Bağımlı Hız

Eğer bir balonun içine hava pompalarsak, balonun hem yarıçapı hem de hacmi artar ve artış hızları birbirine bağımlıdır. Fakat, hacminin artış hızını doğrudan ölçmek yarıçapın artışını ölçmekten daha kolaydır.

Bağımlı hız problemlerindeki fikir, bir niceliğin değişim hızını, (ölçümü daha kolay olabilen) diğer bir niceliğin değişim hızı cinsinden hesaplamaktır.

Bunun için yöntem; iki niceliğe bağlı bir denklem bulmak ve sonra zincir kuralını kullanarak her iki tarafın zamana göre türevini almaktır.

Örnek 1

Küresel bir balon içine hava pompalandığında balonun hacmi $100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{sn}$ hızla artıyor. Balonun çapı $50\,\mathrm{cm}$ olduğunda yarıçapındaki artış hızı ne kadardır?

Çözüm.

İki şeyi tanımlamakla başlıyoruz.
Bu nicelikleri matematiksel olarak ifade etmek için bazı fikir verici gösterimleri tanımlayacağız.
Balonun hacmi V ve yarıçapı r olsun.

Verilen	Hacimin artış hızı $100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{sn}$ dir.
Bilinmeyen	Çap $50\mathrm{cm}$ olduğundaki yarıçapın artış hızı.

Anımsanması gereken ana düşünce değişim hızlarının türevler olduğudur.
Bu problemde, hacim ve yarıçap t zamanında bağlı fonksiyonlardır.

Çözüm (devamı).

Hacmin zamana göre artış hızı dV/dt türevi ve yarıçapın artış hızı dr/dt türevidir.

Verileni ve bilinmeyeni yeniden aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Verilen $\frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$

Bilinmeyen $r = 25$ iken $\frac{dr}{dt}$

dV/dt ve dr/dt arasında bağlantı kurmak için önce V ve r arasında kürenin hacim formülü ile bağlantı kurmak için

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

yazalım.

Verilen bilgileri kullanmak için bu denklemin her iki tarafının t'ye göre türevini alacağız.

Çözüm (devamı).

Sağ tarafın türevini almak için zincir kuralını kullanırsak

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

elde ederiz. Şimdi, bu denklemden bilinmeyeni çözersek

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

buluruz. Eğer, bu denklemde $r = 25$ ve $dV/dt = 100$ koyarsak

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi (25)^2} 100 = \frac{1}{25\pi}$$

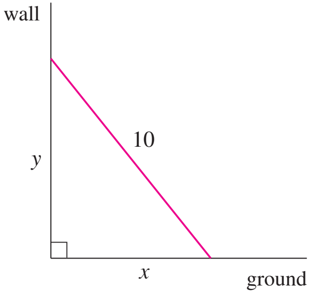
elde ederiz. Burada balonun yarıçapının $(1/25\pi)\,\mathrm{cm/sn}$ hızla arttığını görürüz. □

Örnek 2

$10\,\mathrm{m}$ uzunluğundaki bir merdiven dik bir duvara dayanıyor. Merdivenin altı $1\,\mathrm{m/sn}$ hızla kayarak duvardan uzaklaşırsa merdivenin alt kısmının duvardan uzaklığı $6\,\mathrm{m}$ olduğu anda üstünün duvardan aşağıya kayma hızı nedir?

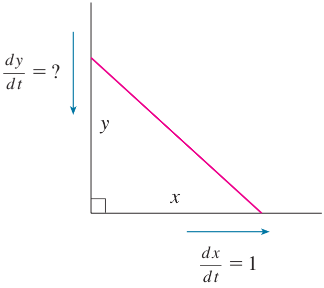
Çözüm.

İlk olarak, Şekildeki gibi bir şema çizelim. Merdivenin altından duvara olan uzaklık $x\,\mathrm{m}$ ve merdivenin tepesinden yere uzaklık $y\,\mathrm{m}$ olsun. Burada x ve y değerleri zamanı gösteren t'nin fonksiyonlarıdır.



Çözüm (devamı).

Bize $dx/dt = 1\,\mathrm{m/sn}$ olduğu veriliyor ve $x = 6\,\mathrm{m}$ olduğunda dy/dt değerini bulmamız isteniyor.



Bu problemde, x ve y arasındaki ilişki Pisagor teoremi ile

$$x^2 + y^2 = 100$$

olarak elde edilir.

Çözüm (devamı).

