{dx} = \sin 2x^2 . 2x - \sin 20 . 0$$

altsınırın türevi

$$= 2x . \sin 2x^2$$

$$\frac{d\left(\int_{3}^{8} (2t-5)\,dt\right)}{dx} = 0$$

t değişkeninin x'e göre türevi 0'dır.

$f(x) = \int_{1}^{\sqrt{x}} t^2\,dx$ ise $f'(4) = ?$

$$f'(x) = (\sqrt{x})^2 . \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1^2 . 0$$

$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$ ise $f'(4) = \frac{4}{2\sqrt{4}} = 1$

Sınır Değiştirme:

$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx$ integralinde $u = \ln x$ dönüşümü yapalım.

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$u = \ln x$ eşitliğinde x yerine integralin sınırlarını yazalım.

$e^2 \longrightarrow x = e^2$ ise $u = \ln e^2 = 2$

$e \longrightarrow x = e$ ise $u = \ln e = 1$

$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx \Rightarrow \int_{1}^{2} u\,du$ elde edilir.

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{1}{4+e^x}\,dx$$ integralinde $u=4+e^x$ dönüşümü yapılırsa, hangi integral elde edilir?

$u = 4+e^x$ ise $\quad (e^x = u-4)$

$du = e^x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{du}{e^x}$ tir. $\quad e^x \rightarrow u-4$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{1}{4+e^x}\,dx = \int_{7}^{8} \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{u-4} = \int_{7}^{8} \frac{1}{u^2-4u}$$ elde edilir.

$u=4+e^x$ eşitliğinde $x=\ln 4$ ise $u = 4+e^{\ln 4} = 4+4 = 8$

$x = \ln 3$ ise $u = 4+e^{\ln 3} = 4+3 = 7$

$$\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\;dx$$ integralinde $x=4.\sin u$ dönüşümü yapalım.

$x = 4\sin u$

$dx = 4\cos u\, du$

Sınırlar

$x=4\sin u$ eşitliğinde

$x=4$ ise $u=\frac{\pi}{2}$

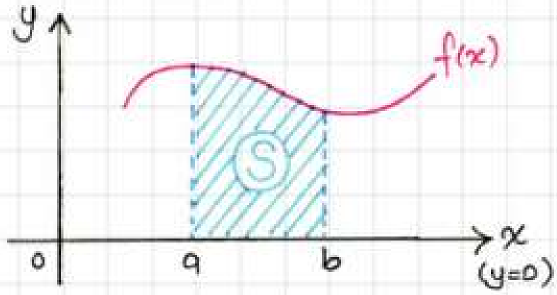
$x=0$ ise $u=0$ bulunur.

$$\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{16-16\sin^2 u}\,.4\cos u\,du = \int_{0}^{\pi/2} 4\,\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos^2 u}\,.4.\cos u.du$$

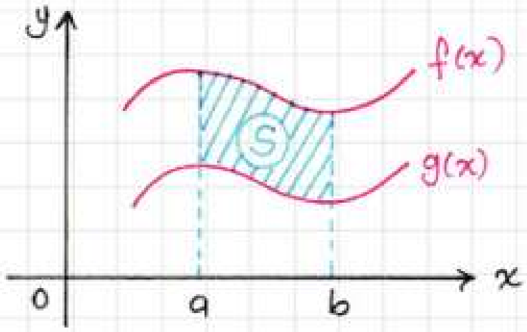
$$\int_{0}^{\pi/2} 4.\cos u.4\cos u.du = 16\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 u.du$$

