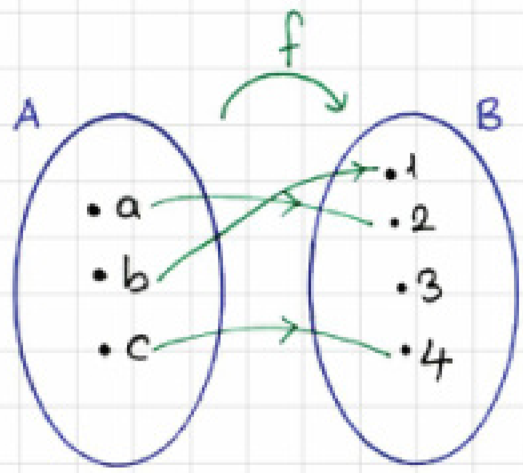
FONKSİYONLAR

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her elemanını B'nin yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya, A dan B ye bir fonksiyon denir.



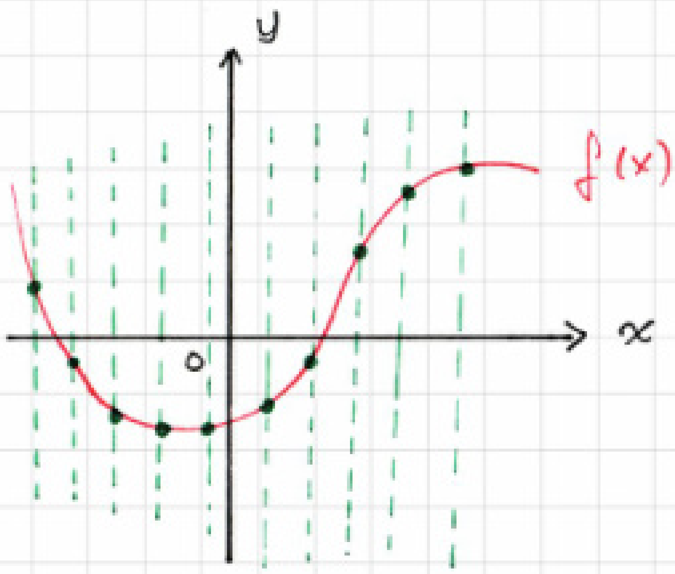
$f : A \rightarrow B$

A : Tanım kümesi = $\{a, b, c\}$

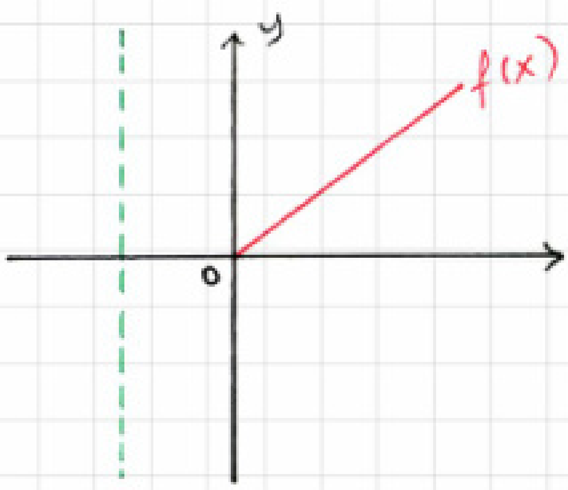
B : Değer kümesi = $\{1, 2, 3, 4\}$

f(A) : Görüntü kümesi = $\{1, 2, 4\}$

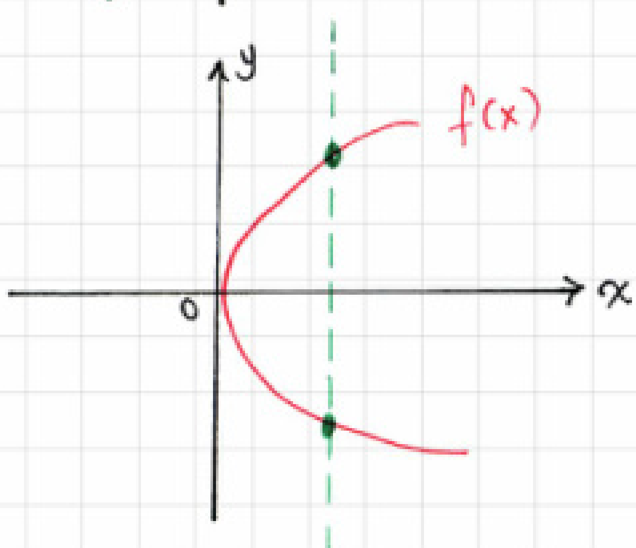
$f(A) \subset B$



y eksenine çizilen paralel doğrular, grafiği her defasında yalnız bir kez kesiyorsa, f(x) fonksiyondur.



$f(x) : R \rightarrow R$ tanımlanırsa, y eksenine çizilen her paralel doğru grafiği kesmek zorundadır. f(x) fonksiyon olmaz.



y eksenine çizilen paralel doğrular, grafiği yalnız bir kez kesmelidir. f(x) fonksiyon değil.

$f(x)$ in verilip $f(a)$ nın bulunması :

※ $f(\underbrace{x}_{\text{iç}}) = \underbrace{2x+1}_{\text{dış}}$ ise $f(2)$ kaçtır ?

içler eşitlenmelidir.

x yerine 2 yazılmalıdır.

※ $f(x-2) = 2x+1$ ise $f(2)$ kaçtır ?

içler eşitlenmelidir.

$$x-2 = 2$$
$$x = 4$$

Verilen fonksiyonda x yerine 4 yazılmalıdır.

※ $f(x-2) = 2x+1$ ise $f(x+1)$ kaçtır ?

içler eşitlenmeli

Verilen fonksiyonda x yerine k yazalım

$$k-2 = x+1$$
$$k = x+3$$

Verilen fonksiyonda k yerine $x+3$ yazılmalıdır.

※ $f(3x^2+4x+5) = 6x^2+8x+1$ ise $f(7) = ?$

iç ile dış karşılaştırılmalıdır.

$$f(\underbrace{3x^2+4x+5}_{x}) = 2(\underbrace{3x^2+4x+5}_{x})-9$$
$$f(x) = 2x-9$$

İç ile dış birbirine benzetilebilirse , işimiz kolaylaşır.

$f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ ise $f(x+2)$ nin $f(x)$ cinsinden değeri sorulursa

$f(x+2) \longrightarrow f(x)$

x yerine rasgele seçilen 2 yazalım

$f(4) \longrightarrow f(2)$

$f(4)=2$
$f(2)=4$

Bu değerleri, verilen $f(x)$ ten bulalım.

$2 \longrightarrow 4$

şıklarda, $f(x)$ in altında çıkan 4 değerini $f(x)$ yerine yazalım. 2 yi veren cevap olacaktır.