Zincir kuralını kullanarak her iki tarafın t'ye göre türevini alırsak

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

olur ve bu denklemden isteneni çözersek $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt}$ buluruz. $x = 6$ olduğunda Pisagor teoreminden $y = 8$ olur. Bu değerleri ve $dx/dt = 1$'i yukarıdaki denklemde yerine koyarsak

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4}\text{ft/sn}$$

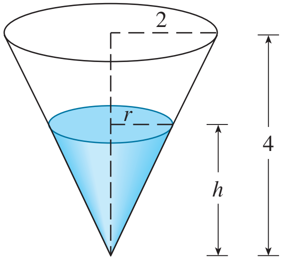
elde ederiz. dy/dt'nin negatif olmasının anlamı merdivenin üstünden yere olan uzaklığın $3/4\,\mathrm{m/sn}$ oranında azalmasıdır. Diğer bir deyişle, merdivenin üstü duvardan $3/4\,\mathrm{m/sn}$ hızla aşağıya doğru kaymaktadır. □

Örnek 3

Bir su tankı, taban yarıçapı $2\,\mathrm{m}$ ve yüksekliği $4\,\mathrm{m}$ olan ters çevrilmiş bir koni şeklindedir. Eğer tank içine $2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{dk}$ hızla su pompalanırsa derinlik $3\,\mathrm{m}$ olduğu zaman su seviyesinin artış hızını bulunuz.

Çözüm.

İlk olarak, Şekildeki gibi bir çembersel koni çizip isimlendirme yapalım. V, r, h sırasıyla t anındaki hacmi, yüzeyin yarıçapı ve yüksekliği olsun. Burada, t dakika ile ölçülmüştür.



Çözüm (devamı).

Bize $dV/dt = 2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{dk}$ olduğu veriliyor ve $h = 3\,\mathrm{m}$ olduğunda dh/dt değerini bulmamız isteniyor. V ve h arasındaki ilişki

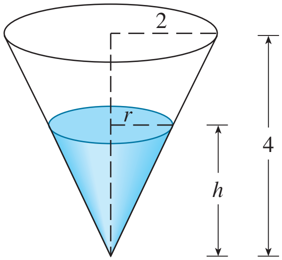
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

denklemi ile verilir. Fakat V'yi sadece h'nin fonksiyonu olarak ifade etmek çok yararlıdır.

r'yi yok etmek için Şekildeki benzer üçgenleri kullanırız. Buradan

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \quad \text{ve} \quad r = \frac{h}{2}$$

elde ederiz.



Çözüm (devamı).

Bunu V'de yerine yerleştirirsek

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

olur. Şimdi her iki tarafın t'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

olur ve böylece

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

buluruz. $h = 3\,\mathrm{m}$ ve $dV/dt = 2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{dk}$'yı yerine koyarsak

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi} \approx 0.28\,\mathrm{m}^3/\mathrm{dk}$$ elde ederiz. □

Maksimum ve Minimum Değerler

Diferansiyel hesabın en önemli uygulamalarından biri, bir işi yapmanın en iyi yolunu bulmak olan **optimizasyon** problemleridir.

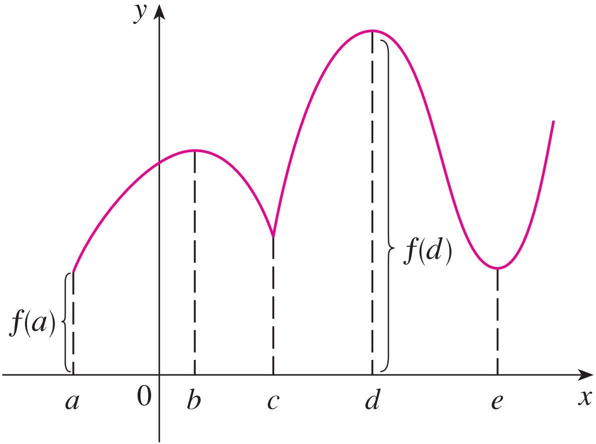
- Maliyeti minimum yapmak için bir teneke kutunun şekli nasıl olmalıdır?
- Bir uzay mekiğinin maksimum ivmesi ne olmalıdır? Bu ivmenin etkilerine katlanmak zorunda olan astronotlar için önemli bir sorudur.

Bu problemler bir fonksiyonun maksimum ya da minimum değerlerini bulmaya indirgenebilir. Şimdi ilk olarak maksimum ve minimum değerle tam olarak ne demek istediğimizi açıklayalım.

