Üstel Fonksiyonlar ve Logaritma Fonksiyonları

$f(x) = 2^x$ fonksiyonunda değişken x bir üst olduğundan bu fonksiyon **üstel fonksiyondur**.

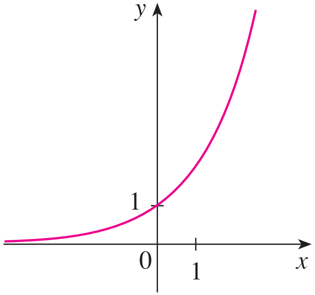
Bu fonksiyon, değişken x'in tabanda olduğu $g(x) = x^2$ kuvvet fonksiyonu ile karıştırılmamalıdır.

Genel olarak, a sayısının pozitif bir sabit sayı olduğu

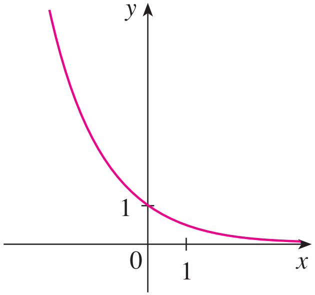
$$f(x) = a^x$$

fonksiyonuna **üstel fonksiyon** denir.

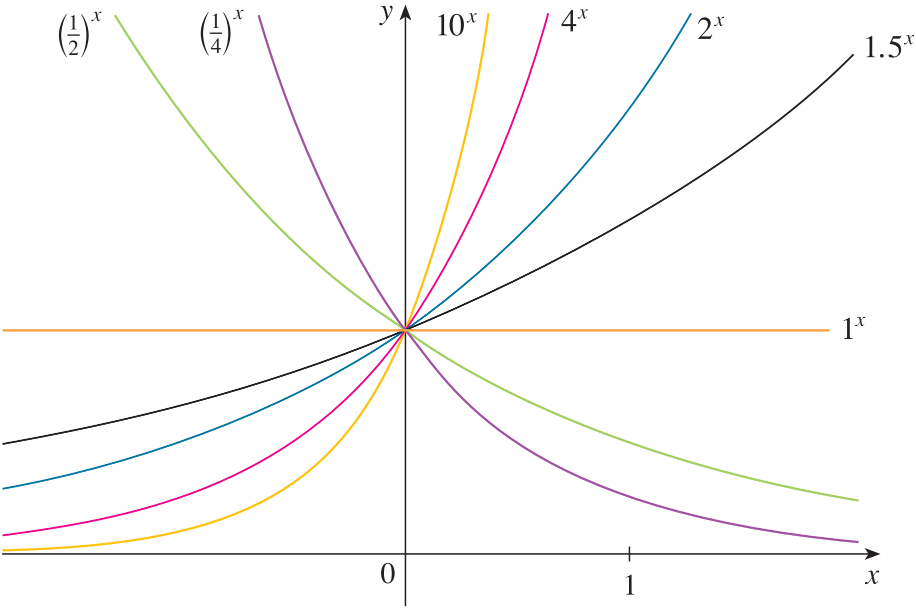
$y = 2^x$ ve $y = (0.5)^x$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki Şekilde gösterilmiştir. Her iki durumda da tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve görüntü kümesi $(0, \infty)$ dir.



(a) $y = 2^x$



(b) $y = (0.5)^x$


$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$\left(\frac{1}{4}\right)^x$
y
10^x
4^x
2^x
1.5^x
1^x
0
1
x

Üstellik Kuralları

$a, b > 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ gerçel sayılar olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir.

1. $a^{x+y} = a^x a^y$.
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
3. $(a^x)^y = a^{xy}$.
4. $(ab)^x = a^x b^x$.

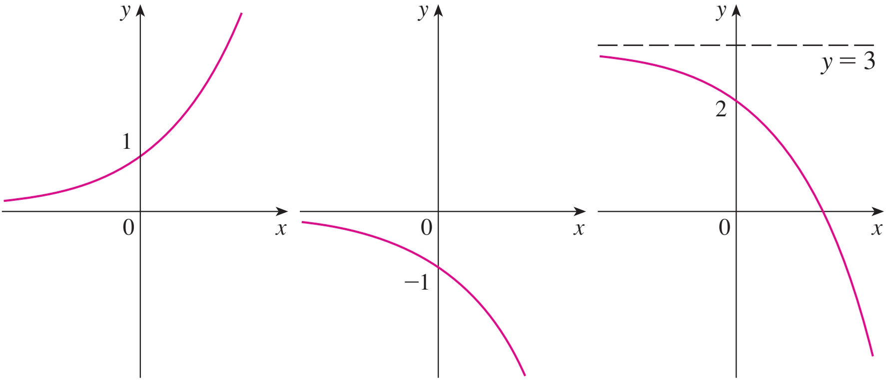
Örnek 1

$y = 3 - 2^x$ foksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.

