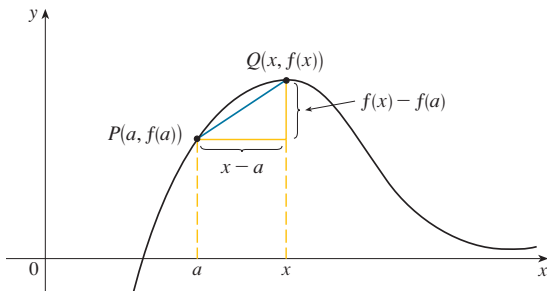


# Teğetler, Hızlar ve Diğer Değişim Hızları

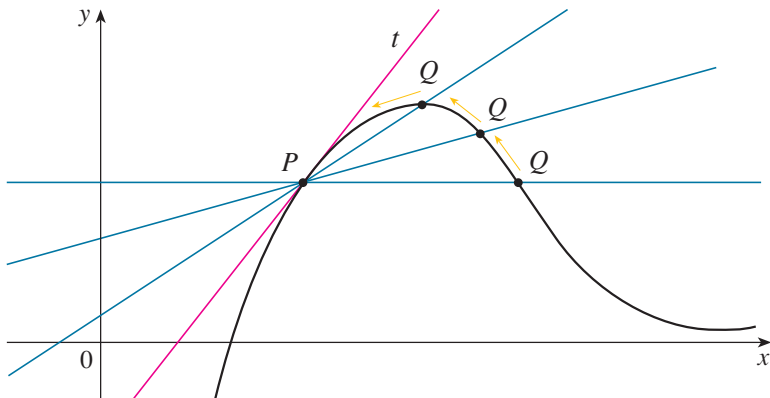
## Teğetler

Bir  $C$  eğrisi,  $y = f(x)$  denklemi ile verilmiş olsun.  $C$  eğrisinin  $P(a, f(a))$  noktasındaki teğetini bulmak istersek  $P$ 'nin yakınındaki  $x \neq a$  koşulunu sağlayan bir  $Q(x, f(x))$  noktasını alarak  $PQ$  kiriş doğrusunun eğimini hesaplarız.



$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$x$  değeri  $a$ 'ya yaklaştıkça  $Q$  noktası da eğri üzerinden  $P$  noktasına yaklaşacaktır. Eğer  $m_{PQ}$  bir  $m$  sayısına yaklaşırsa  $t$  teğetini  $P$ 'den geçen ve eğimi  $m$  olan doğru olarak tanımlarız. Bu, teğet doğrusunun,  $Q$  noktası ve  $P$ 'ye yaklaşıırken  $PQ$  kiriş doğrularının limit durumu olduğunu söylemek demektir.



## Tanım 1

Eğer aşağıdaki limit varsa  $y = f(x)$  eğrisinin  $P(a, f(a))$  noktasındaki **teğet doğrusu**,  $P(a, f(a))$  noktasından geçen ve eğimi

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

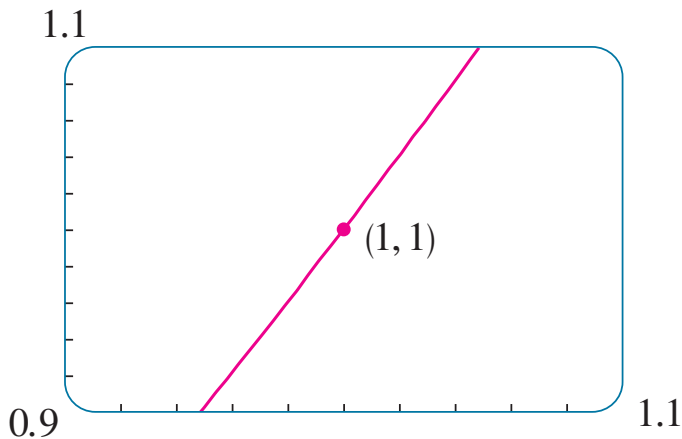
olan doğrudur.

