TÜREV

Türevin Tanımı : Bir fonksiyonun anlık değişim oranına türev denir.

$f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y' ile gösterilebilir.

Türev Alma Kuralları :

* $y = x^n$ ise $y' = n \cdot x^{n-1}$ (Dereceyi başa at). $x^{\text{(dereceyi 1 eksilt)}}$

* $k \in \mathbb{R}$; $y = k$ ise $y' = 0$ (Sabit sayının türevi 0'dır)

* $y = \sqrt{x}$ ise $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Toplam – Farkın Türevi :

* $y = f(x) + g(x)$ ise $y' = f'(x) + g'(x)$

* $y = f(x) - g(x)$ ise $y' = f'(x) - g'(x)$

Ayrı ayrı türevleri alınır.

Çarpım – Bölüm Türevi :

* $y = \underbrace{f(x)}_{\text{birinci}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{ikinci}} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Birincinin türevi . ikinci + birinci . ikincinin türevi

* $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$\frac{\text{Payın türevi} \cdot \text{Payda} - \text{pay} \cdot \text{Paydanın türevi}}{\text{paydanın karesi}}$$

Anlık değişim oranı :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Pay kısmındaki f ler silindiğinde pay ve paydada aynı ifade kalırsa, türevini al anlamına gelir.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h} = 5 \cdot f'(2)$$

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi :

* $y = \sin x$ ise $y' = \cos x$
* $y = \cos x$ ise $y' = -\sin x$
* $y = \tan x$ ise $y' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
* $y = \cot x$ ise $y' = -(1+\cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

Üstel Fonksiyonun Türevi :

* $y = a^x$ ise $y' = a^x \cdot \ln a$

$y = e^x$ ise $y' = e^x$

Logaritma Fonksiyonunun Türevi :

* $y = \ln x$ ise $y' = \dfrac{1}{x}$

$y = \log_a x$ ise $y' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

logaritma özelliğinden ; $\log_a x = \dfrac{\log_e x}{\log_e a} = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Bileşke Fonksiyonunun Türevi :

* $y = (f o g)(x)$ ise $y' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{f nin türevi içini aynen yaz.}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{içinin türevi}}$

$f(g(x))$ in türevi

$y = (f o g)(x)$ in türevi alınırken, $(f o g)(x)$ kolay bulunabiliyorsa, kural kullanmadan da türevi alınabilir. $(f o g)(x)$'i bul ve türevini al.

Çarpı içinin türevi :

* $y = f^n(x)$ ise $y' = \underbrace{n \cdot f^{n-1}(x)}_{\text{Derecenin türevi}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{içinin türevi}}$

(Dereceyi başa at • dereceyi 1 eksilt)

* $y = \sqrt{\underbrace{f(x)}_{iç}}$ ise $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) \Rightarrow \dfrac{\text{içinin türevi}}{2 \cdot \text{aynısı}}$

* $y = \sin(f(x))$ ise $y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

* $y = \cos(f(x))$ ise $y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$

* $y = \tan(f(x))$ ise $y' = (1 + \tan^2 f(x)) \cdot f'(x)$

$$= \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$$

* $y = \cot(f(x))$ ise $y' = -(1 + \cot^2 f(x)) \cdot f'(x)$

$$= -\frac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x)$$

* $y = a^{f(x)}$ ise $y' = \underbrace{a^{f(x)}}_{\text{aynen yaz}} \cdot \underbrace{\ln a}_{\ln(\text{taban})} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{içinin türevi}}$

* $y = e^{f(x)}$ ise $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
* $y = \ln(f(x))$ ise $y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
* $y = \log_a(f(x))$ ise $y' = \left(\frac{\ln f(x)}{\ln a}\right)' \rightarrow \frac{1}{f(x).\ln a} \cdot f'(x)$

$y = \sqrt[3]{f(x)}$ ise $y' = (f(x))^{1/3}$ şeklinde yazılıp türevi alınmalıdır.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot [f(x)]^{\frac{1}{3}-1} \cdot f'(x)$$
$$= \frac{1}{3[f(x)]^{2/3}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{3 \cdot \sqrt[3]{f^2(x)}} \ //$$

Yüksek Mertebeden Türev :

$y = f(x)$ ise $f'(x)$ (Birinci türev)

$f'(x)$ in tekrar türevi alınırsa, ikinci türev bulunur.

$f''(x)$ veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ ile gösterilebilir.

$f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ (Üçüncü türev)

$f^{(IV)}(x)$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ şeklinde devam edilirse

$\vdots$

$f^{(n)}x$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ (n. mertebeden türev)

Yüksek mertebeden türev alınırken, 1. türev, 2. türev, ... şeklinde sırayla türev alınarak bir kural elde edilmelidir.

Parametrik Fonksiyonların Türevi (Zincir Kuralı)

→ $y = 2x^3 \cdot a^2 \cdot t$ ifadesinde

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \underline{\underline{3x^2}} \cdot a^2 \cdot t$$

y'nin x'e göre türevi
(x'in türevi • diğerleri)

$$\frac{dy}{da} = 2x^3 \cdot \underline{\underline{2a}} \cdot t$$

y'nin a'ya göre türevi

$$\frac{dy}{dt} = 2x^3 \cdot a^2 \cdot \underline{\underline{1}}$$

y'nin t'ye göre türevi

→ $\left.\begin{array}{l} y = u^2 + u \\ u = x^2 - x + 1 \end{array}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}$$

$$= (2u+1) \cdot (2x-1)$$

du'lar sadeleşebildiği için $\frac{dy}{dx}$ bu şekilde yazılabilir. !

→ $\left.\begin{array}{l} y = u^2 + u \\ x = u^3 + 2u + 1 \end{array}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ → paydaya atılırsa

$$= \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$ → x'in u'ya göre türevi

$$= \frac{2u+1}{3u^2+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow$$

parametre istenildiği kadar şeklinde yazılabilir