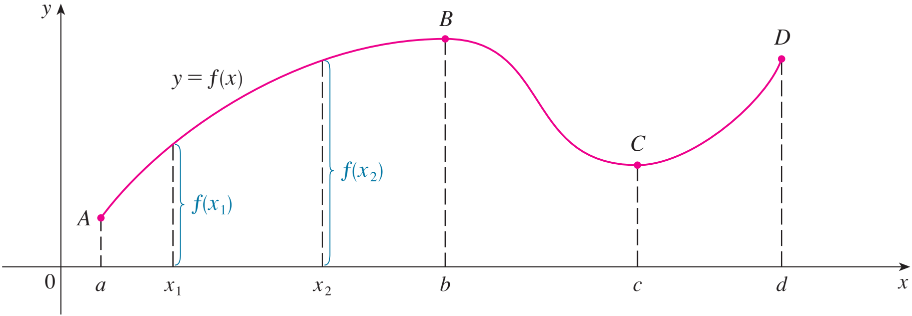
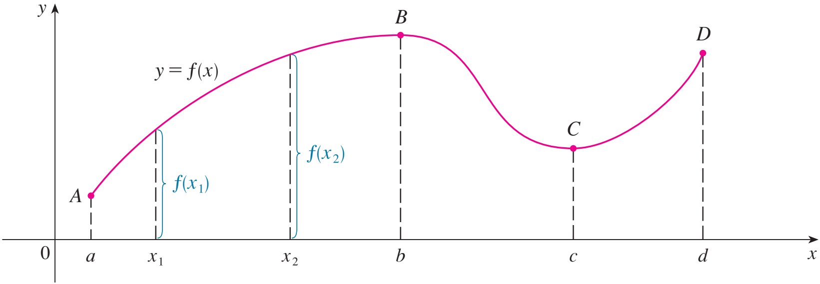
# Türevler ve Bir Eğrinin Biçimi

## Artan ve Azalan Fonksiyonlar




Şekilde grafik $A$'dan $B$'ye kadar yükselmekte $B$'den $C$'ye kadar düşmekte ve $C$'den $D$'ye kadar tekrar yükselmektedir $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında artan, $[b, c]$ aralığında azalan, $[c, d]$ aralığında ise yine artandır.




$x_1$ ve $x_2$ noktaları $a$ ve $b$ arasında, $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan herhangi iki nokta ise $f(x_1) < f(x_2)$ olduğuna dikkat ediniz. Bu özelliği artan fonksiyonun tanımı için kullanacağız.

$I$ aralığındaki her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f$ fonksiyonu $I$ aralığında **artandır**.

$I$ aralığındaki her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise $f$ fonksiyonu $I$ aralığında **azalandır**.

### Artanlık-Azalanlık Testi

(a) Bir aralıkta $f'(x) > 0$ ise bu aralıkta $f$ artandır.

(b) Bir aralıkta $f'(x) < 0$ ise bu aralıkta $f$ azalandır.

### Örnek 1

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

### Çözüm.

Burada

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

olup artanlık-azalanlık testini kullanmak için nerede $f'(x) > 0$, nerede $f'(x) < 0$ olduğunu bilmek zorundayız.
Bu $f'(x)$'in çarpanlarının işaretlerine bağlıdır. Bu çarpanlar, $12x, (x-2)$ ve $(x+1)$'dir.

## Çözüm (devamı).

Gerçel doğruyu uç noktaları $-1$, $0$ ve $2$ kritik noktaları olan aralıklara bölelim ve çalışmamızı bir çizelgeye yerleştirelim

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| | azalan | | artan | | azalan | | artan |

Artı işareti, verilen ifadenin pozitif, eksi işareti, verilen ifadenin negatif olduğunu gösterir.

Çözüm (devamı).

Dolayısıyla $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ fonksiyonu
$(-\infty, -1)$ aralığında **azalandır**,
$(-1, 0)$ aralığında **artandır**,
$(0, 2)$ aralığında **azalandır**,
$(2, \infty)$ aralığında **artandır**. $\square$

$f$ nin $c$ de bir yerel maksimumu ya da minimumu varsa, $c$ nin $f$ nin kritik sayısı olması gerektiğini (Fermat Teoremi), fakat her kritik sayıda bir maksimum ya da minimum ortaya çıkmayacağını hatırlayalım.
Bunun sonucu olarak kritik sayıda $f$ nin yerel maksimumu ya da minimumu olup olmadığımız bir teste ihtiyacımız var.

