

Türevler

Daha önce $y = f(x)$ denklemi ile ifade edilen bir eğrinin $x = a$ noktasındaki teğetin eğimini

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

olarak tanımladık. Buradan, konum fonksiyonu $s = f(t)$ ile verilen bir cismin $t = a$ anındaki hızı

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

olarak verilir.

Aslında, herhangi bir bilim ya da mühendislik dalında ne zaman bir değişim hızı hesaplasak

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

şeklindeki limitler ortaya çıkar. Bu biçimdeki limitlerle çok yaygın olarak karşılaşıldığından bunlar için özel bir isim ve gösterim kullanılır.

Tanım 1

Eğer varsa

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

limitine f **fonksiyonunun** a **noktasındaki türevi** denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.

$x = a + h$ yazarsak $h = x - a$ olur ve h 'nin 0'a yaklaşması için gerekli ve yeter koşul x 'in a 'ya yaklaşmasıdır. Dolayısıyla, teğet doğrularını bulurken gördüğümüz gibi, türevin eşdeğer tanımı

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ile verilir.

Örnek 2

$f(x) = x^2 - 8x + 9$ fonksiyonunun a noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm.

Tanımdan,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 8) = 2a - 8 \end{aligned}$$

elde ederiz.

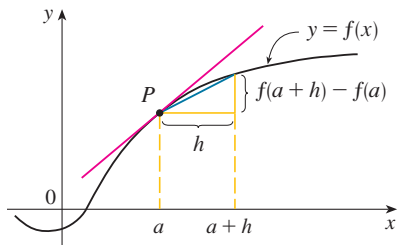


Bir Teğetin Eğimi Olarak Türevin Yorumu

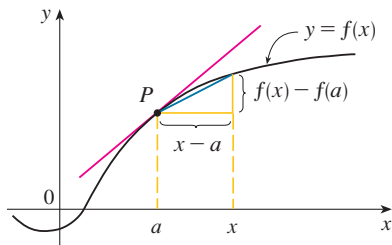
$y = f(x)$ eğrisinin $P(a, f(a))$ noktasındaki teğet doğrusunu, P' den geçen ve m eğimi $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ deki gibi verilen doğru olarak tanımladık. Bu eğim Tanımdan dolayı, $f'(a)$ türevi ile aynı olduğundan aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$y = f(x)$ eğrisinin $P(a, f(a))$ noktasındaki teğet doğrusu $(a, f(a))$ noktasından geçen ve eğimi $f'(a)$ (f' 'nin a 'daki türevi) olan doğrudur.

Dolayısıyla, türevin geometrik yorumu Şekillerde gösterildiği gibidir.



$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= P \text{ deki teğetin eğimi} \\ &= \text{eğrinin } P \text{ deki eğimi} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= P \text{ deki teğetin eğimi} \\ &= \text{eğrinin } P \text{ deki eğimi} \end{aligned}$$

Doğru denkleminin nokta-eğim biçimini kullanırsak $y = f(x)$ eğrisinin $(a, f(a))$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

olarak yazabiliriz.

Örnek 3

$y = x^2 - 8x + 9$ parabolünün $(3, -6)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini yazınız.

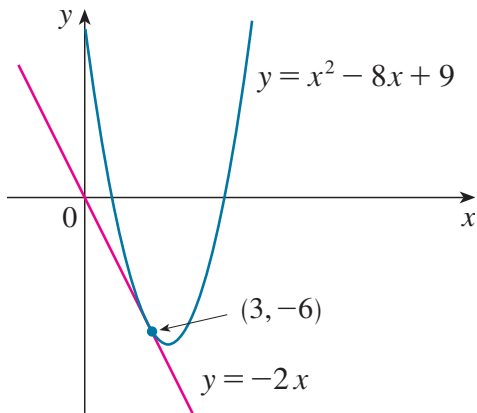
Çözüm.

