Trigonometri

Açılar

Açılar derece ya da radyan (kısaca rad) olarak ölçülebilir. Bir tam dönüş ile verilen açı 360° olup $2\pi\,\mathrm{rad}$ ile aynıdır. Dolayısıyla,

$$\pi\ \mathrm{rad} = 180^\circ \tag{1}$$

olup

$$1\ \mathrm{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} \approx 0.017\,\mathrm{rad} \tag{2}$$

elde edilir.

Örnek 1

(a) 60 derecenin radyan ölçüsünü bulunuz.

(b) $\dfrac{5\pi}{4}$ radyanı derece cinsinden ifade ediniz.

Çözüm.

(a) Denklem (1) ya da (2) den dereceyi radyana çevirmek için $\pi/180$ ile çarpmamız gerektiğini görürüz. Dolayısıyla

$$60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{rad}$$

(b) Radyanı dereceye çevirmek için $180/\pi$ ile çarpanz. Bunun sonucu

$$\frac{5\pi}{4}\ \mathrm{rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225^\circ \text{ dir.}$$

□

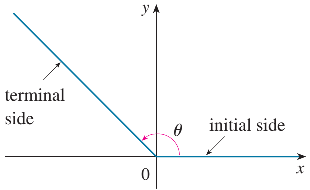
Kalkülüste tersi belirtilmediği sürece açıları ölçmek için radyan kullanırız. Aşağıdaki tablolarda sık karşılaşılan bazı açıların radyan ve derece ölçüsü karşılıkları verilmiştir.

Derece	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$
Radyan	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$

Derece	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
Radyan	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

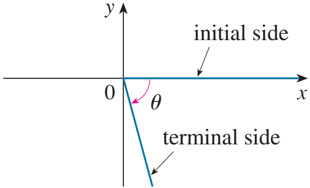
Bir açının **standart konumu**, Şekil 1 deki gibi köşesini başlangıç noktasına ve başlangıç kenarını pozitif $x-$ekseni üzerine yerleştirdiğimizde oluşur.

Şekil 1: $\theta > 0$



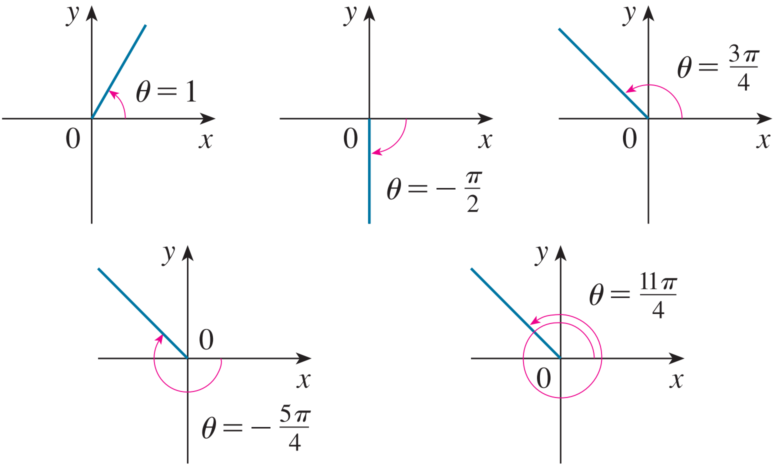
Başlangıç kenarı, saat yönünün tersi yönünde bitiş kenarı ile çakışıncaya kadar döndürülürse **pozitif** açı elde edilir.

Şekil 2: $\theta < 0$



Benzer olarak saat yönünde döndürülürse Şekil 2 deki gibi **negatif** açı elde edilir.

Şekilde standart konumda birkaç açı örneğini gösterilmektedir. Farklı açıların aynı başlangıç ve bitiş kenarlarına sahip olabileceğine dikkat ediniz.



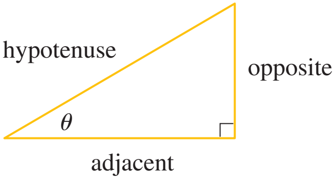
Örneğin, $\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$ ve $\frac{11\pi}{4}$ açıları için

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

olduğundan ve $2\pi\,\mathrm{rad}$ bir tam dönmeyi temsil ettiği için aynı başlangıç ve bitiş kenarlarına sahiptir.