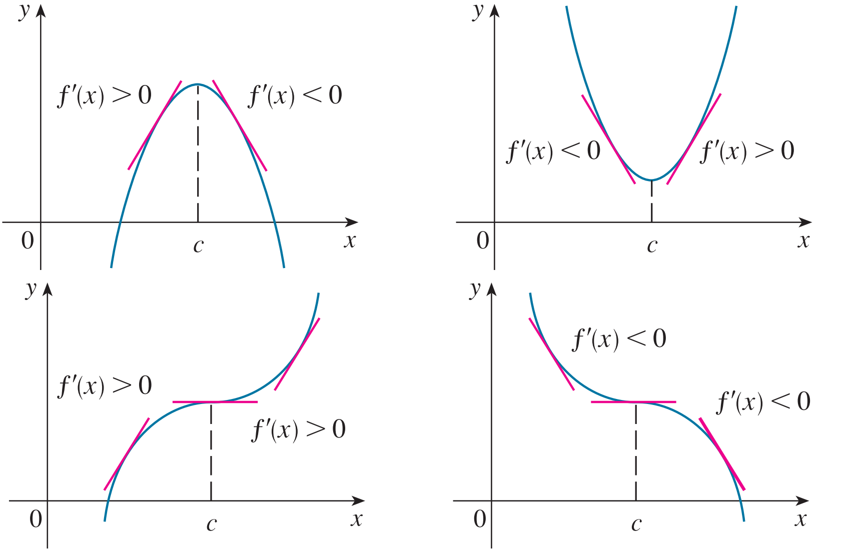
## Birinci Türev Testi

Bir $f$ sürekli fonksiyonunun bir kritik sayısının $c$ olduğunu varsayalım.

(a) Eğer $f'$ türevi $c$'de pozitiften negatife değişirse $f$'nin $c$'de bir yerel maksimumu vardır.

(b) Eğer $f'$ türevi $c$'de negatiften pozitife değişirse $f$'nin $c$'de bir yerel minimumu vardır.

(c) Eğer $f'$ türevi $c$'de işaret değiştirmezse ($f'$, $c$'nin iki yanında pozitif ya da negatif ise) $f$'nin $c$'de yerel maksimumu ve minimumu yoktur.


y
x
0
c
f′(x) > 0
f′(x) < 0
y
x
0
c
f′(x) < 0
f′(x) > 0
y
x
0
c
f′(x) > 0
f′(x) > 0
y
x
0
c
f′(x) < 0
f′(x) < 0

## Örnek 2

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ fonksiyonunun yerel maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

## Çözüm.

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

Çizelgeden $f'(x)$'in $(-1)$ noktasında negatiften pozitife değiştiğini görürüz. Dolayısıyla, $f(-1) = 0$, Birinci Türev Testi ile bir yerel minimum değeridir.

## Çözüm (devamı).

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

Benzer olarak, $f'$ türevi $2$'de negatiften pozitife değişir. Burada $f(2) = -27$'de bir yerel minimum değeridir.
Daha önce de belirtildiği gibi $f(0) = 5$ bir yerel maksimum değeridir çünkü $f'(x)$ türevi $0$'da pozitiften negatife değişir. $\square$

# Düşey Asimptot

## Tanım 3

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

ifadelerinden en az birinin doğru olması durumunda $x = a$ doğrusuna $y = f(x)$ eğrisinin **düşey asimptotu** denir.

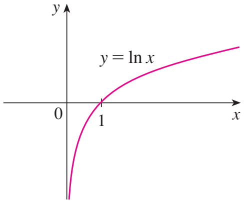
## Örnek 4

$y = \tan x$ ve $y = \ln x$ fonksiyonlarının grafiklerinde düşey asimptotlar vardır.

Şekilden

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

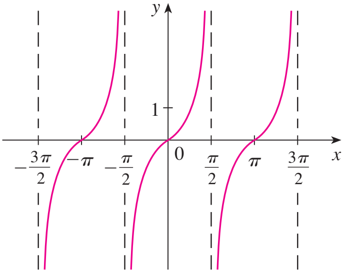
olduğu görülür.