Belirli İntegral Uygulamaları

Alan Hesabı

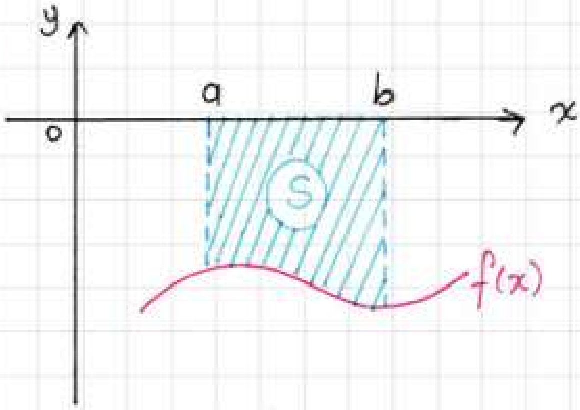


$$S = \int_a^b (f(x) - 0)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

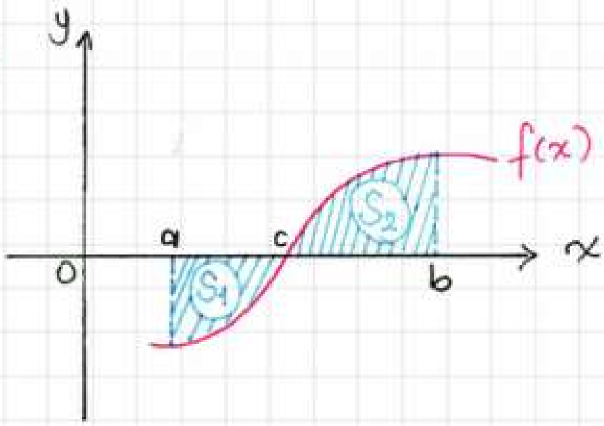


$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$



$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$

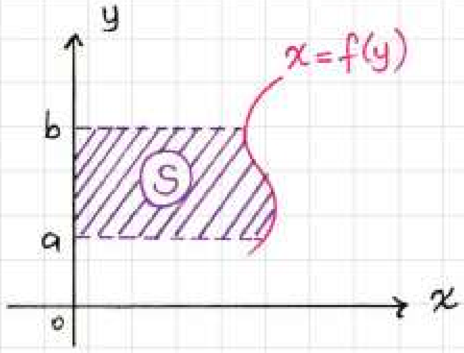


$$\int_a^c f(x)\,dx = -S_1$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = S_2$$

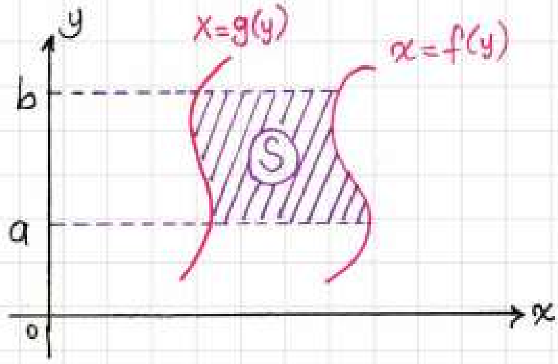
$$\int_a^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2$$

Oy Ekseni ile Alan Bulma

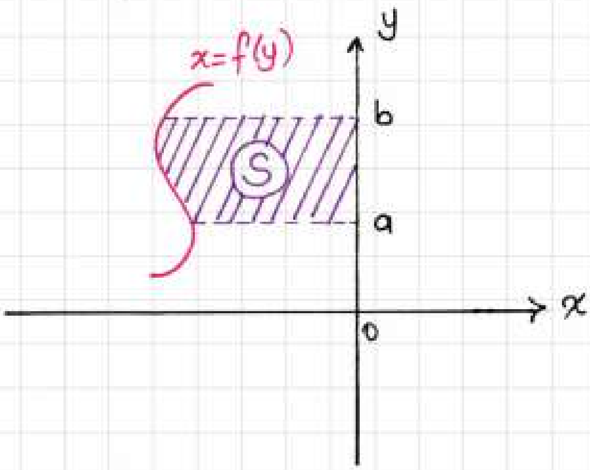


$$S = \int_a^b f(y)\,dy$$

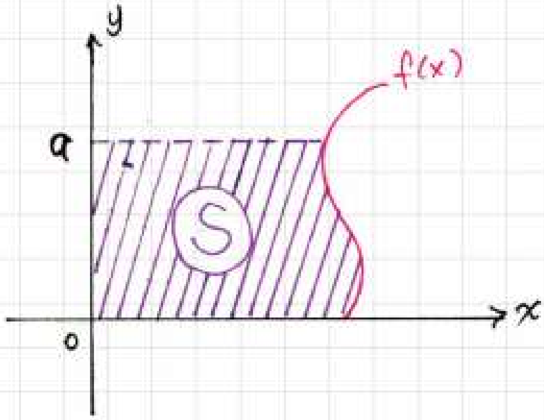
Sınırlar y ekseninden alınırsa integral icine y ye bağlı bir fonksiyon yazılmalıdır.