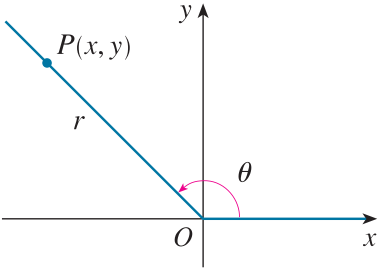
Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir θ dar açısı için, altı trigonometrik fonksiyon bir dik üçgenin kenar uzunluklarının oranı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.



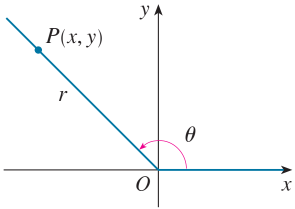
$$\sin\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{hipotenüs}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{karşı}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{hipotenüs}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenüs}}{\text{komşu}} \tag{3}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{karşı}}{\text{komşu}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{komşu}}{\text{karşı}}$$

Bu tanım, geniş ya da negatif açılara uygulanmaz. Bu nedenle, standart konumda genel bir θ açısı için θ'nın bitiş kenarı üzerinde bir $P(x, y)$ noktası alır ve $|OP|$ uzunluğunu Şekildeki gibi r ile gösteririz.



Böylece,

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y} \qquad (4)$$

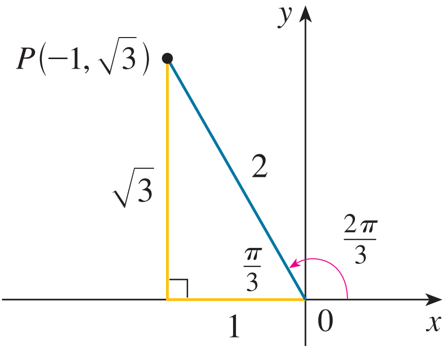


yazılabilir. Payda sıfır olduğunda bölüm tanımsız olacağından, $x = 0$ için $\tan\theta$ ve $\sec\theta$, $y = 0$ için $\csc\theta$ ve $\cot\theta$ tanımsızdır. θ dar açı olduğunda (3) ve (4) denklemlerin birbiriyle tutarlı olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 2

$\theta = 2\pi/3$ için kesin trigonometrik oranları bulunuz.

Çözüm.



Çözüm (devamı).

Şekilden $\theta = 2\pi/3$ ün bitiş doğrusu üzerindeki noktalardan birinin $P(-1, \sqrt{3})$ olduğu görülür. Dolayısıyla, trigonometrik oranların tanımında

$$x = -1 \quad y = \sqrt{3} \quad r = 2$$

alarak

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

elde ederiz. □

NOT

θ bir sayı olmak üzere $\sin(\theta)$, radyan ölçüsü θ olan açının sinüsü anlamına gelir.

Örneğin, $\sin(3)$ ifadesi $3\,\mathrm{rad}$'lık bir açı ile ilgilendiğimizi belirtir. Bu sayıyı hesap makinesi ile bulacağımız zaman makinenin radyan ayarına geçer ve

$$\sin 3 \approx 0.14112$$

elde ederiz.
3°'lik açının sinüsünü bulmek istersek, hesap makinemizin derece ayarına geçerek $\sin(3^\circ)$ yazar ve

$$\sin 3^\circ \approx 0.05234$$

buluruz.

Aşağıdaki tabloda bazı $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ değerleri verilmiştir.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Trigonometrik Özdeşlikler

Trigonometrik özdeşlik trigonometrik fonksiyonlar arasında bir bağıntıdır. Doğrudan doğruya trigonometrik fonksiyonların tanımından elde edilen özdeşliklerin en temel olanları

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

olarak verililir.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Toplam formülleri olarak adlandırılan diğer iki temel trigonometrik özdeşlik

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

şeklindedir.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Örnek 3

$\sin x = \sin 2x$ denklemini sağlayan $[0, 2\pi]$ aralığındaki tüm x değerlerini bulunuz.

Çözüm.