Şekilden

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$$

olduğu görülür. Aslında, $n$ bir tamsayı olmak üzere $x = (2n+1)\pi/2$ doğruları $y = \tan x$ fonksiyonunun tüm düşey asimptotlarıdır.



# Yatay Asimptot

$-\infty$ sembolü bir sayı belirtmez ve

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

ifadesi

"$x$ eksi sonsuza yaklaşırken, $f(x)$ in limiti $L$ dir"

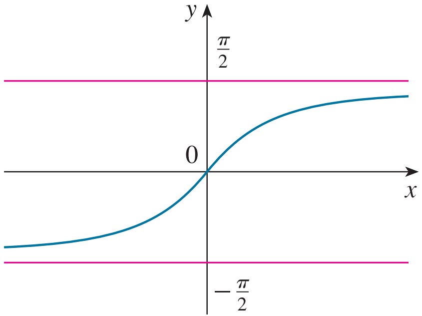
şeklinde okunur.

## Tanım 5

Eğer, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ veya $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ise $y = L$ doğrusuna $y = f(x)$ eğrisinin **yatay asimptotu** denir.

## Örnek 6

Yatay asimptotu olan bir eğri örneği $y = \tan^{-1} x$ dir.



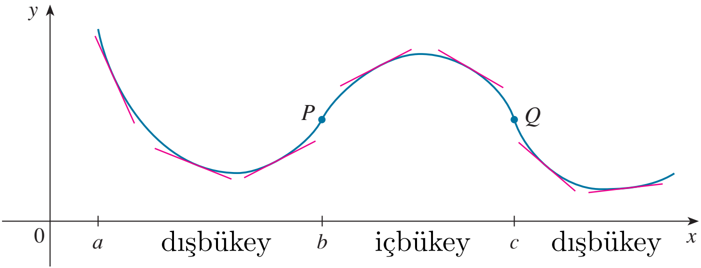

Gerçekten,

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

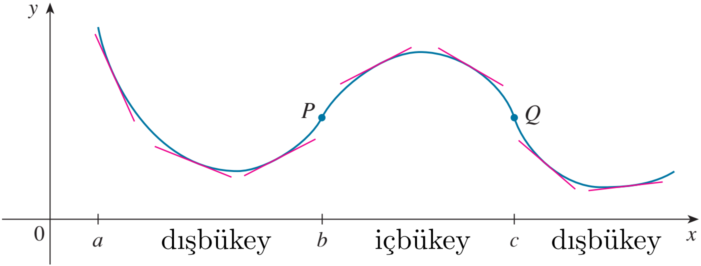
olduğundan, $y = -\pi/2$ ve $y = \pi/2$ doğruları yatay asimptotlardır.

# Bükeylik

Bir $f$ fonksiyonunun $f'$ türevi bir $I$ aralığı üzerinde artan bir fonksiyon ise $f$ fonksiyonu (ya da grafiği) $I$ üzerinde **dışbükey** denir. Eğer $f'$ türevi bir $I$ aralığı üzerinde azalan bir fonksiyon ise $f$ fonksiyonu $I$ üzerinde **içbükey** denir.



Bir eğrinin bükeyliğinin yönünün değiştiği noktaya **büküm noktası** denir.




Şekildeki eğri $P$'de dışbükeylikten içbükeyliğe ve $Q$'da içbükeylikten dışbükeyliğe değişir. Dolayısıyla $P$ ve $Q$ noktaları eğrinin büküm noktalarıdır.

## Bükeylik Testi

(a) $I$ aralığındaki her $x$ için $f''(x) > 0$ ise $I$ üzerinde $f$'nin grafiği dışbükeydir.

(b) $I$ aralığındaki her $x$ için $f''(x) < 0$ ise $I$ üzerinde $f$'nin grafiği içbükeydir.

Bükeylik testinden dolayı ikinci türevin işaretinin değiştiği herhangi bir noktada bir büküm noktası vardır. Bükeylik testinin bir sonucu maksimum ve minimum değerleri veren aşağıdaki testtir.

## İkinci Türev Testi

$f''$'nün $c$'nin yakınında sürekli olduğunu varsayalım.

(a) $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise $f$'nin $c$'de bir yerel minimumu vardır.

(b) $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise $f$'nin $c$'de bir yerel maksimumu vardır.