Fonksiyonlarda İşlemler

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ ise $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere

* $f+g : A \cap B \to \mathbb{R}$
  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

* $f-g : A \cap B \to \mathbb{R}$
  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

* $f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}$
  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

* $\dfrac{f}{g} : A \cap B \to \mathbb{R}$ $(g(x) \neq 0)$
  $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

* $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere
  $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

* $(f^n)(x) = f^n(x) = (f(x))^n$

Örneğin $(f+g)(2) = f(2) + g(2)$

2 sola dağıtılmalı

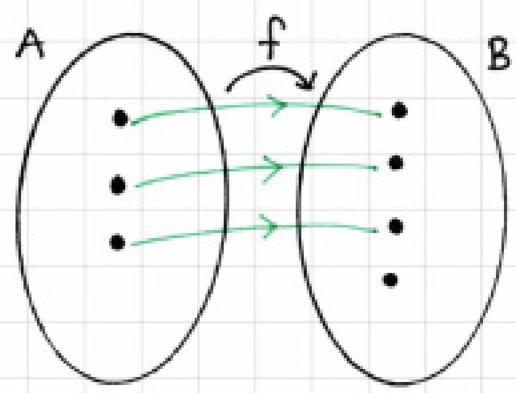
Fonksiyon Çeşitleri :

1) Bire-bir (1-1) Fonksiyon : f fonksiyonunun tanım kümesindeki her eleman farklı elemanlar ile eşleşiyorsa, f(x) 1-1 dır.

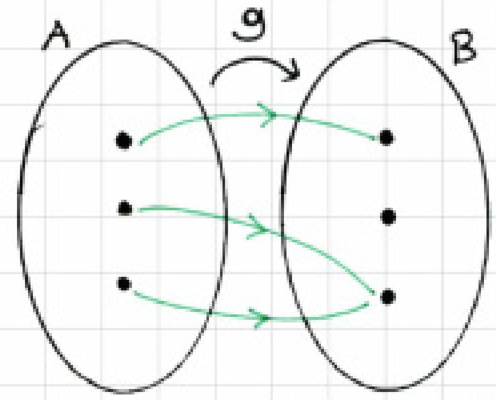
$f: A \to B$

$\forall\ x_1, x_2 \in A \ ; \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\forall\ x_1, x_2 \in A \ ; \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



f, 1-1 dır.

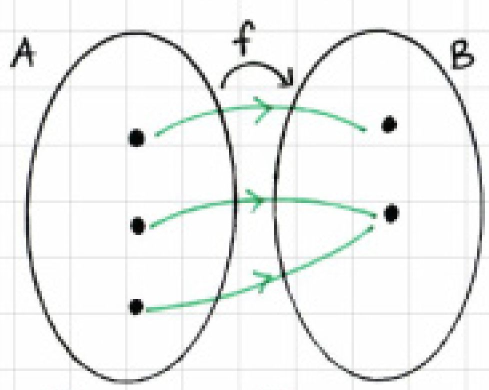


g, 1-1 değildir.

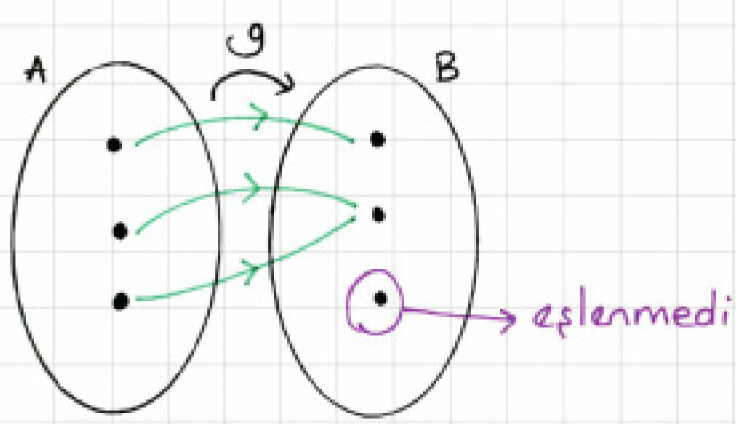
2) Örten Fonksiyon : $f: A \to B$, f, A dan B ye tanımlı bir fonksiyon. f fonksiyonunun görüntüleri, B kümesinin bütün elemanları ise f örtendir.

Örten fonksiyonlarda değer kümesinde açıkta, eşlenmemiş eleman kalmaz.

$f: A \to B$, $f(A) = B$ ise f örtendir



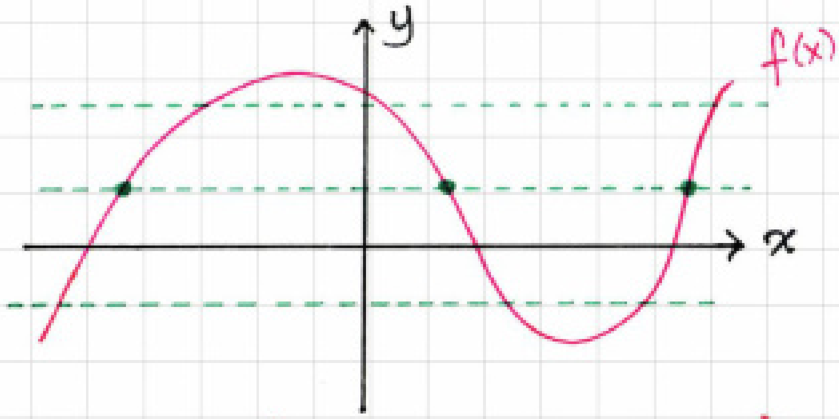
f, örten fonksiyon



g, örten değil

! Örten olmayan fonksiyonlara içine fonksiyon denir.

Grafiği verilen fonksiyonlarda, x eksenine çizilen paralel doğrular fonksiyonun grafiğini daima bir kez kesiyorsa 1-1 dir. En az bir kez kesiyorsa örten fonksiyondur.



Üç kez keserse 1-1 olmaz. Bir kez kesmeli!

1-1 değil (Sadece bir kez kesmeli)
Örten fonksiyon (En az bir kez kesmiş)

NOT! Mutlak değerli ve parabol örten olamaz!!

3) Birim Fonksiyon : Her elemanın görüntüsünü, kendisine götüren fonksiyondur.

En delikanlı fonksiyondur. Tai dışı birdir. ☺

f birim fonksiyon ise $f(x) = x$ tir.
→ Derecesi 1, katsayısı 1

$$f(ax+b) = ax+b$$

$$f(ax^2+bx+c) = ax^2+bx+c$$

4) Sabit Fonksiyon : $f: A \to \{k\}$, her elemanın görüntüsü eşit ise f sabit fonksiyondur.

En saf fonksiyondur. Ne yazarsan yaz sonuç aynıdır. ☺

Sabit fonksiyonda değişken bulunmaz. $f(x)=k \quad (k \in R)$

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyon ise $\boxed{\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}}$ dir.