Tanım 4

f bir fonksiyon ve D, f'nin tanım kümesi olsun. D içindeki her x elemanı için $f(c) \geq f(x)$ ise f fonksiyonunun c noktasında **mutlak maksimumu** vardır.
$f(c)$ sayısına f'nin D'deki **maksimum değeri** denir.
Benzer olarak, D içindeki her x için $f(c) \leq f(x)$ ise f fonksiyonunun c noktasında **mutlak minimumu** vardır ve $f(c)$ sayısına f'nin D'deki **minimum değeri** denir.
f'nin maksimum ve minimum değerlerine f'nin **uç değerleri** denir.

Şekil d noktasında mutlak maksimuma ve a noktasında mutlak minimuma sahip olan bir f fonksiyonunun grafiğini göstermektedir. Bu grafik üzerindeki en üstteki noktanın $(d, f(d))$ noktası ve en alttaki noktanın $(a, f(a))$ noktası olduğuna dikkat ediniz.



Tanım 5

x noktası c'ye yakın olduğuda $f(c) \geq f(x)$ ise f fonksiyonunun c noktasında bir **yerel maksimumu** (ya da **göreli maksimumu**) vardır. (Bunun anlamı c'yi içeren bir açık aralık içindeki her x için $f(c) \geq f(x)$ olmasıdır)
Benzer olarak, x noktası c'ye yakın olduğunda $f(c) \leq f(x)$ ise f'nin c noktasında bir **yerel minimumu** vardır.

Örnek 6

Her x için

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

ve herhangi bir n tamsayısı için

$$\cos(2n\pi) = 1$$

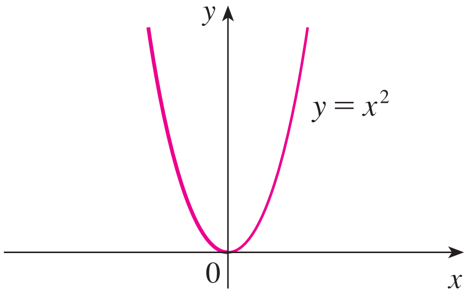
olduğundan $f(x) = \cos x$ fonksiyonu (yerel ve mutlak) maksimum değeri olan 1'i sonsuz kez alır.
Benzer olarak, herhangi bir n tamsayısı için

$$\cos(2n+1)\pi = -1$$

fonksiyonunun minimum değeridir.

Örnek 7

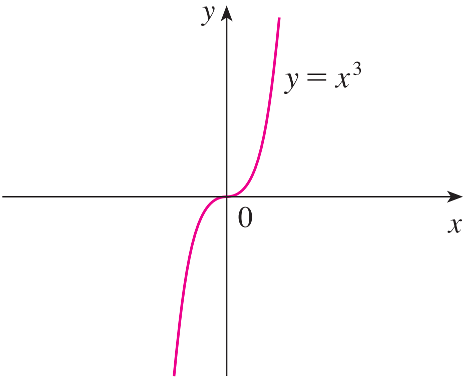
$f(x) = x^2$ ise her x için $x^2 \geq 0$ olduğundan $f(x) \geq f(0)$'dır. Dolayısıyla, $f(0) = 0$ değeri f'nin mutlak (ve yerel) minimum değeridir. Bu $y = x^2$ parabolü üzerindeki en alttaki noktanın başlangıç noktası olduğu gerçeğine karşılık gelir



Bununla beraber, parabol üzerinde en üst nokta yoktur ve bu yüzden bu fonksiyonun maksimum değeri de yoktur.

Örnek 8

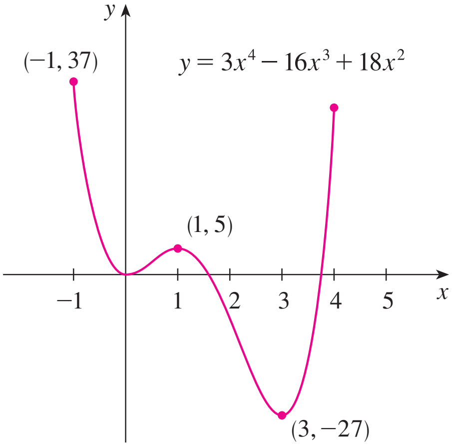
Şekilde gösterilen $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinden, fonksiyonun hem mutlak maksimum hem de mutlak minimum değerlerinin olmadığını görüyoruz.

