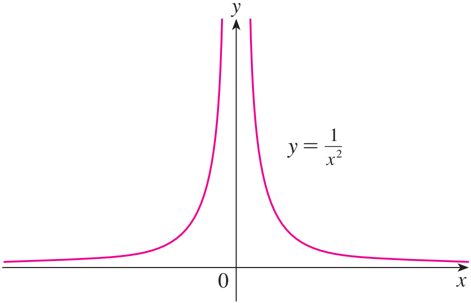
Sonsuzluk İçeren Limitler

Sonsuz Limitler



x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

Tablodan, x'i 0'a yaklaştıkça $\dfrac{1}{x^2}$ değerlerinin büyüdüğü görülüyor.

Aslında, Şekilden, x'i 0'a yeterince yakın alarak $\dfrac{1}{x^2}$ değerlerinin istenildiği kadar büyük yapılabileceği sonucuna varabiliriz.

Dolayısıyla, $f(x)$'in değerleri sonlu bir sayıya yaklaşmaz ve

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

limiti yoktur.

Bu tür davranışı betimlemek için

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

gösterimini kullanırız.

Buradaki ∞ işaretini bir sayı olarak düşündüğümüz anlamına gelmediği gibi, limitin var olduğu anlamına da gelmez.

Bu, yalnızca limitin olmamasının nedeninin ifadesidir: x değişkeni 0'a yeterince yakın alınarak $\dfrac{1}{x^2}$ istenildiği kadar büyütülebilir.

Genellikle, x değişkeni a'ya yaklaşırken $f(x)$'in değerlerinin giderek büyüdüğünü (veya "sınırsız olarak arttığını") göstermek için simgesel olarak

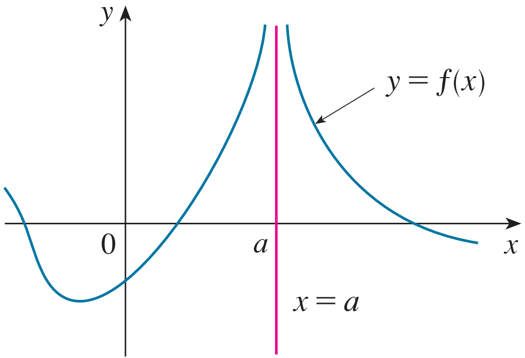
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

yazarız.

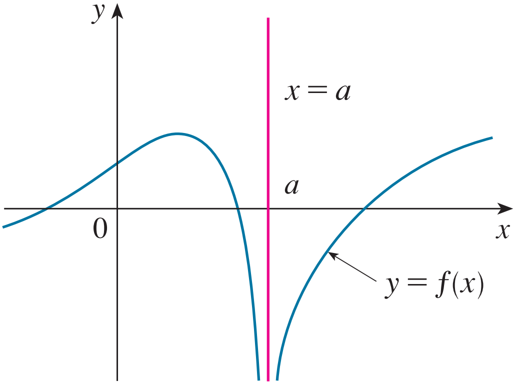
Tanım 1

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

gösterimi, x değişkeni a'ya yeterince yakın (sağından veya solundan) ama a'dan farklı alınarak $f(x)$ değerlerinin istenildiği kadar büyük yapılabileceği anlamına gelir.



$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ gösterimi "x değişkeni a'ya yaklaşırken $f(x)$'in limiti eksi sonsuzdur" ya da "x değişkeni a ya yaklaşırken $f(x)$ sınırsız olarak azalır" olarak okunabilir.



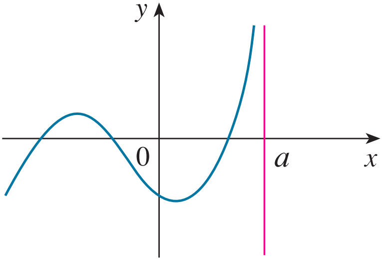
Örnek olarak, $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ verilebilir.