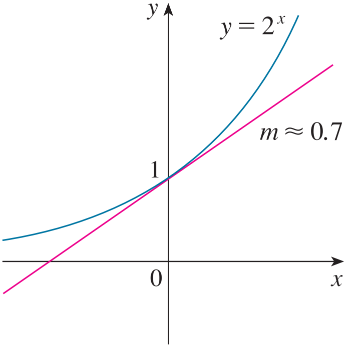
Önce $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini $x-$ekseninde yansıtarak $y = -2^x$ nin grafiğini buluruz. Sonra da bu grafiği yukarı doğru 3 birim kaydırarak $y = 3 - 2^x$ nin grafiğini buluruz.

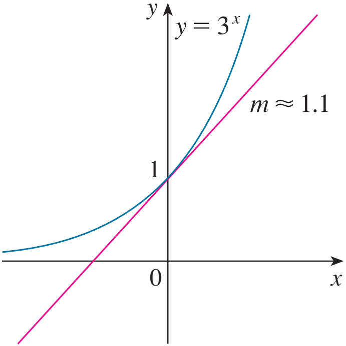
Çözüm (devamı).



e Sayısı

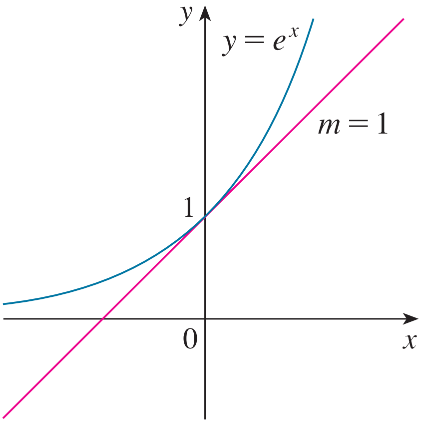
Tabanlar arasında a sayısının seçimi $y = a^x$ fonksiyonunun $y-$eksenini nasıl kestiği ile ilgilidir. Şekilde $y = 2^x$ ve $y = 3^x$ foksiyonlarının grafiklerine $(0,1)$ noktasında çizilen teğet doğruları gösterilmektedir.



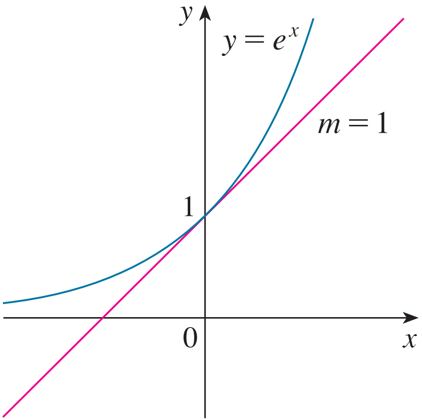


Bu teğet doğrularının eğimlerini ölçersek $y = 2^x$ için $m \approx 0.7$'yi, $y = 3^x$ için $m \approx 1.1$'i buluruz.

Kalkülüsteki bazı formüller, taban sayısı a olmak üzere $y = a^x$ grafiğine $(0, 1)$ noktasında çizilen teğet doğrusunun eğimi tam 1 olacak şekilde seçildiğinde çok kolaylaşacaktır.



Gerçekten böyle bir sayı vardır ve e harfi ile gösterilir.[1] e sayısının 2 ve 3 arasında, $y = e^x$ fonksiyonunun grafiğinin de $y = 2^x$ ile $y = 3^x$ arasında kalması şaşırtıcı olmamalıdır.



[1]Bu gösterim ilk kez İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından 1727 yılında, muhtemelen, üstel anlamına gelen **exponential** kelimesinin ilk harfi e olduğu için kullanılmıştır.

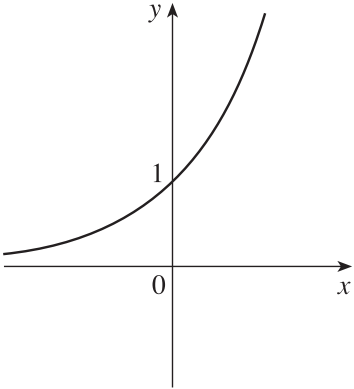
Örnek 2

$y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Ayrıca, tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

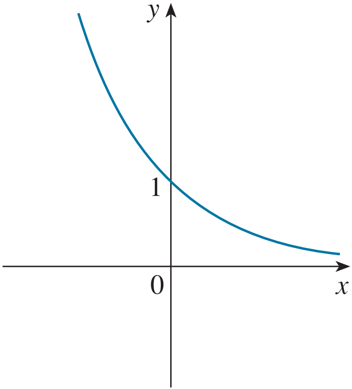
Çözüm.