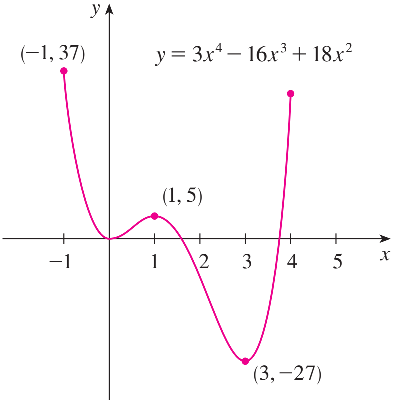


Örnek 9

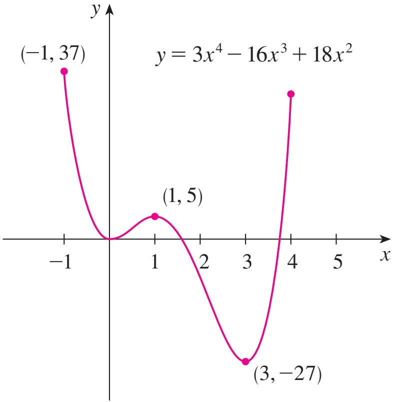
$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad\qquad -1 \leq x \leq 4$$

Fonksiyonunun grafiği Şekilde gösterilmiştir.





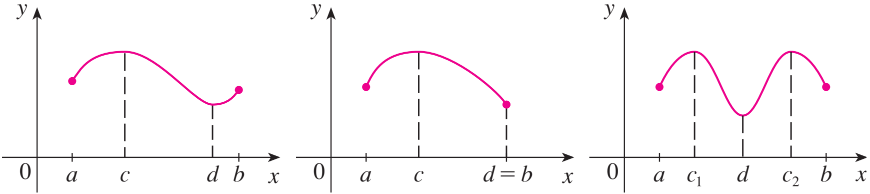
Buradan $f(1) = 5$ in yerel maksimum ve $f(-1) = 37$ nin mutlak maksimumum olduğunu görürüz. [Bu mutlak maksimum bir yerel maksimum değildir. Çünkü uç noktada oluşmuştur]

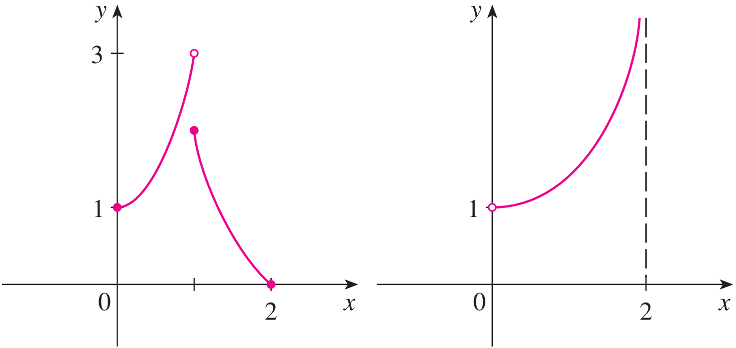


Ayrıca $f(0) = 0$ yerel minimum ve $f(3) = -27$ hem yerel hem de mutlak minimumdur. Burada f nin $x = 4$ de ne yerel ne de mutlak maksimumunun olmadığına dikkat ediniz.

Teorem 10 (Uç Değer Teoremi)

f fonksiyonu bir $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise c ve d sayıları $[a, b]$ kapalı aralığında olmak üzere $f(c)$ mutlak maksimumum değerini ve $f(d)$ mutlak minimum değerini alır.



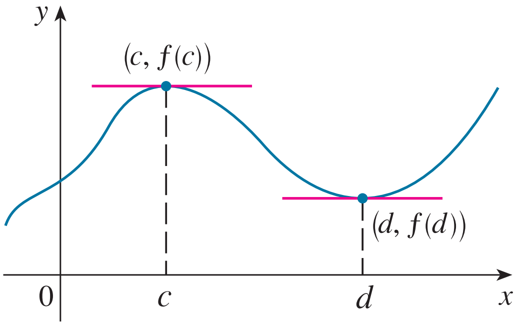


Şekiller uç değer teoreminin hipotezlerinden birini kaldırdığımızda (süreklilik ya da kapalılık) fonksiyonun uç değerlere sahip olması gerekmediğini gösterir.

Uç değer teoremi bir kapalı aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun bir maksimum ve bir minimum değere sahip olduğunu söyler fakat bu uç değerlerin nasıl bulunacağı konusunda bir şey söylemez.

Yerel uç değerleri arayarak işe başlayalım.

Şekil c'de bir yerel maksimumu ve d'de bir yerel minimumu olan bir f fonksiyonunun grafiğini göstermektedir. Maksimum ve minimum noktalarında teğet doğruları yataydır ve bunun sonucu olarak her birinin eğimi 0'dır. Türevin teğet doğrusunun eğimi olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, $f'(c) = 0$ ve $f'(d) = 0$'dır.