Benzer tanımlar, "$x \to a^-$" gösteriminin yalnız a'dan küçük x değerlerini ve benzer biçimde "$x \to a^+$" gösteriminin yalnız $x > a$ değerlerini düşündüğümüz anlamına geldiği anımsanarak

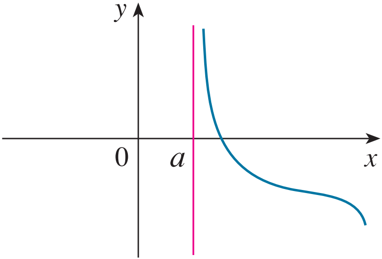
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

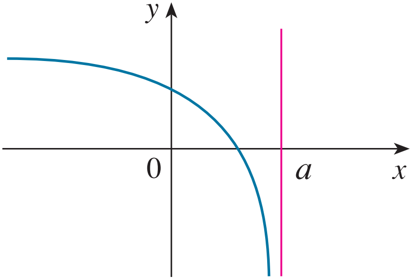
tek yönlü limitleri için de verilebilir.



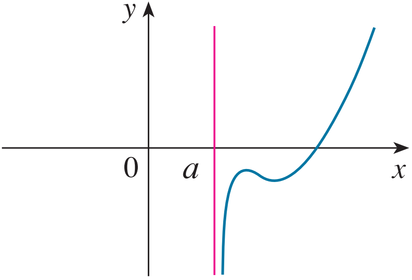
(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Örnek 2

$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$ ve $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3}$ limitlerini bulunuz.

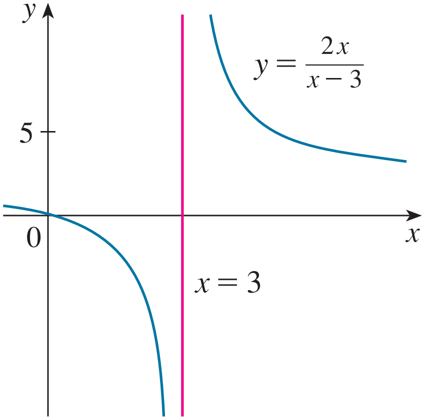
Çözüm.

x değeri 3 den büyük ve 3 e yakın bir sayı ise, payda $x-3$ küçük ve pozitif bir sayı ve pay $2x$ de 6 ya yakın olacağından, $2x/(x-3)$ oranı büyük bir pozitif sayı olacaktır. Buradan, sezgisel olarak

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

olduğunu görürüz. Benzer biçimde, x in 3 den küçük ve 3 e yakın değerleri için $x-3$ negatif ve küçük bir sayıdır, ama $2x$ yine pozitif bir sayıdır (6 ya yakın). Dolayısıyla $2x/(x-3)$ sayısal değeri büyük bir sayı olur.

Çözüm (devamı).



Böylece

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

elde ederiz. □

Örnek 3

$\lim_{x \to 0} \ln(\tan^2 x)$ limitini bulunuz.

Çözüm.

Değişken değiştirerek, yeni bir $t = \tan^2 x$ değişkeni tanımlayalım. $t \geq 0$ dır ve tanjant fonksiyonunun sürekliliğinden $x \to 0$ iken $t = \tan^2 x \to \tan^2 0 = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \to 0} \ln(\tan^2 x) = \lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$$

dır. $\square$

Sonsuzdaki Limitler

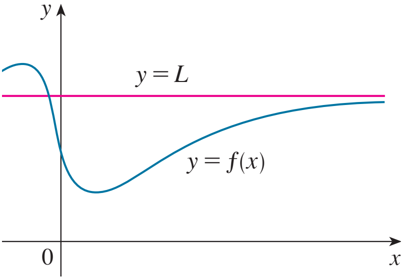
Tanım 4

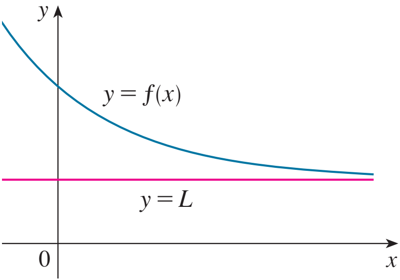
f fonksiyonu, (a, ∞) aralığında tanımlı olsun.

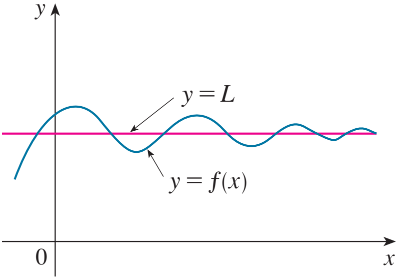
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

ifadesi x'in değeri "yeterince büyük" seçilerek $f(x)$ değerinin L'ye istenildiği kadar yakın yapılabileceği anlamını taşır.