## Not

$f''(c) = 0$ olduğunda İkinci Türev Testi sonuç vermez.

Diğer bir deyişle, bu noktada bir maksimum veya bir minimum olabilir ya da her ikisi de olmayabilir.

Bu test, $f''(c)$ tanımlı olmadığında da geçerli değildir. Böyle durumlarda Birinci Türev Testi kullanılmalıdır.

Her iki testin kullanılabildiği durumlarda Birinci Türev Testini kullanmak çoğu kez daha kolaydır.

## Örnek 7

$y = x^4 - 4x^3$ eğrisinin bükeyliğini, büküm noktalarını, yerel maksimum ve yerel minimum değerlerini tartışınız. Bu bilgileri kullanarak eğrinin grafiğini çiziniz.

## Çözüm.

$f(x) = x^4 - 4x^3$ ise

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

olur. Kritik noktaları bulmak için $f$'nin türevini sıfıra eşitlersek

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0$$

$x = 0$ ve $x = 3$ buluruz.

Çözüm (devamı).

İkinci türev testini kullanmak için kritik sayılarda

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

$f''(3) = 0$ ve $f''(3) > 0$ olduğundan ikinci türev testi $0$ kritik noktası hakkında bilgi vermez, $f(3) = -27$ yerel minimum değeridir.
Fakat, $x < 0$ ve $0 < x < 3$ için $f'(x)$ negatif olduğundan birinci türev testi bize $f$'nin $0$'da bir yerel maksimumu ya da yerel minimumu olmadığını söyler.

## Çözüm (devamı).

İkinci türevin köklerini

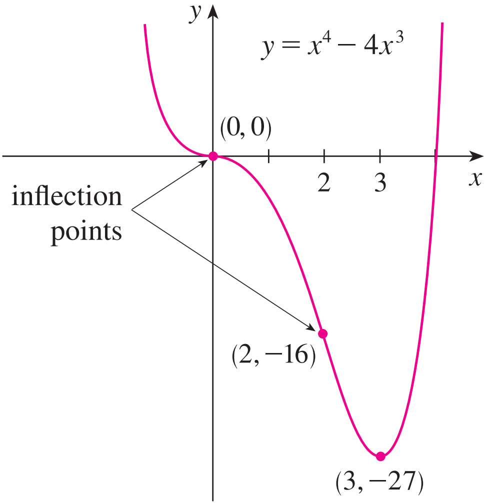
$$f''(x) = 12x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ve} \quad x = 2$$

olarak buluruz.

| $x$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $x$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |

$(0,0)$ noktasında bükeylik dışbükeylikten içbükeyliğe değiştiği için büküm noktasıdır.

## Çözüm (devamı).



## Örnek 8

$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

## Çözüm.

Fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

şeklindedir. $x = 4$ için $f'(x) = 0$ olup $x = 0$ veya $x = 6$ için $f'(x)$ tanımlı olmadığından $0, 4, 6$ noktaları kritik noktalardır.

## Çözüm (devamı).

Yerel uç değerlerini bulmak için birinci türev testini kullanırız.

| $x$ | | $0$ | | $4$ | | $6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $x^{1/3}$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(6-x)^{2/3}$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $-$ |

## Çözüm (devamı).

$f'$ türevi $0$'da negatiften pozitife değiştiğinden $f(0) = 0$ yerel bir minimumdur.
$f'$ türevi $4$'te pozitiften negatife değiştiğinden $f(4) = 2^{5/3}$ bir yerel maksimumdur.
$f'$ nün işareti $x = 6$'da değişmediğinden bu noktada maksimum ya da minimum yoktur.

$$f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

İkinci türev testi, $4$'te kullanılabilir fakat $0$ ve $6$'da $f''$ tanımlı olmadığından kullanılamaz.

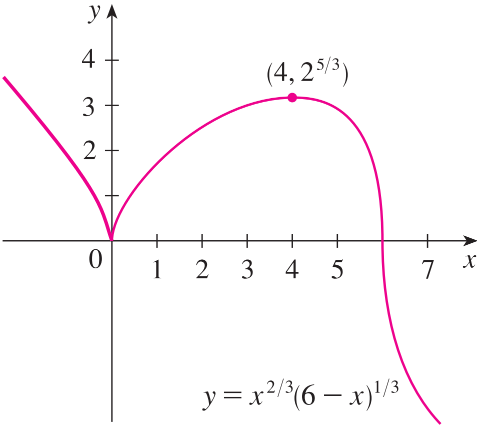
## Çözüm (devamı).