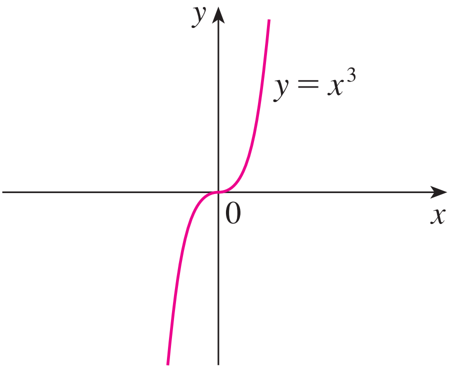
Aşağıdaki teorem bu sonucun türevlenebilir fonksiyonlar için daima doğru olduğunu söyler.

Teorem 11 (Fermat Teoremi)

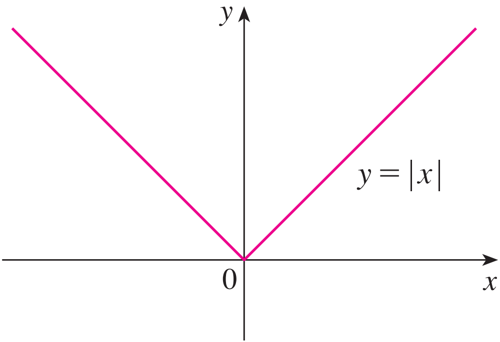
Eğer f, c *noktasında yerel maksimuma ya da yerel minimuma sahip ve* $f'(c)$ *varsa* $f'(c) = 0$ *sağlanır.*

Note

Dolayısıyla, $f'(c) = 0$ olduğunda f'nin c noktasında maksimumu ya da minimumu olması gerekmez. Diğer bir deyişle, Fermat teoreminin tersi genelde doğru değildir.



$f(x) = x^3$ ise $f'(0) = 0$'dır ancak f'nin maksimum ve minimumu yoktur.



$f(x) = |x|$ ise $f(0) = 0$ minimum değerdir fakat $f'(0)$ yoktur.

Tanım 12

f bir fonksiyon ve c sayısı f'nin tanım kümesi içinde olsun. Eğer $f'(c) = 0$ ya da $f'(c)$ yoksa c ye f'nin bir **kritik noktası** denir.

Kritik sayılar cinsinden, Fermat teoremini aşağıdaki biçimde yeniden ifade edebiliriz.

Teorem 13 (Fermat Teoremi)

Eğer f'nin c'de bir yerel maksimumu ya da minimumu varsa c noktası f'nin bir kritik noktasıdır.

Örnek 14

$f(x) = x^{3/5}(4-x)$ fonksiyonunun kritik sayılarını bulunuz.

Çözüm.

Çarpım kuralı ile

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{5}x^{-2/5}(4-x) + x^{3/5}(-1) = \frac{3(4-x)}{5x^{2/5}} - x^{3/5} \\ &= \frac{3(4-x)-5x}{5x^{2/5}} = \frac{12-8x}{5x^{2/5}} \end{aligned}$$

olur. (Aynı sonuç $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$ yazarak da elde edilebilir.)
Böylece, $f'(x) = 0$'dan $12 - 8x = 0$ olur. Buradan, $x = \frac{3}{2}$ elde ederiz.
$x = 0$ noktasında türev yoktur.
Sonuç olarak, $\frac{3}{2}$ ve 0 kritik noktalardır. $\square$

Kapalı Aralık Yöntemi

Bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanan bir sürekli fonksiyonun **mutlak** maksimumumum ya da minimum değerlerini bulmak için:

1. f'nin (a, b)'deki kritik sayılardaki değerlerini bulunuz.
2. Aralığın uç noktalarında f'nin değerlerini bulunuz.
3. Adım 1 ve 2'deki değerlerin en büyüğü mutlak maksimumum değeri, en küçüğü ise mutlak minimum değeridir.

Örnek 15

$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığı üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri bulunuz.

Çözüm.

$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ fonksiyonu $[0, 3]$ aralığında süreklidir. $f'(x) = 6x - 12$ olduğundan $x = 2$ kritik noktadır. Kritik noktada fonksiyonun değeri

$$f(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 5 = -7$$

dir. Uç noktalarda fonksiyonun değeri

$$f(0) = 5 \text{ ve } f(3) = -4$$

dir. Kapalı Aralık Yöntemini kullanarak bu üç değeri karşılaştırırsak $f(2) = -7$ mutlak minimum değeri ve $f(0) = 5$ mutlak maksimum değeri olur. $\square$