Tanımın geometrik açıklaması Şekillerde verilmiştir. Bir f fonksiyonunun $y = L$ doğrusuna yaklaşmasının bir çok yolu olduğuna dikkat ediniz.



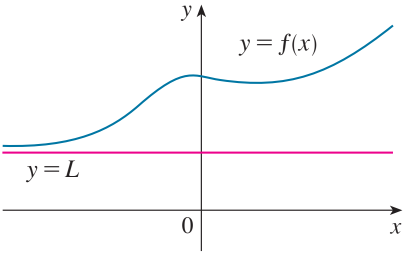


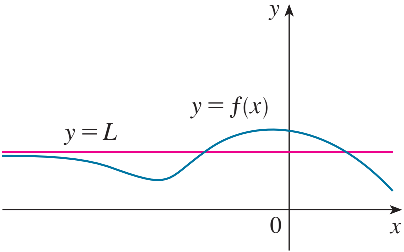


Genel olarak, Şekilde görüldüğü gibi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

gösterimi x negatif saylardan yeteri kadar küçülterek $f(x)$ değerlerinin L sayısına istenildiği kadar yakın yapılabileceğini ifade eder.





Örnek 5

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ ve $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ limitlerini bulunuz.

Çözüm.

x büyükken $1/x$ in küçük olduğunu gözlemleyiniz. Örneğin,

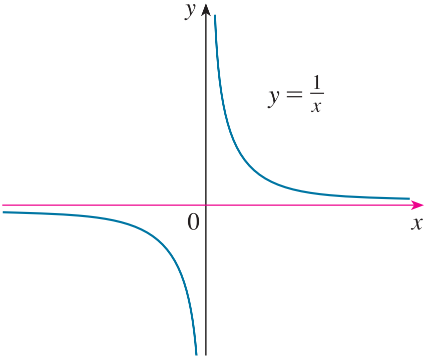
$$\frac{1}{100} = 0,01 \quad \frac{1}{10.000} = 0,0001 \quad \frac{1}{1.000.000} = 0,000001$$

dir. Gerçekten x i yeterince büyük seçerek $1/x$ i 0 a istediğimiz kadar yakın yapabiliriz. Tanım gereğince

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

elde ederiz.

Çözüm (devamı).



Benzer şekilde x in büyük değerleri için $1/x$ negatif ve küçük olur. Böylece

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ buluruz.}$$

□

Daha önce verilen limit kurallarının çoğu sonsuzdaki limitlerde de geçerlidir. Kural 9 ve Kural 10 dışında verilen diğer limit kurallarının "$x \to a$" yerine "$x \to \infty$" veya "$x \to -\infty$" konduğunda da geçerli olduğu kanıtlanabilir.
Özel olarak, n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

olur.

Örnek 6

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ limitini bulunuz.

Çözüm.

Kesirli bir fonksiyonun sonsuzdaki limitini bulmak için önce pay ve paydayı, paydadaki x in en büyük kuvvetine böleriz. (Yalnızca x in büyük değerleri ile ilgilendiğimizden, $x \neq 0$ varsayabiliriz.) Bu örnekte paydadaki x in en büyük kuvveti x^2 olduğundan, limit kurallarından

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

Çözüm (devamı).

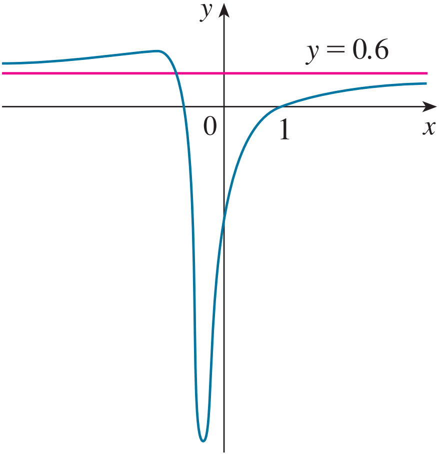
$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2})}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{3-0-0}{5+0+0} = \frac{3}{5}$$

buluruz. Benzer bir hesaplama $x \to -\infty$ iken alınan limitin yine $3/5$ olduğunu verir.

Çözüm (devamı).

Şekil verilen kesirli fonksiyonun $y = 3/5$ yatay asimptotuna yaklaşmasını göstererek bu hesaplamaların sonucunu sergilemektedir. □



Örnek 7

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ limitini bulunuz.