Bir eğrinin bir noktasındaki teğetin eğimini, **eğrinin o noktadaki eğimi** olarak da adlandırırız. Bunun ardındaki fikir, eğrinin üzerindeki noktaya yeterince odaklanıldığında eğrinin adeta bir doğru gibi görünmesidir.

Şekilde bu işlem  $y = x^2$  eğrisi için gösterilmektedir.

Ne kadar çok odaklanılırsa parabol o kadar çok bir doğruya benzemektedir.

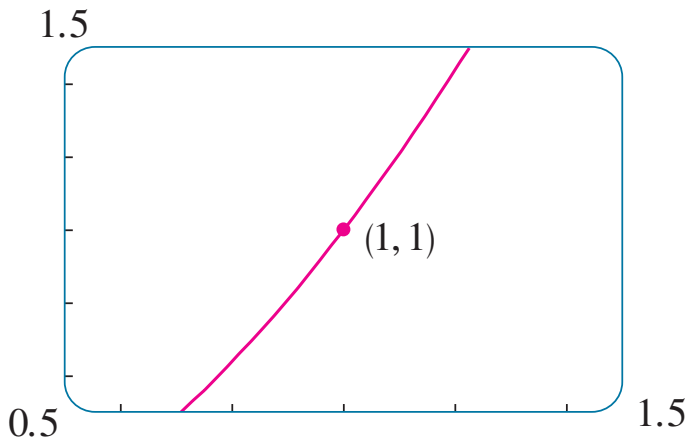
Başka bir deyişle, eğri adeta teğet doğrusundan ayırt edilemez hale gelmektedir.



Şekilde bu işlem  $y = x^2$  eğrisi için gösterilmektedir.

Ne kadar çok odaklanılırsa parabol o kadar çok bir doğruya benzemektedir.

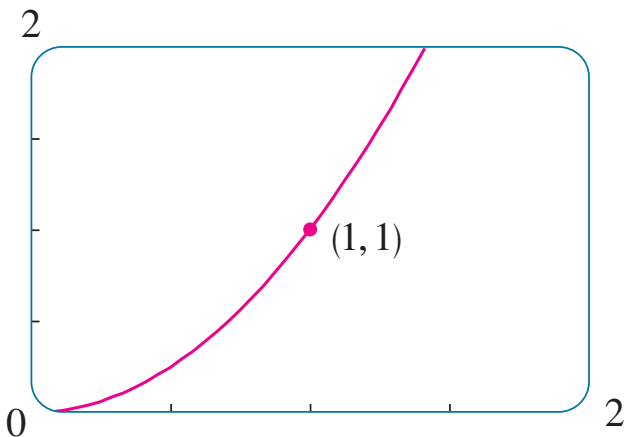
Başka bir deyişle, eğri adeta teğet doğrusundan ayırt edilemez hale gelmektedir.



Şekilde bu işlem  $y = x^2$  eğrisi için gösterilmektedir.

Ne kadar çok odaklanılırsa parabol o kadar çok bir doğruya benzemektedir.

Başka bir deyişle, eğri adeta teğet doğrusundan ayırt edilemez hale gelmektedir.



Teğet doğrusunun eğimi için bazı durumlarda kullanımı daha kolay olan bir başka ifade vardır.  $h = x - a$  olsun.  $x = a + h$