$y = e^x$ fonksiyonunun gradiğini $y-$eksenine göre yansıtarak, $y = e^{-x}$ grafiğini elde ederiz. Bu grafiği, düşey yönde 2 oranında sıkıştırarak $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ grafiğini buluruz. Son olarak, grafiği aşağı doğru 1 birim kaydırarak istenen grafiği elde ederiz. Tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi ise $(-1, \infty)$ aralığıdır.

Çözüm (devamı).

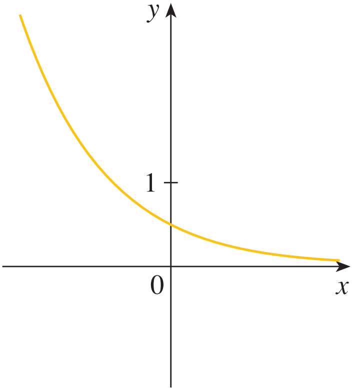


(a) $y = e^x$

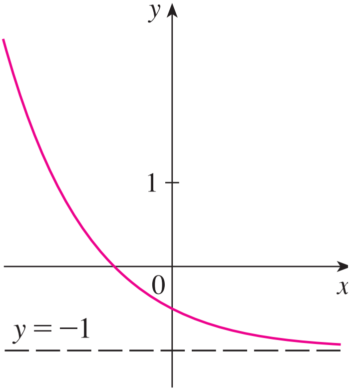


(b) $y = e^{-x}$

Çözüm (devamı).



(c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$



(d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

Logaritma Fonksiyonları

$a > 0$ ve $a \neq 1$ için, $f(x) = a^x$ fonksiyonu artan ya da azalan olduğundan (**Yatay Doğru Ölçütü** gereğince) bire-birdir.

Bu nedenle, tersi olan f^{-1} vardır. Bu fonksiyona a **tabanına göre logaritma fonksiyonu** adı verilir ve $\log_a$ ile gösterilir.

Ters fonksiyon için

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

koşulunu kullanırsak

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

elde ederiz.

Bu nedenle, $x > 0$ için $\log_a(x)$, a tabanının x sayısını vermesi için gerekli olan üssüdür.
Örneğin, $10^{-3} = 0.001$ olduğundan $\log_{10}(0.001) = -3$'tür.

Yok etme kuralları $f(x) = a^x$ ve $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ fonksiyonları için kullanılırsa

$$\log_a(a^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0$$

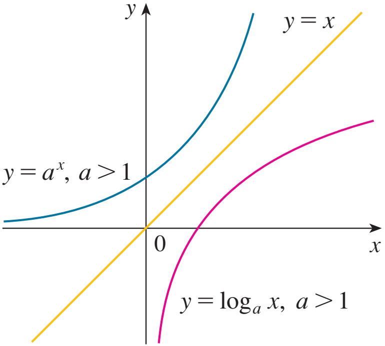
elde edilir.

Özel olarak, $x = 1$ alırsak

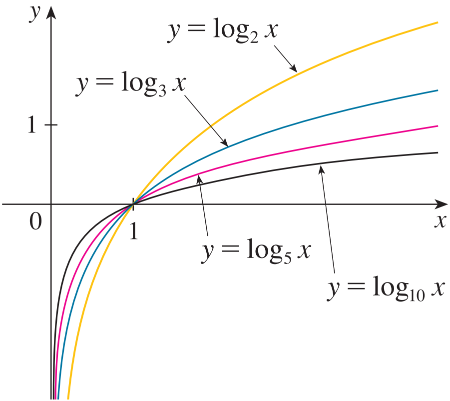
$$\log_a(a) = 1$$

elde ederiz.

$\log_a x$ logaritma fonksiyonunun tanım kümesi $(0, \infty)$, görüntü kümesi ise $\mathbb{R}$'dir. Grafiği ise $y = a^x$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre yansımasıdır.



Şekil $a > 1$ için bir örnektir. (En önemli logaritma fonksiyonlarının tabanı için $a > 1$'dir.)



$x > 0$ için $y = a^x$ fonksiyonu çok hızlı artan bir fonksiyon olduğundan, $x > 1$ değerleri için $y = \log_a(x)$ fonksiyonu çok yavaş artan bir fonksiyondur.

Şekilde a sayısının farklı değerleri için $\log_a(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmektedir.
$\log_a(1) = 0$ olduğundan tüm logaritma fonksiyonlarının grafikleri $(1, 0)$ noktasından geçerler.

Logaritma Kuralları

$x, y > 0$ ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
3. $\log_a\left(x^r\right) = r\log_a(x)$.

Örnek 3

Logaritma kuralları ile $\log_2 80 - \log_2 5$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm.