Çözüm.

Pay ve paydayı eşlenikle çarparak, paydaki kare kökten kurtulur ve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0\end{aligned}$$

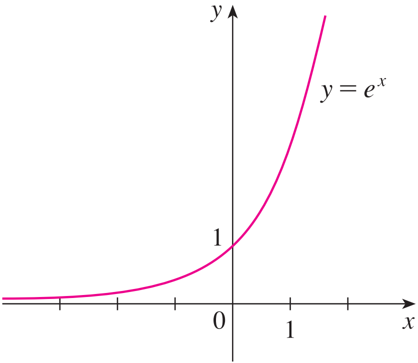
elde ederiz. □

Örnek 8

Doğal üstel fonksiyon $y = e^x$ in grafiğinden

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \tag{1}$$

olduğunu söyleyebiliriz.



Örnek 9

$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$ limitini bulunuz.

Çözüm.

$t = 1/x$ değişkeni için $x \to 0^-$ iken $t \to -\infty$ olduğunu biliyoruz. Böylece (1) den

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

olur. □

Örnek 10

$\lim_{x\to\infty} \sin x$ limitini bulunuz.

Çözüm.

x artarken $\sin x$ değerleri -1 ile 1 arasında sonsuz kez salınır. Bu nedenle $\lim_{x\to\infty} \sin x$ limiti yoktur. □

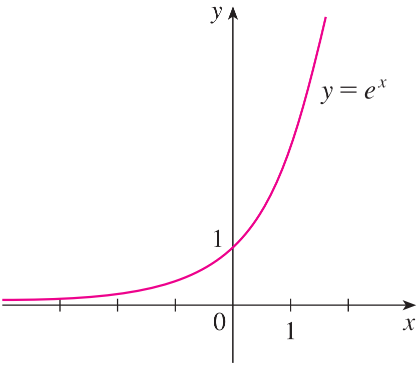
Sonsuzdaki Sonsuz Limitler

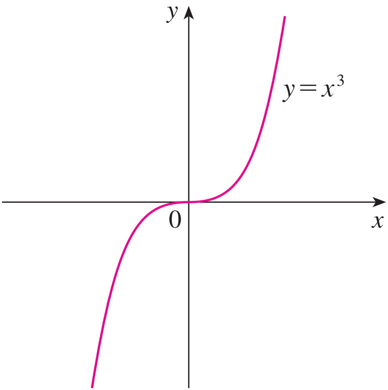
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

gösterimi, x büyürken $f(x)$ değerlerinin de büyüdüğünü ifade eder.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

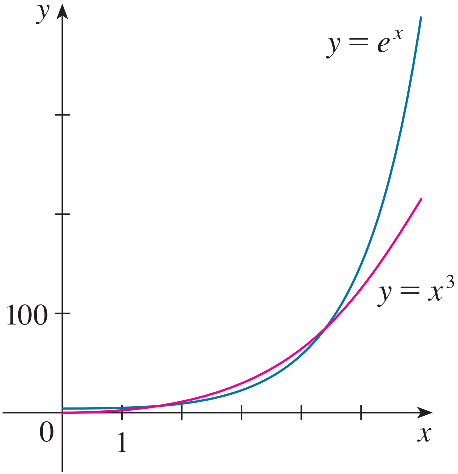
gösterimlerinin de anlamları benzerdir.





$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$x \to \infty$ iken $y = e^x$, $y = x^3$'ten çok daha hızlı büyümektedir.



Örnek 11

$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x)$ limitini bulunuz.

Çözüm.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

yazılamayacağına dikkat ediniz. Limit kuralları ∞ bir sayı olmadğından sonsuz limitlerde kullanılamazlar. ($\infty - \infty$ tanımlanamaz). Ancak hem x hem de $x - 1$ sınırsız olarak büyüdüğünden

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty$$

yazabiliriz. □

Örnek 12

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3-x}$ limitini bulunuz.

Çözüm.

Pay ve paydayı (paydadaki polinomum en yüksek kuvveti olan) x ile bölerek, $x \to \infty$ iken $x+1 \to \infty$ ve $3/x - 1 \to -1$ olduğundan,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\frac{3}{x}-1} = -\infty$$

buluruz. $\square$