- Sabit fonksiyonlarda, $f(x)=0$ olan fonksiyonlara sıfır fonksiyonu denir.

5) Doğrusal Fonksiyon : Birinci dereceden değişken içeren fonksiyonlara denir.

$f(x) = ax + b$, doğrusal fonksiyondur.

6) Tek - Çift Fonksiyonlar :

TEK FONKSİYON : $f : A \to R$ $\quad \forall x \in A$; $f(-x) = -f(x)$ ise

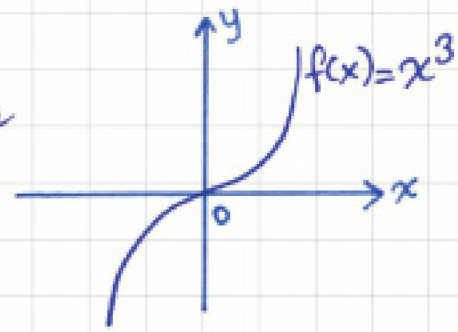
f TEK FONKSİYONDUR

→ Tek fonksiyonlarda tüm kuvvetler tek sayıdır.

→ Tek fonksiyonlar orjine göre simetriktir.

$f(x) = x^3$ tek fonksiyondur.

orjine göre simetrik !



$f(x) = \sin x$
$f(x) = x^3 + x$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \cot x$
tek fonksiyonlar

ÇİFT FONKSİYON : $f : A \to R$ $\quad \forall x \in A$; $f(-x) = f(x)$ ise

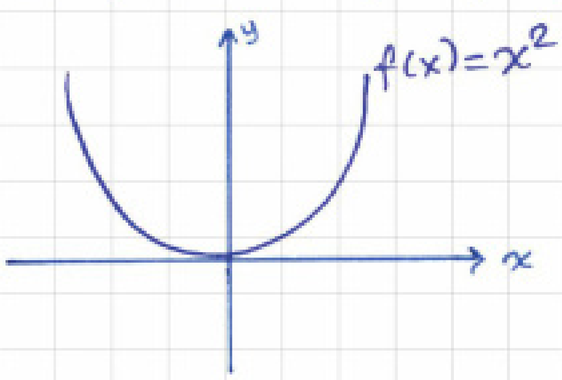
f ÇİFT FONKSİYONDUR

→ Çift fonksiyonlarda tüm kuvvetler çift sayıdır.

→ Çift fonksiyonlar y eksenine göre simetriktir.

$f(x) = x^2$ çift fonksiyondur.

y eksenine göre simetrik !



$f(x) = \cos x$
$f(x) = x^2 + 4$
$f(x) = x \cdot \sin x$
çift fonksiyonlar

⊛ $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ fonksiyonu
NE TEK, NE ÇİFT Fonksiyondur.

FONKSİYON SAYISI

$s(A) = m \quad , \quad s(B) = n$

→ A'dan B'ye tanımlanacak fonksiyon sayısı : n^m dır.

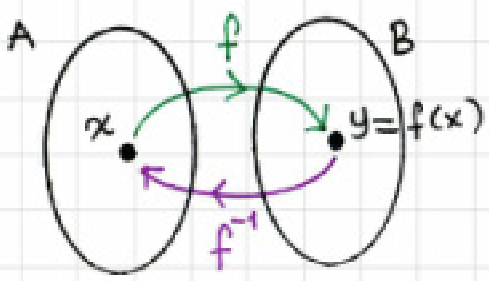
→ 1-1 fonksiyon sayısı : $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

→ 1-1 ve örten fonksiyon sayısı : $m!$

→ Sabit fonksiyonların sayısı : n dır.

TERS FONKSİYON

$f: A \to B$, f birebir ve örten fonksiyon ise f'in tersi vardır. f fonksiyonunun tersi f^{-1} ile gösterilir.



$$\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x)}$$

Tersinin tersi kendisidir.

$f: A \to B \quad , \quad y = f(x)$

$f^{-1}: B \to A \quad , \quad x = f^{-1}(y)$

Fonksiyonun kendisinde y, tersinde x yalnız bırakılır.

⊛ $f(x) = 2x+1$ fonksiyonunun tersini bulalım

$y = 2x+1$ ($f(x)$ yerine y yazalım)

$x = 2y+1$ (x ile y nin yerlerini değiştirelim)

$\dfrac{x-1}{2} = y$ (y yi yalnız bırakalım)

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ (Bulunan y değeri, f^{-1} dir)

⊛ $f(x)=\frac{2x-3}{4}$ fonksiyonunun tersini bulurken, her işlemi tersten yapalım.

4 ile bölünmüş ⟶ 4 ile çarp $\quad 4x$

−3 yerine +3 yaz ⟶ $4x+3$

2 ile çarpılmış ⟶ 2 ile böl $\quad \frac{4x+3}{2}=f^{-1}(x)$

⊛ $f(x)=3x-1$ ise

$f^{-1}(3x-1)=x$ yazılabilir.

$f^{-1}(3)=7$ ise

$f(7)=3$ tür.

⊛ $f(2x+1)=x-2$ ise $f(x)$ i bulabilmek için,

f nin içindeki $2x+1$ in tersini, x yerine yazalım.

$$f\left(2\cdot\frac{x-1}{2}+1\right)=\frac{x-1}{2}-2$$

$$f(x)=\frac{x-1}{2}-2$$

* $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersini bulurken,

Yukarıdan x li, aşağıdan x siz sayılar yer ve işaret değiştirir.

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}}$$

⊛ $f(x)=\frac{2}{3x+5}$ fonksiyonunun tersini bulalım.

$\frac{2+0\cdot x}{3x+5}$ ise $f^{-1}(x)=\frac{2-5x}{3x}$ tır.

(*) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+4}$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{-4x+1}{3x-2}$

$3x+4=0$

$x = -\frac{4}{3}$ paydayı sıfır yapar.

$3x-2=0$

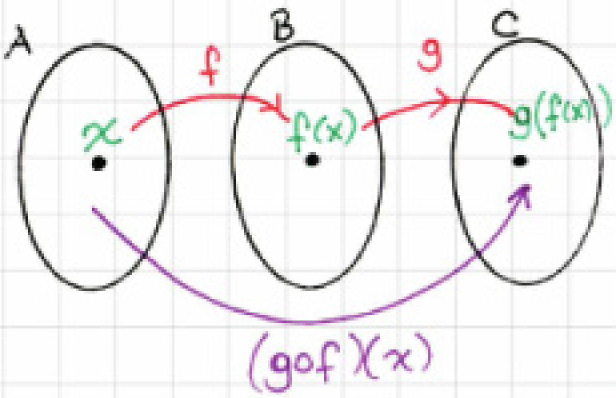
$x = \frac{2}{3}$ paydayı sıfır yapar.

$$f : \underbrace{R - \left\{-\tfrac{4}{3}\right\}}_{\text{Tanım kümesi}} \longrightarrow \underbrace{R - \left\{\tfrac{2}{3}\right\}}_{\text{Görüntü kümesi}}$$

Fonksiyonun görüntü kümesi, tersinin tanım kümesidir. !