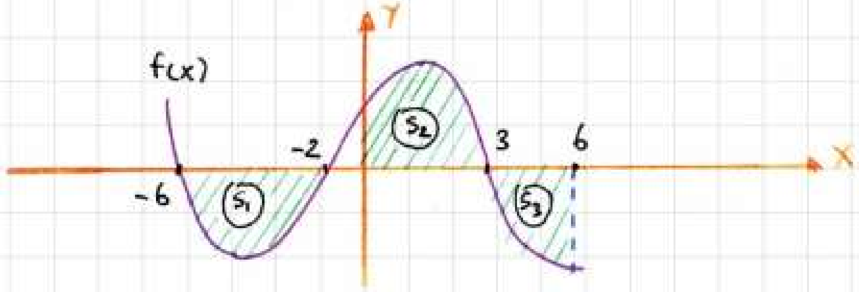
$$S = \int_a^b \big(f(y) - g(y)\big)\,dy$$



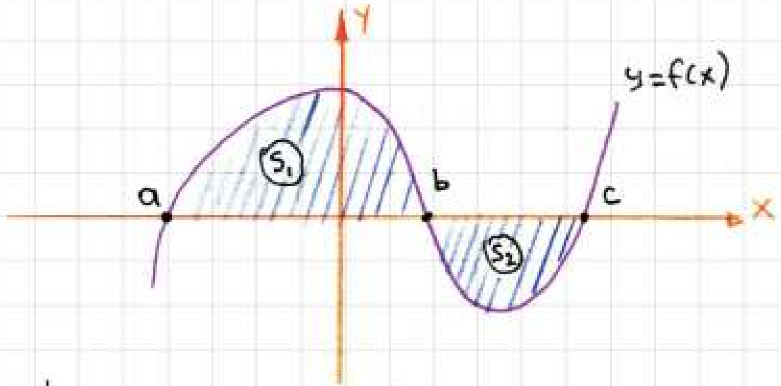
$$S = -\int_a^b f(y)\,dy$$



$$S = \int_0^a f^{-1}(x)\,dx$$

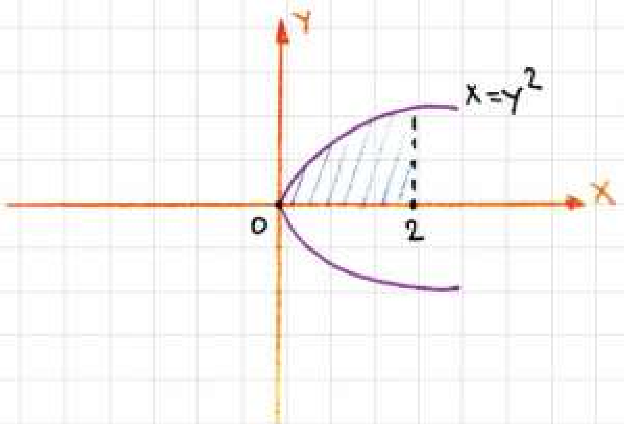


$$\int_{-6}^{6} f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3 \text{ tür.}$$

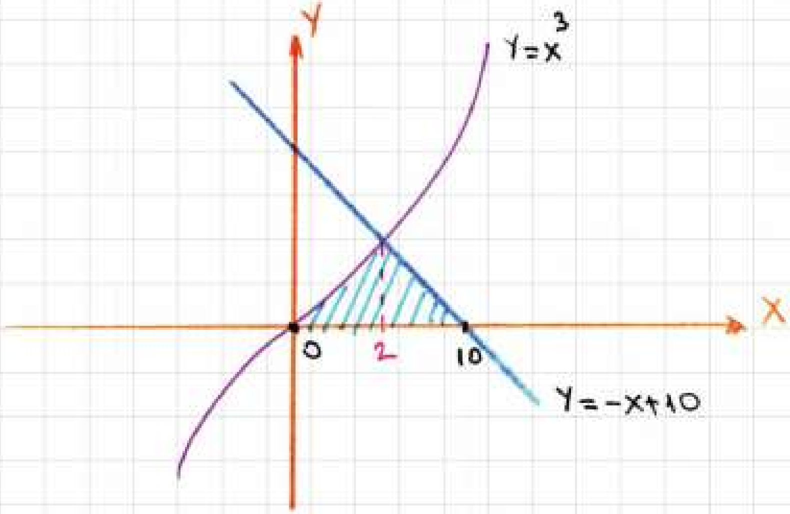


$\int_{a}^{b} f(x)dx = 10$ ve $\int_{b}^{c} f(x)dx = -5$ ise

taralı alanlar toplamı, $S_1 + S_2 = 10 + 5 = 15$ tir.