Çift-açı formülünü kullanarak verilen denklemi

$$\sin x = 2\sin x \cos x \quad \text{veya} \quad \sin x(1 - 2\cos x) = 0$$

şeklinde yazarız. Dolayısıyla iki seçenek vardır:

$$\sin x = 0 \quad \text{veya} \quad 1 - 2\cos x = 0$$

$$x = 0, \pi, 2\pi \quad \text{veya} \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

Verilen denklemin beş çözümü vardır: $x = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. □

Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiğini elde etmek için önce $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığı için noktalar çizilmiş daha sonra grafik, fonksiyonun periyodik yapısı kullanılarak tamamlanmıştır. Sinüs fonksiyonunun köklerinin π'nin tam sayı katlarında ortaya çıktığına, başka bir deyişle,

$$n \text{ tamsayı olmak üzere } x = n\pi \text{ için } \sin x = 0$$

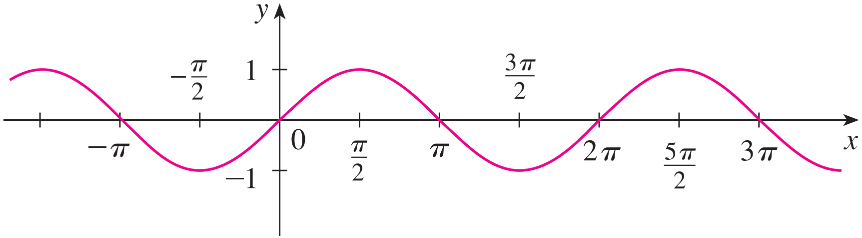
olduğuna dikkat ediniz.

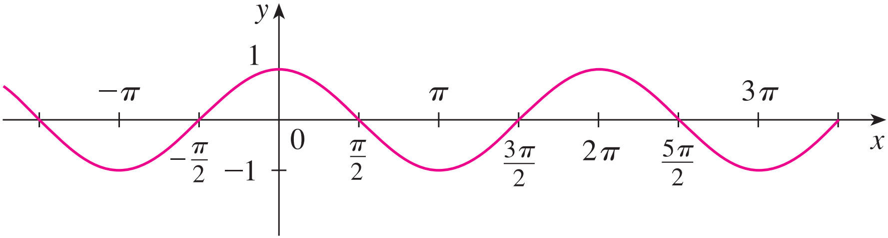
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

özdeşliğinden dolayı kosinüs grafiği sinüs grafiğinin $\frac{\pi}{2}$ kadar sola kaydırılması ile elde edilir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının her ikisinin de tanım kümeleri ve görüntü kümeleri sırasıyla $(-\infty, \infty)$ ve $[-1, 1]$ aralıklarıdır. Dolayısıyla, her x değeri için

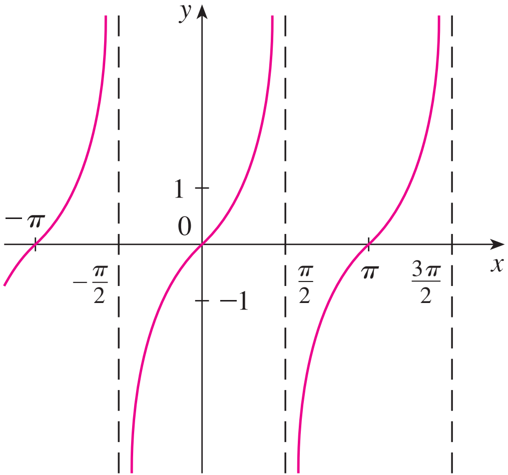
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$$

sağlanır.