Bileşke Fonksiyon

$f: A \to B$, $g: B \to C$ olmak üzere



g'nin tanım kümesi, f'nin değer kümesi (B kümesi) nin bir alt kümesidir. !

$gof : A \to C$

Özellikler :

* $(fog)(x) \neq (gof)(x)$
* $(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = I$ (Birim fonksiyon)
* $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$

- $(fog)(x) = f(g(x))$ [f içinde g anlamına gelir]

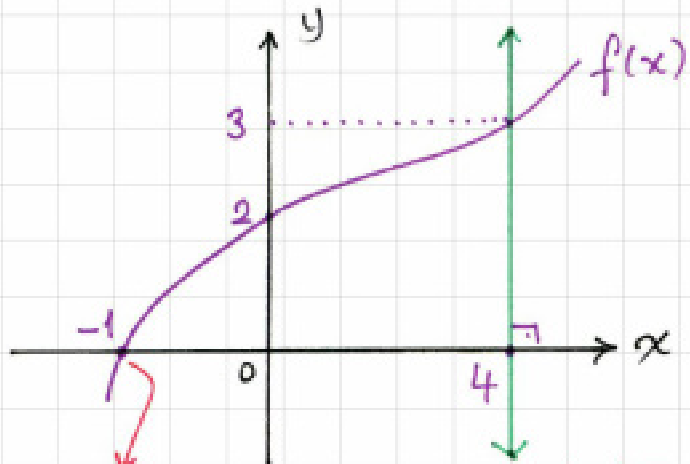
- $f^{-1}(f\circ g)(x) = f^{-1}h(x)$ ise $g(x) = (f^{-1}\circ h)(x)$

eşitliğin iki tarafının solundan fonksiyon yaklaştırılabilir.

- $(f\circ g)(a)$

  → önce $g(a)$ değeri bulunur, çıkan sonuç f içinde bulunur.
  (sağdan başla)

Fonksiyon Grafikleri



x=4 doğrusu

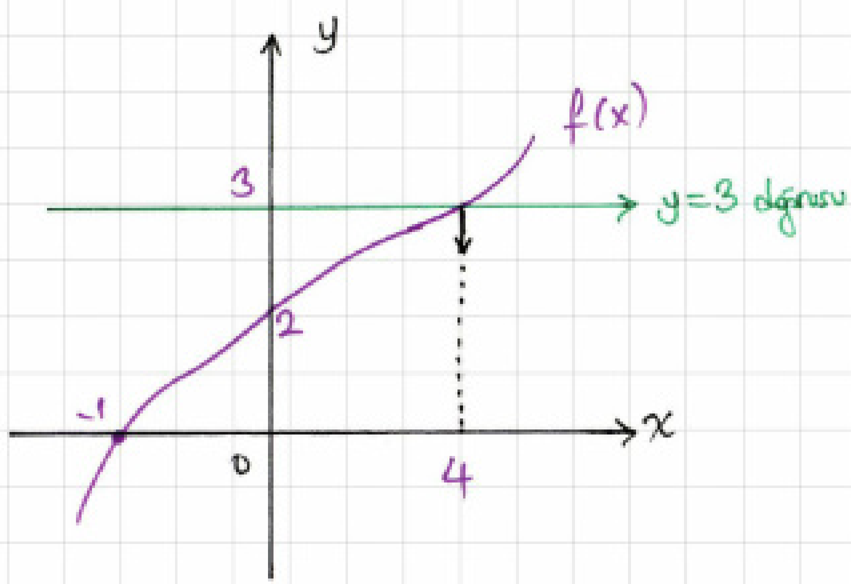
(-1,0) noktasının anlamı f(-1)=0 demektir.

$f(x) = y$ dır.

$f(4)$ bulunurken $x=4$ doğrusu çizilmelidir. Grafiği kestiği noktadaki $y=3$ değeri sonuçtur.

$f(4) = 3$

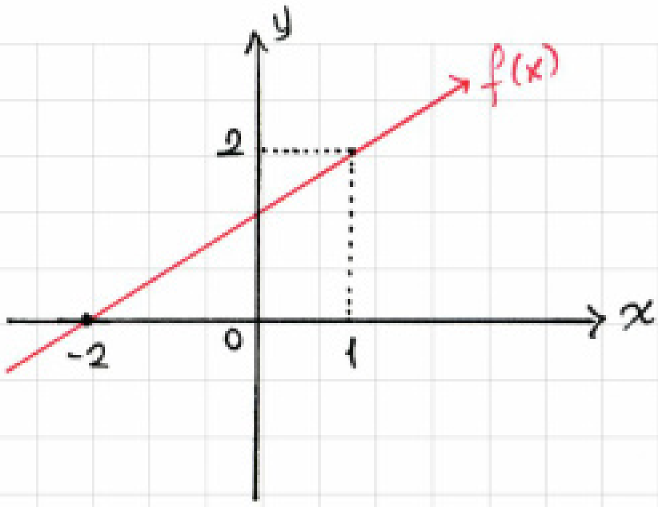
$f(0) = 2$, $f(-1) = 0$



$f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ tir.

$f^{-1}(3)$, bulunurken $y=3$ doğrusu çizilmelidir. Grafiği kestiği noktadaki $x=4$ değeri sonuçtur.

$f^{-1}(3) = 4$

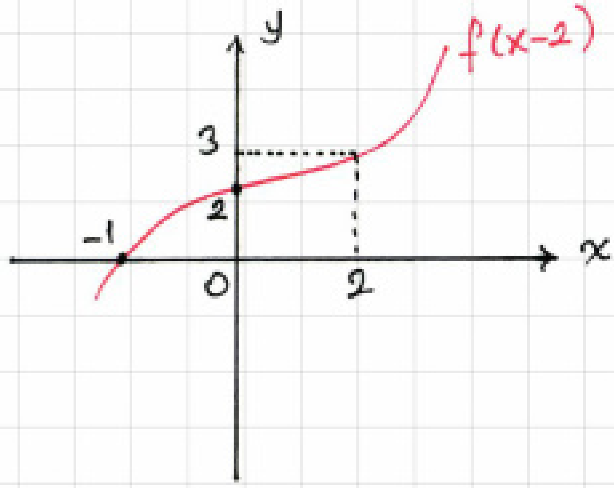


$f(x)$ doğrusal fonksiyondur.

$f(1)=2 \quad f(-2)=0$ dır.