$f''(x)$'in ifadesine bakılırsa

| $x$ | | 0 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^{4/3}$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(6-x)^{5/3}$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $\dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| | $(-\infty,0)$ içbükey | | $(0,6)$ içbükey | | $(6,\infty)$ dışbükey |

$(6,0)$ noktasının tek büküm noktası olduğu görülür.

Çözüm (devamı).




Eğrinin $(0,0)$ ve $(6,0)$'da düşey teğetleri vardır. Çünkü $x \to 0$ ve $x \to 6$ iken $|f'(x)| \to \infty$ olur. □

## Örnek 9

$f(x) = e^{1/x}$ fonksiyonunun asimptotlarla birlikte birinci ve ikinci türevlerini kullanarak grafiğini çiziniz.

## Çözüm.

$f$'nin tanım kümesi $\{x \mid x \neq 0\}$ kümesidir. Dolayısıyla, $x \to 0$ iken $f$'nin sağdan ve soldan limitlerini hesaplayarak düşey asimptotlarını kontrol edebiliriz.
$x \to 0^+$ iken $t = \frac{1}{x} \to \infty$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

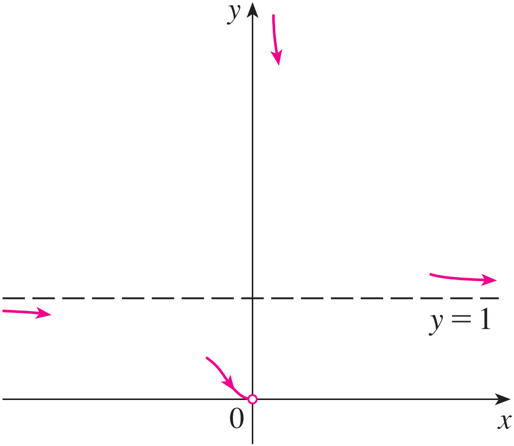
$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty$$

olur. $x \to 0^-$ iken $1/x \to -\infty$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$$

olur.

## Çözüm (devamı).



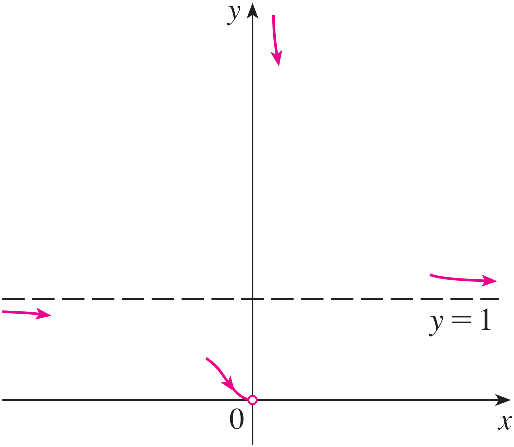
Çözüm (devamı).

$x \to \pm\infty$ iken $\frac{1}{x} \to 0$ ve

$$\lim_{x \to \mp\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

olur. Yani, $y = 1$ yatay asimptottur.

Çözüm (devamı).



## Çözüm (devamı).

Şimdi $f$'nin birinci ve ikinci türevlerini hesaplayalım. Zincir kuralı ile

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

hesaplanır.
Her $x \neq 0$ için $x^2 > 0$ ve $e^{1/x} > 0$ olduğundan her $x \neq 0$ için $f'(x) < 0$'dır.
Dolayısıyla, $f$ fonksiyonu $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında azalandır.
Kritik nokta olmadığından $f$'nin yerel maksimumu ve yerel minimumu yoktur.

## Çözüm (devamı).

İkinci türev

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

olarak hesaplanır. $e^{1/x} > 0$ ve $x^4 > 0$ olduğundan

$$x > -\frac{1}{2} \ (x \neq 0) \text{ iken } f''(x) > 0$$

ve

$$x < -\frac{1}{2} \text{ iken } f''(x) < 0$$

olur.

Böylece, eğri $(-\infty, -1/2)$ aralığında içbükey $(-1/2, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında dışbükeydir. $(-1/2, e^{-2})$ büküm noktasıdır.

## Çözüm (devamı).