$f(x) = x^2 - 8x + 9$ fonksiyonunun a sayısındaki türevinin $f'(a) = 2a - 8$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $(3, -6)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimi $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$ olur. Bundan dolayı, teğet doğrusunun denklemini

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \text{ ya da } y = -2x$$

olur.

Çözüm (devamı).



Fonksiyon Olarak Türev

Önceki bölümde bir f fonksiyonunun

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

ile tanımlı sabit bir a noktasındaki türevi üzerinde durduk. Burada bakış açımızı değiştirelim ve a 'nın değişken olduğunu varsayalım. (1)'de, a 'nın yerine bir x değişkeni koyarsak

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

elde ederiz. Bu limitin var olduğu her x sayısına bir $f'(x)$ sayısı karşılık gelir.

Dolayısıyla; f' , f' 'nin **türevi** olarak adlandırılan ve (2) ile tanımlanan yeni bir fonksiyon olarak ele alınabilir.

x 'teki $f'(x)$ değerinin geometrik olarak f' 'nin grafiğinin $(x, f'(x))$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimi olarak yorumlanabileceğini biliyoruz.

f' fonksiyonu f nin türevi olarak adlandırılır çünkü f' 'den (2) deki limit işlemi ile “türetilmiştir”.

f' fonksiyonunun tanım kümesi $\{x \mid f'(x) \text{ vardır}\}$ olarak verilir ve f' 'nin tanım kümesinden küçük olabilir.

Örnek 4

$f(x) = \sqrt{x}$ ise f' 'nin türevini bulunuz. f' 'nin tanım kümesini bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$x > 0$ ise $f'(x)$ vardır, bu nedenle f' nün tanım kümesi $(0, \infty)$ olur. Bu küme, f nin tanım kümesi olan $[0, \infty)$ kümesinden küçüktür. \square

Diğer Gösterimler

Bağımsız değişkenin x bağımlı değişkenin y olduğu geleneksel $y = f(x)$ gösterimini kullanırsak türev için kullanılan bazı yaygın gösterimler

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x)$$

şeklinindedir. D ve $\frac{d}{dx}$ sembolleri **türev alma işlemini** ifade ettiğinden **türev alma operatörleri** olarak adlandırılır.

Leibniz tarafından ortaya konulan $\frac{dy}{dx}$ sembolü (şimdilik) bir oran olarak değerlendirilmemelidir, yalnızca $f'(x)$ ile eşanımlıdır.

Buna karşın, özellikle değişim gösterimi ile birlikte kullanıldığında çok yararlı ve anlamlı bir gösterimdir.

Türevin tanımını Leibniz gösterimi ile

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

şeklinde yazabiliriz.

$\frac{dy}{dx}$ türevinin bir a sayısındaki değerini Leibniz gösterimi ile

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} \quad \text{ya da} \quad \frac{dy}{dx} \Big]_{x=a}$$

olarak ifade ederiz ve bu gösterim ile $f'(a)$ eşanımlıdır.

Tanım 5

$f'(a)$ varsa f fonksiyonuna **a 'da türevlenebilir** denir.

f bir (a, b) (ya da (a, ∞) ya da $(-\infty, a)$ ya da $(-\infty, \infty)$) açık aralığındaki her noktada türevlenebilirse f fonksiyonu (a, b) **açık aralığında türevlenebilir** denir.

Örnek 6

$f(x) = |x|$ fonksiyonu nerede türevlenebilirdir?

Çözüm.

Eğer $x > 0$ ise, $|x| = x$ olur ve h yi $x + h > 0$ koşulunu sağlayacak kadar küçük seçebiliriz ve bu nedenle $|x + h| = x + h$ olur. Dolayısıyla, $x > 0$ için

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

elde ederi ve bu nedenle $x > 0$ için f türevlenebilirdir.

Çözüm (devamı).

Aynı şekilde, eğer $x < 0$ ise, $|x| = -x$ olur ve h yi, $x + h < 0$ koşulunu sağlayacak kadar küçük seçebiliriz ve bu nedenle $|x + h| = -(x + h)$ olur. Dolayısıyla, $x < 0$ için

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1 \end{aligned}$$

elde ederiz ve bu yüzden $x < 0$ için f türevlenebilir. $x = 0$ için şunu incelemeliyiz;

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad (\text{limit varsa}) \end{aligned}$$

Çözüm (devamı).