$f(x)=ax+b$ yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} a+b&=2 \\ -2a+b&=0 \end{aligned}\right\}$$



Grafik üzerindeki nokta koordinatları düşünülürse,

(2,3) noktası,
2 yazınca 3 çıkar

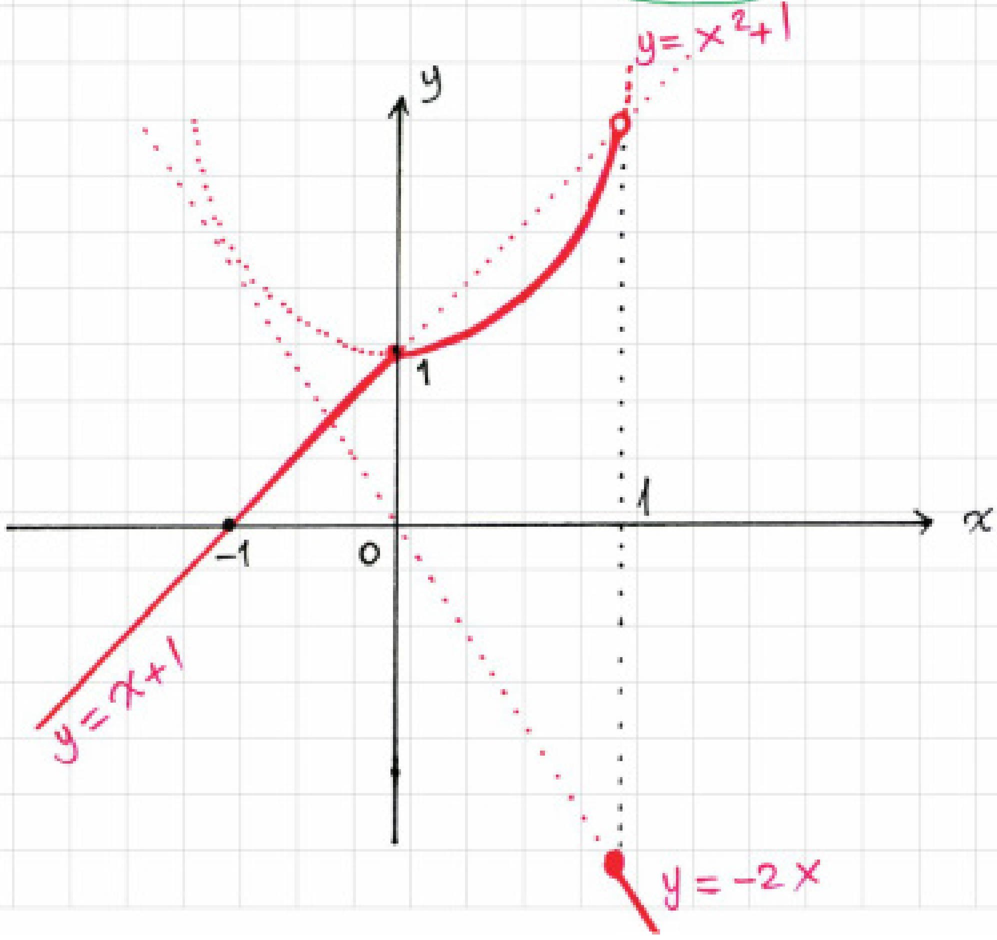
$f(2-2)=3$
$f(0)=3$ tür.

Parçalı Fonksiyon

*

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x^2+1, & 0\leq x<1 \\ -2x, & x\geq 1 \end{cases}$$

→ Burada yazan her sayı kritik noktadır.
$x=0$ ve $x=1$



0'dan küçük sayılarda $y = x+1$ doğrusu geçerlidir.

0 ile 1 arasında $y = x^2+1$ parabolü geçerlidir.

1 den büyük sayılarda $y = -2x$ doğrusu geçerlidir.

(※)
$$f(x) = \begin{cases} 3x+4 , & x < -5 \\ 2x-1 , & x \geq -5 \end{cases}$$ parçalı fonksiyonunda ;

$f(x+5)$ fonksiyonunu bulalım.

Verilen parçalı fonksiyonda, x gördüğümüz her yere $x+5$ yazılmalıdır.

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+5)+4 , & x+5 < -5 \\ 2(x+5)-1 , & x+5 \geq -5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+19 , & x < -10 \\ 2x+9 , & x \geq -10 \end{cases}$$

(※)
$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 , & x < -2 \\ 2x-3 , & x \geq -2 \end{cases}$$

$g(x) = x-1$ fonksiyonları için $(f\circ g)(x)$ bileşke fonksiyonunu bulalım.

$$(f\circ g)(x) = \underbrace{f(g(x))}$$

→ f içinde g(x)
$g(x) = x-1$ fonksiyonunu $f(x)$ parçalı fonksiyonunda x gördüğümüz her yere yazmalıyız.

$$(f\circ g)(x) \begin{cases} (x-1)^2+1 , & x-1 < -2 \\ 2(x-1)-3 , & x-1 \geq -2 \end{cases} = \begin{cases} x^2-2x+2 , & x < -1 \\ 2x-5 , & x \geq -1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , \quad x<4 \\ 2x-3 & , \quad x\geq 4 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$(f+g)(x)$ fonksiyonunu bulalım.

Kritik noktalarımız $x=0$ ve $x=4$ tür.

$(f+g)(x)$ fonksiyonunun kritik noktaları da $x=0$ ve $x=4$ olacaktır.

		0		4	
$f(x)$:	$x+1$		$x+1$		$2x-3$
$g(x)$:	x		x^2		x^2

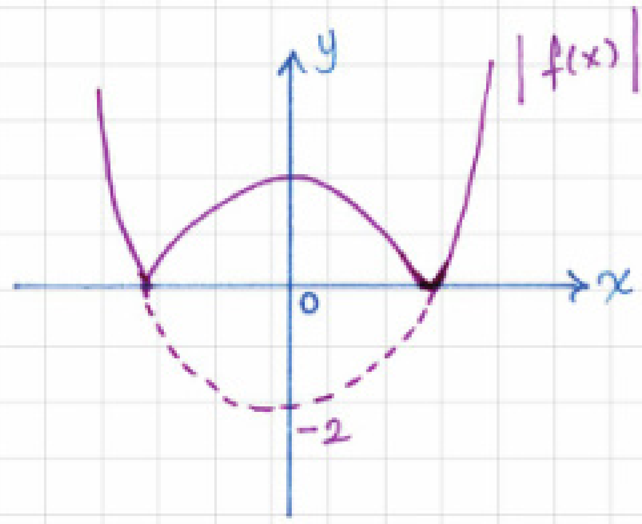
toplanacaktır.

$$(f+g)(x)=\begin{cases} 2x+1 & , \quad x<0 \\ x^2+x+1 & , \quad 0\leq x\leq 4 \\ x^2+2x-3 & , \quad x>4 \end{cases}$$

Mutlak Değer Fonksiyonu

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

⊛ $f(x) = x^2 - 2$ ise



x ekseninin altında kalan kısmın, x eksenine göre simetriği alınır.