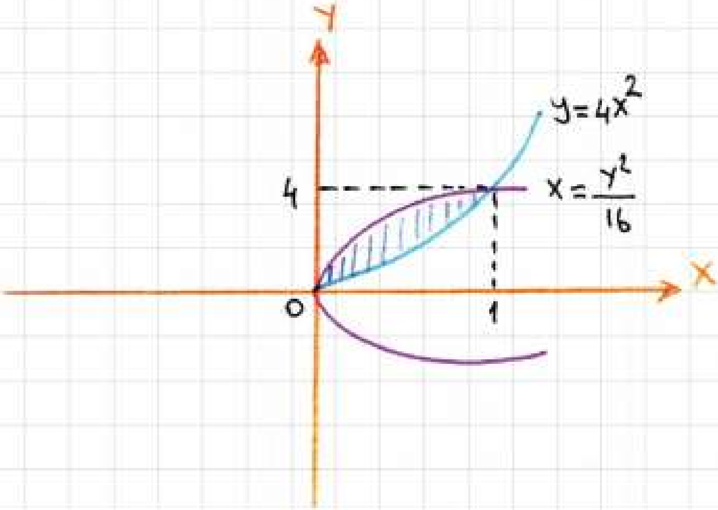
Taralı Alan: $\int_{0}^{2} \sqrt{x}\, dx$ şeklinde yazılır.



Taralı alanın bulunabilmesi için $Y=x^3$ ve $Y=-x+10$ denklemleri eşitlenerek kesiştikleri nokta bulunmalıdır.

$x^3=-x+10$ ise $x=2$ dir.

Taralı alan: $\int_0^2 x^3dx+\int_2^{10}(-x+10)dx$ tir.



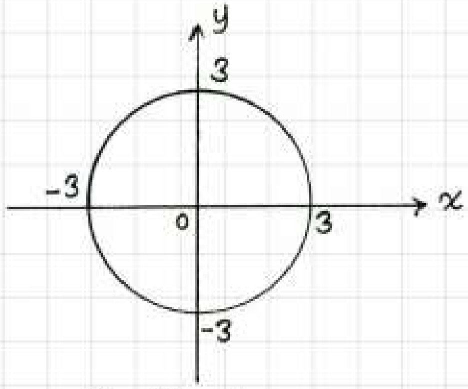
$x=\frac{y^2}{16} \Rightarrow y=4\sqrt{x}$

$4x^2=4\sqrt{x}$
$x=1$ bulunur.

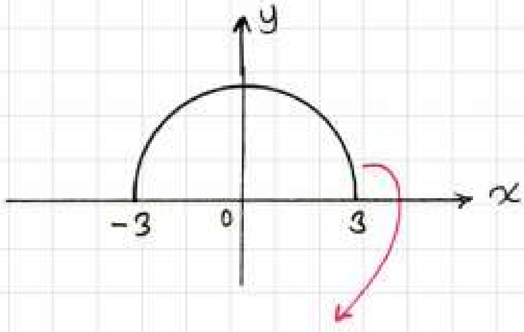
Taralı Alan: $\int_0^1 (4\sqrt{x}-4x^2)\,dx$ veya

$\int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y}}{2}-\frac{y^2}{16}\right)dy$ ile bulunabilir.