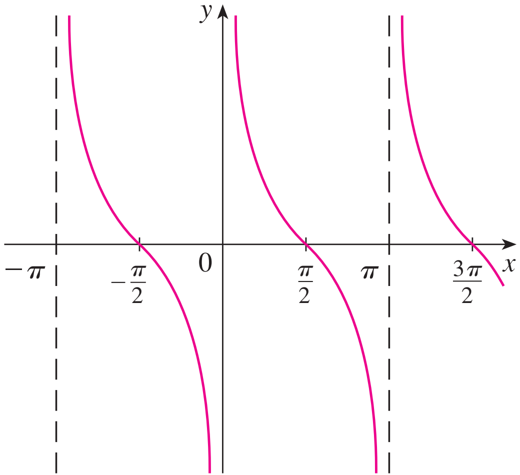




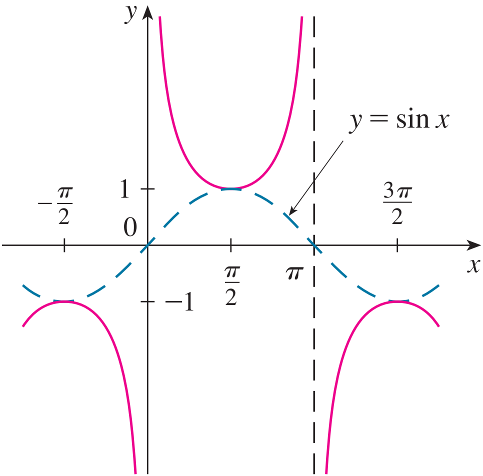
Geriye kalan dört trigonometrik fonksiyonun grafikleri ilerideki şekillerde gösterilmiştir.



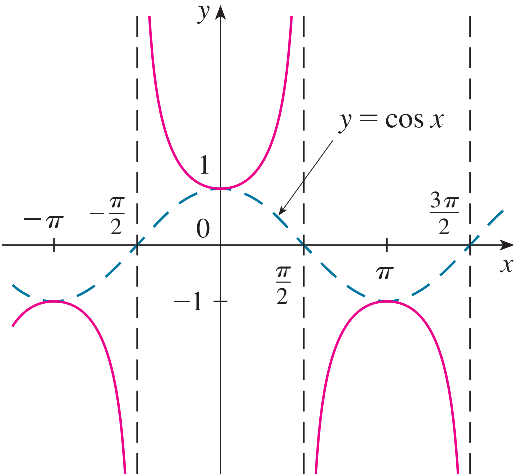
Şekil 3: $y = \tan x$



Şekil 4: $y = \cot x$



Şekil 5: $y = \csc x$



Şekil 6: $y = \sec x$

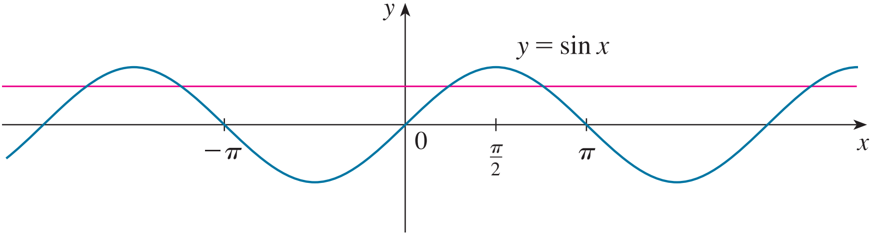
Ters Trigometrik Fonksiyonlar

Trigonometrik fonksiyonların tersini bulmaya çalıştığımızda küçük bir güçlükle karşılaşırız.

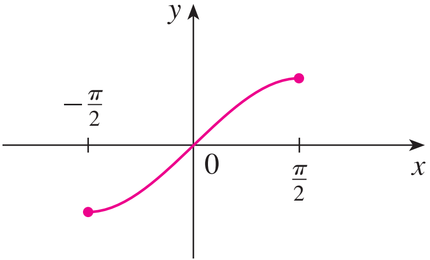
Trigonometrik fonksiyonlar bire-bir olmadığından ters fonksiyonları tanımlı değildir.

Bu fonksiyonların tanım kümeleri, fonksiyon bire-bir olacak şekilde kısıtlanarak bu güçlük aşılır.

Şekilden $y = \sin(x)$ fonksiyonunun bire-bir olmadığı (Yatay Doğru Ölçütü kullanılarak) görülür.



Ancak, $f(x) = \sin(x)$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ fonksiyonu bire-birdir.



Şekil 7:

Bu kısıtlanmış sinüs fonksiyonunun tersi vardır ve $\sin^{-1}$ ya da $\arcsin$ ile gösterilir.
Bu fonksiyon **ters sinüs fonksiyonu** ya da **arksinüs fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Ters fonksiyonun tanımı

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

olduğunu söyler. Buradan

$$\sin^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = x \quad \text{ve} \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $-1 \leq x \leq 1$ için $\sin^{-1} x$, $-\pi/2$ ile $\pi/2$ arasında bulunan, sinüsü x olan sayıdır.