⊛ $f(x) = |x-2| + |x+1|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon şeklinde yazalım.

$x - 2 = 0$ ve $x + 1 = 0$

$x = 2$ $\qquad$ $x = -1$

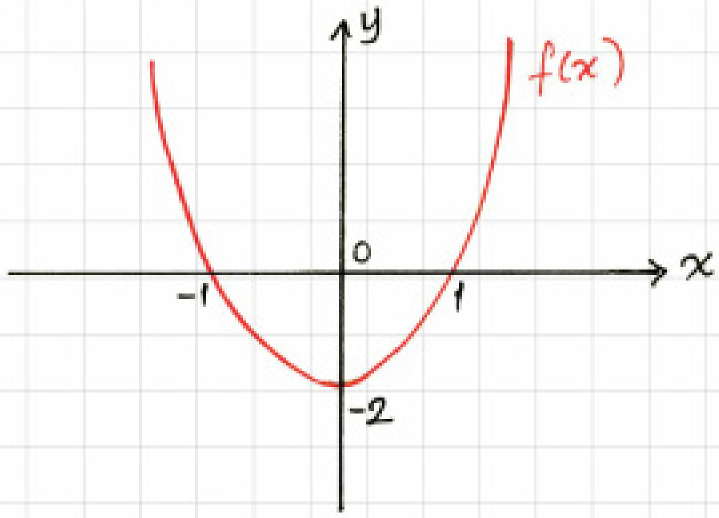
Kritik noktalar

	-1		2	
$-x+2-x-1$		$-x+2+x+1$		$x-2+x+1$
$-2x+1$		3		$2x-1$

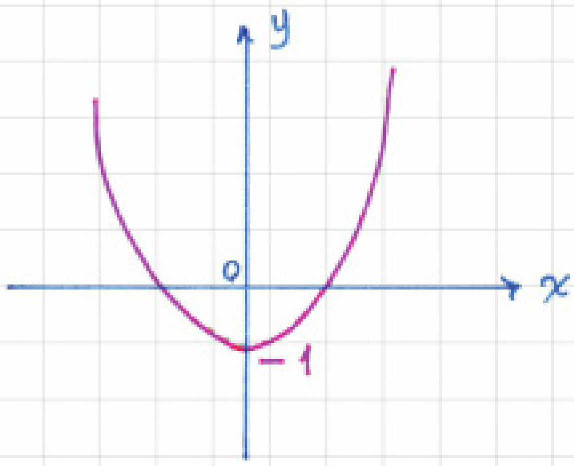
Bu aralıktaki her değer için mutlak değerlerin içi negatiftir. "$-$" ile çarpılıp çıkar.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < -1 \\ 3, & -1 \le x \le 2 \\ 2x-1, & x > \end{cases}$$

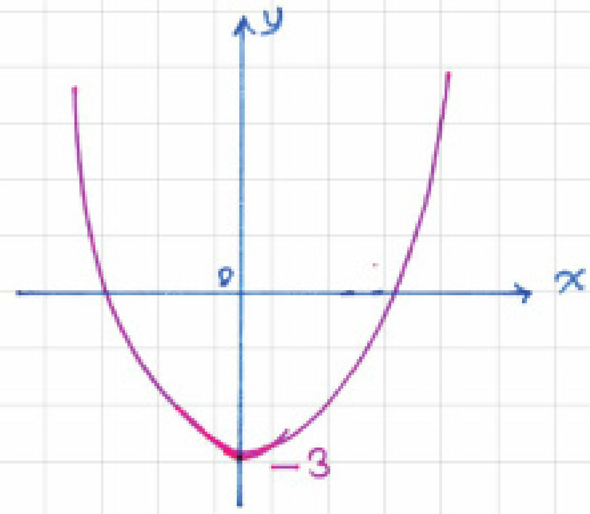
Fonksiyon Grafiğinin Ötelenmesi :



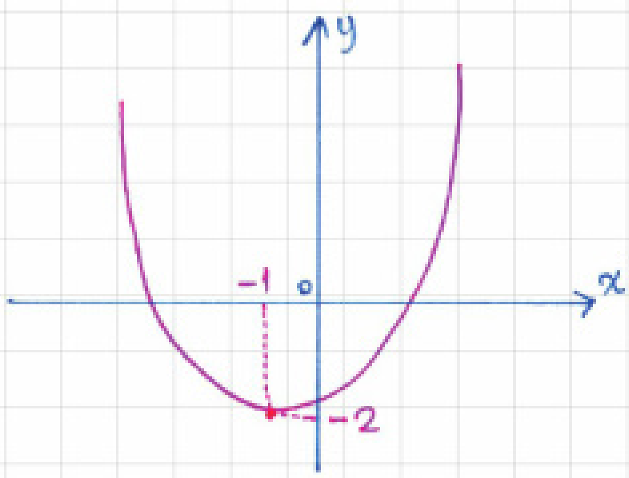
$y = f(x) + 1$
(1 birim yukarı ötele)



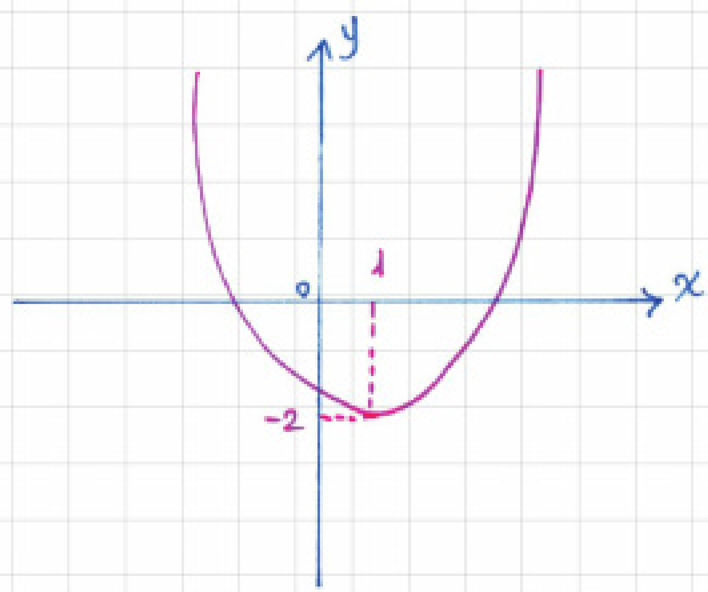
$y = f(x) - 1$
(1 birim aşağı ötele)



$y = f(x+1)$
(1 birim sola ötele)