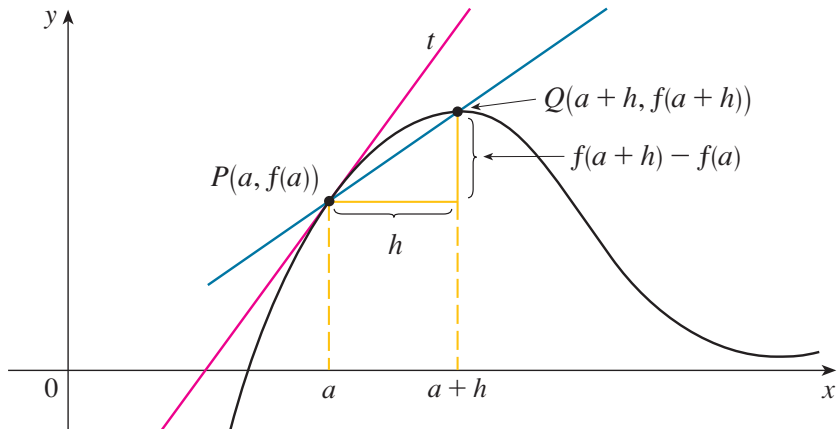
$$h = x - a$$

olsun. O zaman,

$$x = a + h$$

olur. Dolayısıyla,  $PQ$  kiriş doğrusunun eğimi aşağıdaki gibidir.

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



Şekilde  $h > 0$  durumu gösterilmiştir ve  $Q$ ,  $P$ 'nin sağındadır.  $h < 0$  durumunda  $Q$ ,  $P$ 'nin solunda olmalıdır.

$x$ ,  $a$ 'ya yaklaştıkça  $h$ 'nin de  $0$ 'a yaklaştığına dikkat ediniz çünkü  $h = x - a$ 'dır. Dolayısıyla, tanımdaki teğet doğrusunun eğiminin ifadesi

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

biçimine dönüşür.

## Örnek 2

$y = x^2$  parabolünün  $P(1, 1)$  noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

### Çözüm.

$a = 1$  ve  $f(x) = x^2$  olduğundan, eğim

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

dir. Doğru denkleminin nokta-eğim biçimini kullanarak,  $(1, 1)$  noktasındaki teğet doğrusunun denkleminin

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ya da } y = 2x - 1$$

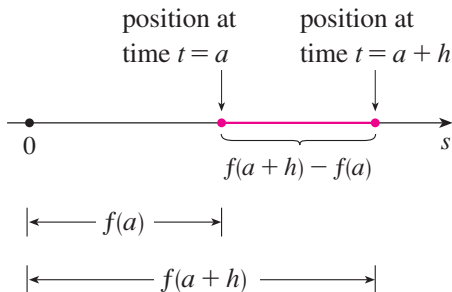
olduğunu buluruz.



# Hızlar

Genel olarak,  $s = f(t)$ , hareket denklemi uyarınca bir doğru boyunca hareket eden bir cisim düşünelim. Burada  $s$ , cismin başlangıç noktasındaki başlayarak (yönü de dikkate alan) yer değiştirmesini gösterebilir.

Hareketi tanımlayan  $f$  fonksiyonuna cismin **konum fonksiyonu** denir.

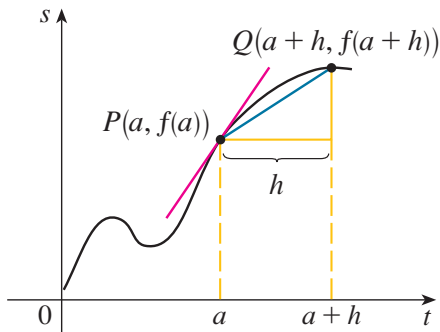


$t = a$  ile  $t = a + h$  arasındaki zaman aralığında konumdaki değişim,  $f(a+h) - f(a)$  olur.

Bu zaman aralığındaki ortalama hız

$$\text{ortalama hız} = \frac{\text{yerdeğiştirme}}{\text{zaman}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ile ifade edilir ve Şekildeki  $PQ$  kiriş doğrusunun eğimi ile aynıdır.



$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{ortalama hız}$$

Şimdi ortalama hızları, daha da kısa  $[a, a + h]$  zaman aralıklarında hesapladığımızı varsayalım. Başka bir deyişle,  $h$  sifıra yaklaşsın.  $t = a$  anındaki  $v(a)$  hızını (ya da **anlık** hızı bu ortalama hızların limiti olarak tanımlarız:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

Bu,  $t = a$  anındaki hızın,  $P$  deki teğet doğrusunun eğimine eşit olduğu anlamına gelir.