Sağ ve sol limitleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

ve

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

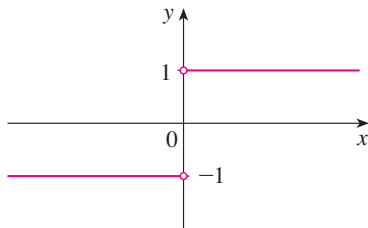
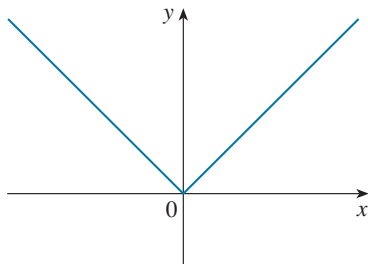
Bu limitler farklı olduğundan, $f'(0)$ yoktur. Dolayısıyla, f , 0 dışındaki her noktada türevlenebilirdir.

Çözüm (devamı).

 f' nün formülünü

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ ise,} \\ -1, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak verebiliriz ve grafiği şekildeki gibidir. $f'(0)$ in var olmaması gerçeği geometrik olarak $y = |x|$ in $(0, 0)$ noktasında teğet doğrusunun olmaması olgusuna yansıtılmaktadır. \square



Süreklilik ve türevlenebilirliğin her ikisi de bir fonksiyonun sahip olması istenilen özelliklerdendir. Aşağıdaki teorem bu özelliklerin nasıl ilişkili olduklarını göstermektedir.

Teorem 7

f , a 'da türevlenebilirse f , a 'da sürekli.

Not

Teoremin tersi yanlıştır. Bir başka deyişle, sürekli fakat türevlenebilir olmayan fonksiyonlar vardır.

Örneğin, $f(x) = |x|$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$$

olduğundan f , 0'da sürekli. Fakat, bir önceki örnekte f 'nin 0'da türevlenemediğini gösterdik.

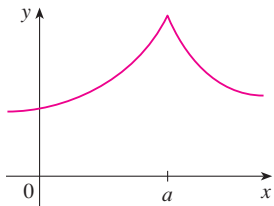
Bir Fonksiyon Nasıl Türevlenebilir Olmayabilir?

- Eğer f fonksiyonunun grafiğinde “**köşe**” veya “**kırılma**” varsa f 'nin grafiğinin o noktada teğeti yoktur ve f , o noktada türevlenebilir değildir. $f'(a)$ değerini hesaplamaya çalıştığımızda, sağ ve sol limitlerinin farklı olduğunu görürüz.
En son verdiğimiz teorem, bir fonksiyonun türevi olmamasının bir başka yolunu verir. Eğer f , a sayısında sürekli değilse f 'nin a 'da türevlenebilir olmadığını söyler. Bu nedenle, f süreksiz olduğu noktada (örneğin, sıçrama biçimindeki süreksizliklerde) türevlenebilir değildir.
- Üçüncü bir olasılık ise eğrinin $x = a$ 'da **düşey bir teğet doğrusuna** sahip olmasıdır. Bir başka ifadeyle; f , a 'da sürekli ve

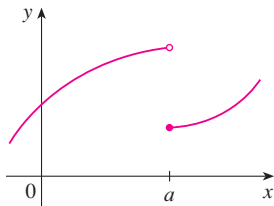
$$\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty$$

olmalıdır. Bu, $x \rightarrow a$ için teğet doğrularının dikleşmesi demektir.

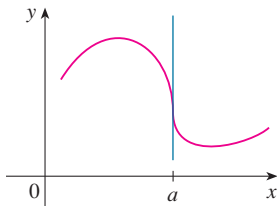
Şekilde ele aldığımız üç olasılığı da gösterilmektedir.



Köşe



Süreksizlik



Düşey teğet doğrusu