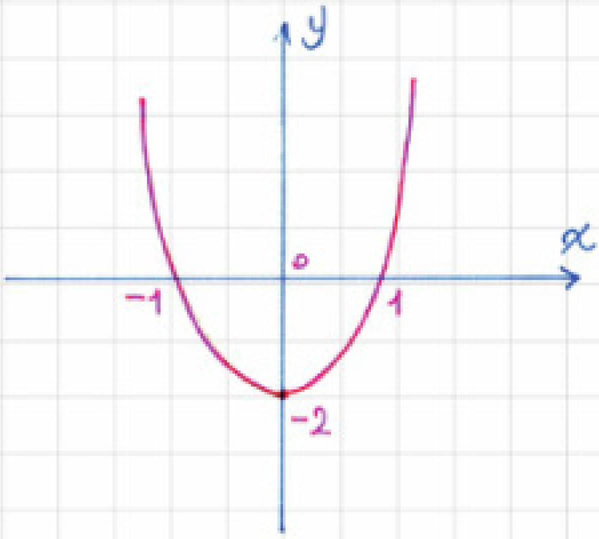


$y = f(x-1)$
(1 birim sağa ötele)



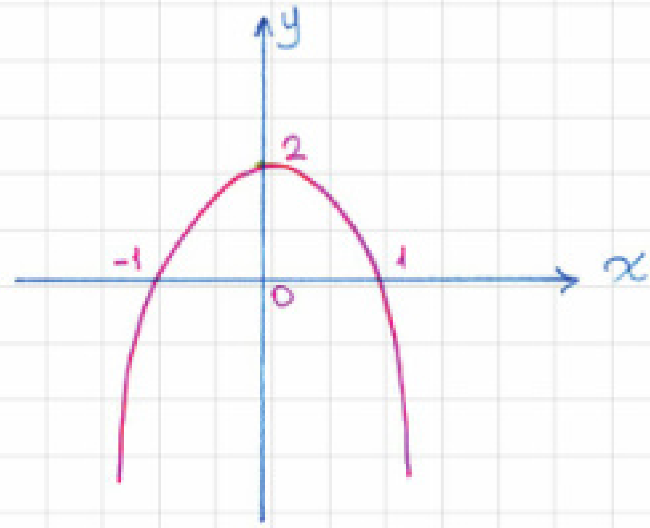
$y = f(-x)$

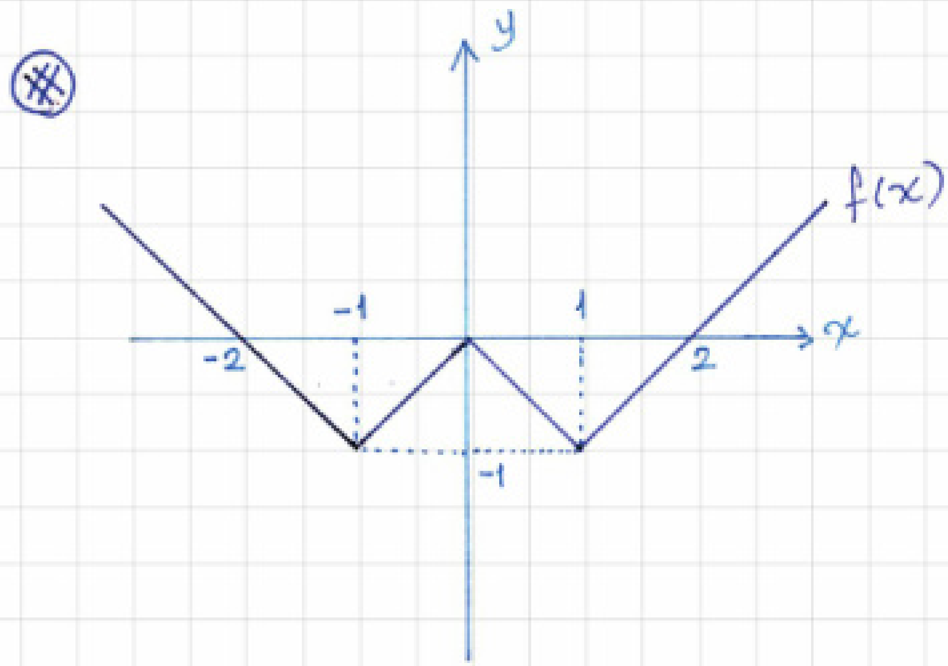
(y eksenine göre simetriğini al)



$y = -f(x)$

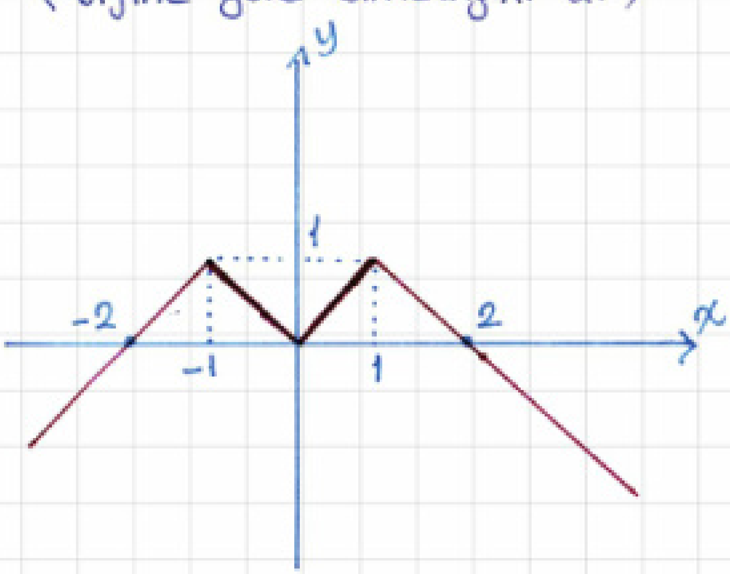
(x eksenine göre simetriğini al)





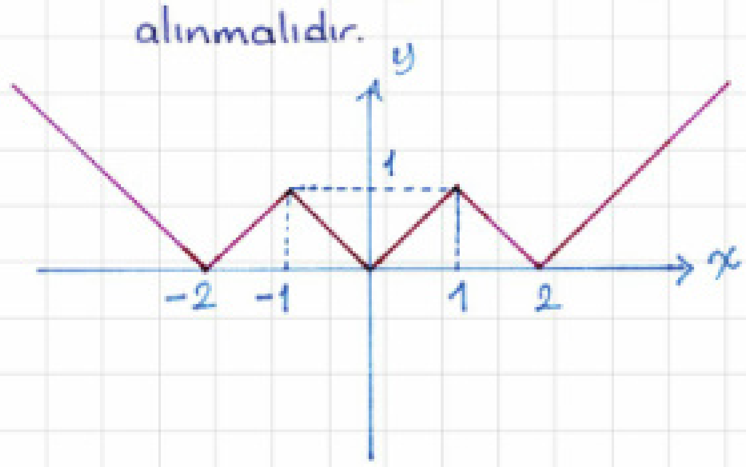
$y = -f(-x)$

(Orjine göre simetriğini al)