Örnek 4

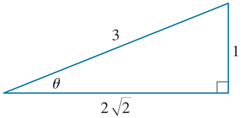
(a) $\sin^{-1}(1/2)$ ve (b) $\tan(\arcsin(1/3))$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm.

(a) $\sin(\pi/6) = 1/2$ ve $\pi/6$, $-\pi/2$ ile $\pi/2$ arasında olduğundan

$$\sin^{-1}(1/2) = \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

(b)



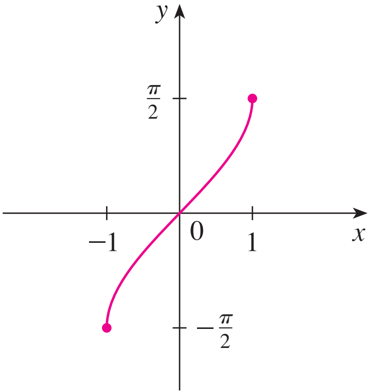
$\theta = \arcsin(1/3)$ olsun. Bu durumda açısı θ olan Şekildeki gibi bir dik üçgen çizer ve Pisagor Teoremi'nden üçüncü kenarın $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ olduğunu buluruz.

Bu ise, üçgenden

$$\tan(\arcsin(1/3)) = \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

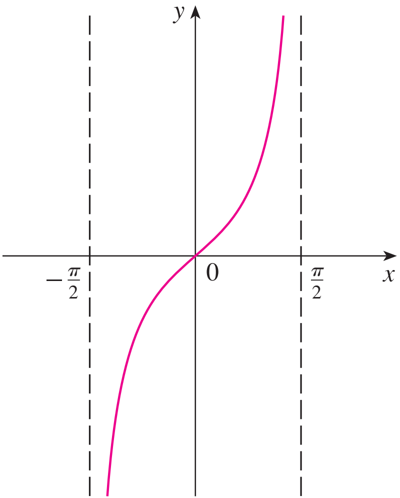
sonucunu elde etmemize olanak sağlar. □

Ters sinüs (yani, $\sin^{-1}$) fonksiyonunun tanım kümesi $[-1, 1]$ ve görüntü kümesi $[-\pi/2, \pi/2]$'dir ve Şekil 8 de gösterilen grafiği, kısıtlanmış sinüs fonksiyonunun (Şekil 7) $y = x$ doğrusuna göre yansıtılmasıyla elde edilmiştir.



Şekil 8:

Tanjant fonksiyonu $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığına kısıtlanarak bire-bir yapılabilir.



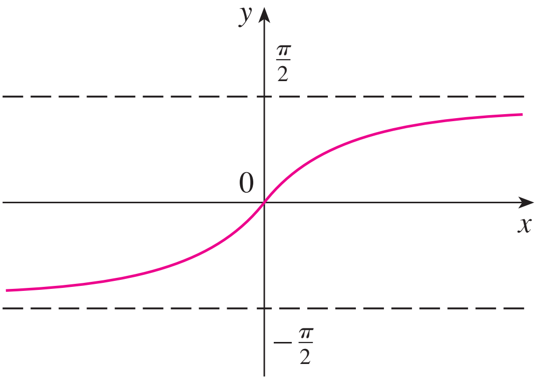
Şekil 9:

Dolayısıyla, **ters tanjant fonksiyonu**; $f(x) = \tan(x)$, $\pi/2 < x < \pi/2$ fonksiyonunun tersidir (Bakınız Şekil 9) ve $\tan^{-1}$ ya da $\arctan$ ile gösterilir.

$$\tan^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) = x \quad \text{ve} \quad -\pi/2 < y < \pi/2$$

.

Ters tanjant, $\tan^{-1} = \arctan$, fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $(-\pi/2, \pi/2)$ dir.



Örnek 5

$\cos(\tan^{-1} x)$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.

$y = \tan^{-1} x$ olsun. Bu durumda $\tan y = x$ ve $-\pi/2 < y < \pi/2$ olur. $\cos y$ yi bulmak için $\tan y$ yardımıyla $\sec y$ yi hesaplayalım.

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \ (-\pi/2 < y < \pi/2 \text{ için } \sec y > 0 \text{ old.})$$

Dolayısıyla,

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ dir.}$$

□