2. Kuralı kullanarak

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

elde ederiz, çünkü $2^4 = 16$ dir. □

Doğal Logaritma

e tabanına göre logaritmaya **doğal logaritma** denir ve

$$\log_e x = \ln x$$

biçiminde özel bir gösterime sahiptir.

Doğal logaritma fonksiyonunu tanımlayan özellikler

$$\ln x = y \iff e^y = x \tag{1}$$

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0 \tag{2}$$

biçimindedir.

Özel olarak, $x = 1$ alırsak

$$\ln e = 1$$

elde ederiz.

Herhangi bir pozitif a sayısı için

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad a > 0,\, a \neq 1$$

eşitliği geçerlidir.

Örnek 4

$\ln(x) = 5$ ise x sayısını bulunuz.

Çözüm 1.

Denklem (1) dan

$$\ln x = 5 \quad \text{iken} \quad e^5 = x$$

olduğunu görürüz. Bu nedenle $x = e^5$ dir. $\square$

Çözüm 2.

$$\ln x = 5$$

denklemi ile başlayıp, her iki tarafı e sayısının üstel fonksiyonu olarak yazarsak

$$e^{\ln x} = e^5$$

elde ederiz. Burada denklem (2) deki ikinci yok etme kuralı $e^{\ln x} = x$ olduğunu söyler. Bu nedenle $x = e^5$ olur. $\square$

Örnek 5

$e^{5-3x} = 10$ denklemini çözünüz.

Çözüm.

Her iki tarafın doğal logaritmasını alıp denklem (2) yi kullanırsak:

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \frac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

elde edilir.
Doğal logaritmanın değerini bilimsel hesap makinesi kullanarak hesaplayıp çözümü dört basamakta yaklaşık olarak $x \approx 0.8991$ şeklinde yazabiliriz. $\square$

Örnek 6

$\ln a + \dfrac{1}{2}\ln b$ toplamını bir sayının logaritması olarak ifade ediniz.

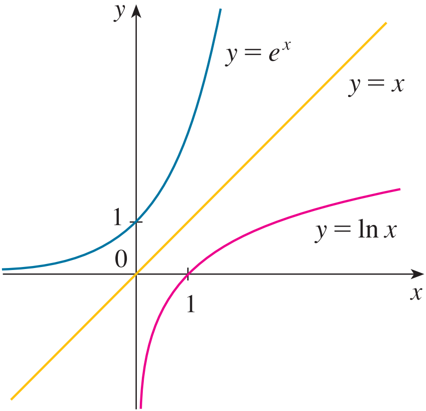
Çözüm.

Logaritma kurallarından 1 ve 3 ü kullanarak

$$\begin{aligned}\ln a + \frac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln \sqrt{b} \\ &= \ln(a\sqrt{b})\end{aligned}$$

elde ederiz. □

Üstel fonksiyon $y = e^x$'in ve tersi doğal logaritma fonksiyonunun grafikleri Şekil 1 da gösterilmiştir. $y = e^x$ eğrisi, $y-$eksenini 1 eğimle kestiğinden $y = \ln(x)$ eğrisi, x-eksenini 1 eğimle keser.



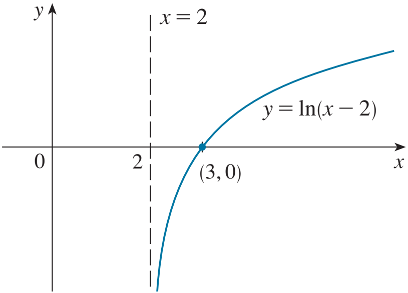
Şekil 1:

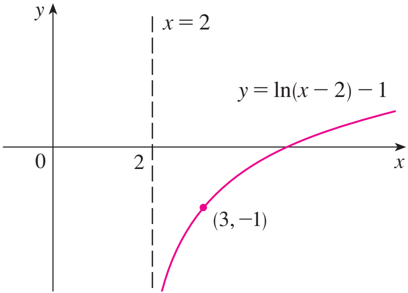
Örnek 7

$y = \ln(x-2) - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.

$y = \ln x$ fonksiyonunun Şekil 1 da verilen grafiği ile başlayalım. Dönüşümleri kullanarak 2 birim sağa kaydırıp $y = \ln(x-2)$ fonksiyonunun grafiğini ve 1 birim aşağı kaydırarak da $y = \ln(x-2) - 1$ fonksiyonunun grafiğini elde ederiz. $\square$





Artan bir fonksiyon olan $\ln(x)$, $x > 1$ değerleri için çok yavaş artar. Bu gerçeği görmek için $y = \ln(x)$ ve $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ fonksiyonlarının grafikleri Şekilde verilmiştir. Başlangıçta iki fonksiyon da benzer davranış gösterirken daha sonra kök fonksiyonunun logaritmadan daha hızlı büyüdüğü görülmektedir.