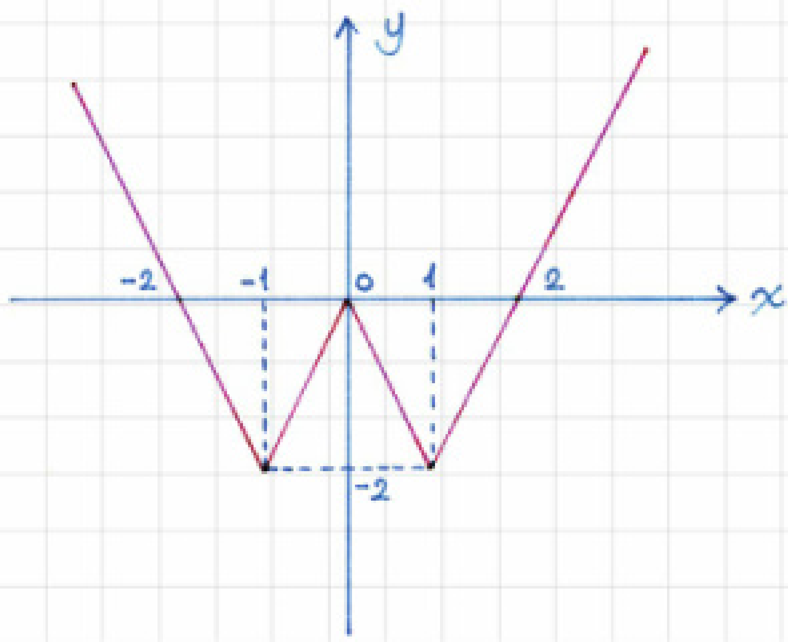
$y = |f(x)|$

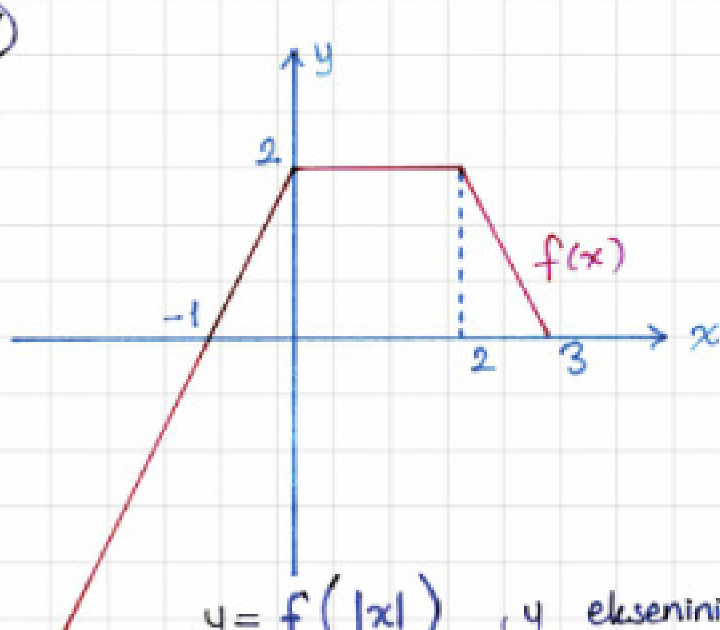
x ekseninin altındaki kısmın x eksenine göre simetriği alınmalıdır.



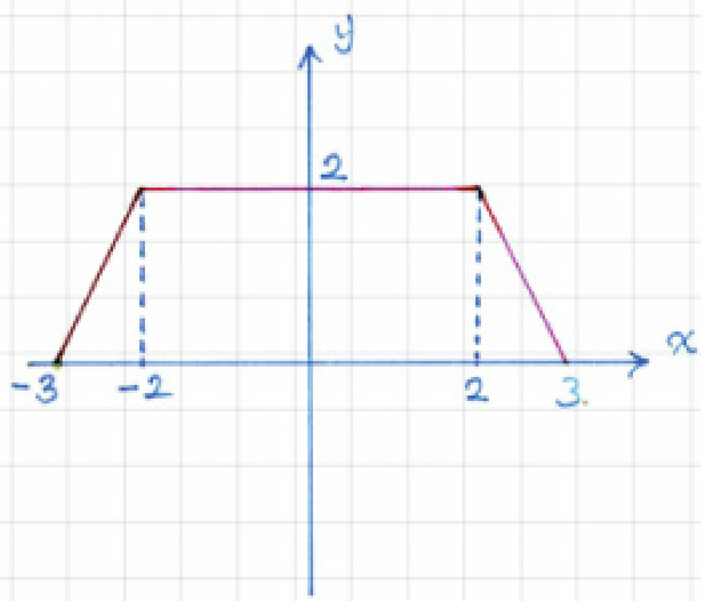
$y = 2f(x)$

(y değerleri 2 ile çarpılmalıdır)



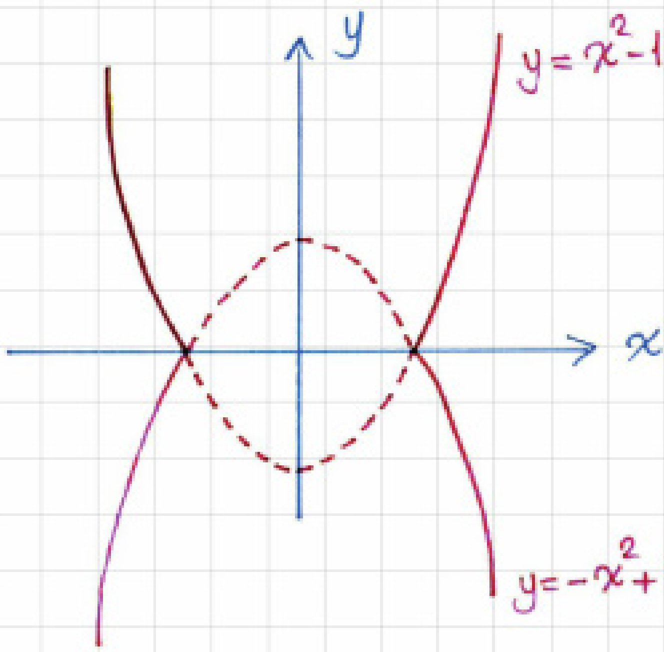


$y = f(|x|)$ y ekseninin sağ tarafı (x'in pozitif değerleri) aynen çizilir. Çizilen kısmın y eksenine göre simetriği alınır.



$|y| = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$y > 0$	$y < 0$
$y = x^2 - 1$	$-y = x^2 - 1 \Rightarrow y = -x^2 + 1$



! $y = f^{-1}(x)$ in grafiği ile $y = f(x)$ in grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.