Çember İntegrali



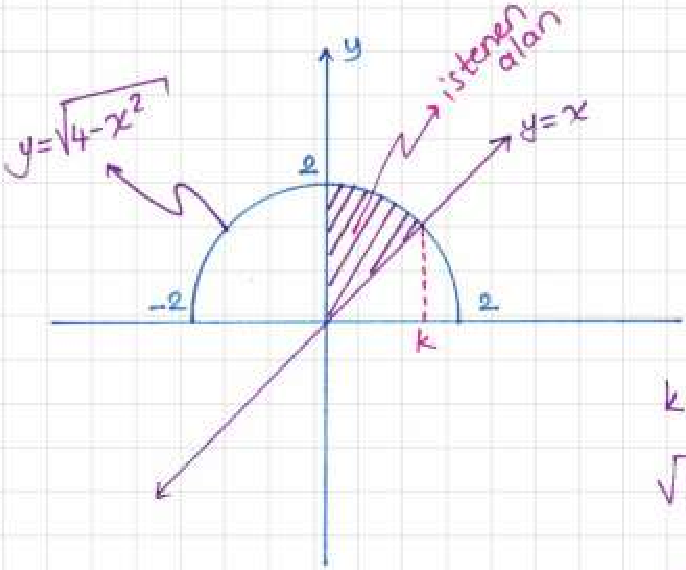
$x^2+y^2=9$



$y=\sqrt{9-x^2}$

$\circledast$ $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}-x\,dx$ integrali çizim yapılarak bulunabilir.

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^{\sqrt{2}} x\,dx$$



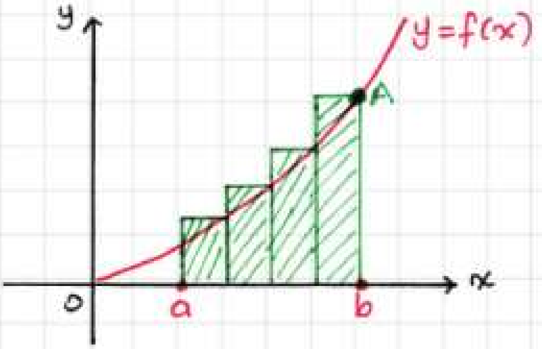
k yı bulurken

$$\sqrt{4-x^2}=x$$

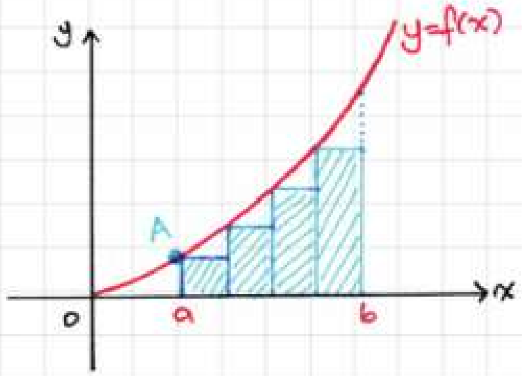
$$4-x^2=x^2$$

$$x=\sqrt{2}$$

Reimann Toplamı

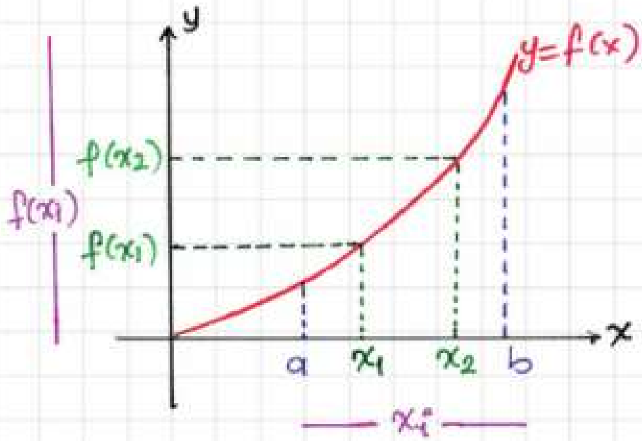


a ile b arası 4 eşit parçaya ayrılmış. Sağ üst A noktasından başlayarak oluşan dikdörtgenlerin alanları toplamı ÜST TOPLAM dır.



a ile b arası 4 eşit parçaya ayrılmış. Sol alt A noktasından başlayarak oluşan dikdörtgenlerin alanları toplamı ALT TOPLAM dır.

a ile b arası n eşit parçaya bölünürse $(n = \infty)$



Δx : Dikdörtgenlerin tabanındaki değişim

$\Delta x : \dfrac{b-a}{n}$

$x_i : a + i \cdot \Delta x$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

şeklinde alan hesaplanabilir.