

III. FONKSİYON ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde, bu fonksiyonun belli başlı bazı özelliklerini türev aracılığı ile belirlemek mümkündür. Bu özelliklerin belirlenmesinde kullanılan bazı teorem ve kavramlar bu bölümde verilecektir.

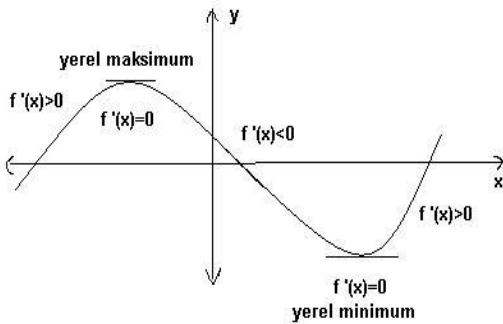
Teorem: 5 $f(x)$ fonksiyonu herhangi bir aralıkta türevlenebilir ve $f'(x) = 0$ ise bu aralıkta $f(x)$ bir sabit fonksiyondur.

Teorem: 6 Herhangi bir (a, b) aralığında sürekli ve türevlenebilir $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta;

- i) $f'(x) > 0$ ise monoton artan
 - ii) $f'(x) < 0$ ise monoton azalan
 - iii) $f'(x) \geq 0$ ise azalmayan
 - iv) $f'(x) \leq 0$ ise artmayan
- bir fonksiyondur.

Teorem 6 bir fonksiyonun monotonluk durumunun incelenmesinde uygulanmaktadır. yani fonksiyonun birinci mertebeden türevi için işaret incelemesi yaparak fonksiyonun monotonluk durumu değerlendirilebilir. Ancak teoremin tersi genellikle doğru değildir.

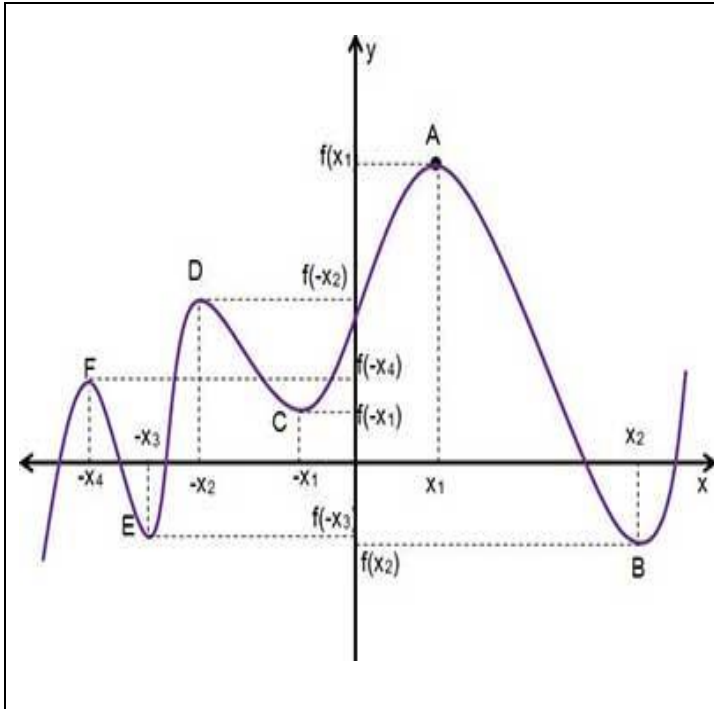
Tanım:7 $y = f(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasında ve bu noktanın herhangi bir komşuluğunda tanımlı olsun. $y = f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu x_0 noktasındaki değeri, bu noktanın herhangi bir komşuluğundaki tüm x 'ler için $f(x) \leq f(x_0)$, [veya $f(x) \geq f(x_0)$] eşitsizliğini sağlıyorsa, x_0 noktasına bu komşulukta fonksiyonun maksimum [veya minimum] noktası, $f(x_0)$ değerine de maksimum [veya minimum] değeri denir.



Açık veya kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun hiçbir maksimum ya da minimum değeri olmayabileceği gibi, böyle bir aralıkta birden fazla, bazen sonsuz sayıda maksimum ve minimum noktası da olabilir. Eğer bu aralıkta fonksiyonun birden fazla maksimum ve minimum noktası varsa, o zaman iki maksimum nokta arasında mutlaka bir minimum nokta ve iki minimum nokta arasında da mutlaka bir maksimum nokta bulunacaktır.

İncelenen aralıkta fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarına ekstremum noktaları, maksimum ve minimum değerlerine ise ekstremum değerleri denir. Ancak; aralığın uç noktaları ekstremum noktaları değildir. Çünkü sol uç noktada fonksiyon soldan ve sağ uç noktada ise sağdan tanımlı değildir. Fonksiyonun bu noktadaki değerlerine sınır değerleri (sınır maksimum ve sınır minimum) denir. Böylece herhangi bir kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyonun ekstremum noktaları varsa, bu noktalar aralığın iç noktaları arasında olmalıdır.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. $\forall x \in (a, b)$ için $f(x) \leq f(x_0)$, [veya $f(x) \geq f(x_0)$] oluyorsa, bu takdirde x_0 noktasına fonksiyonun mutlak maksimum [veya mutlak minimum] noktası, $f(x_0)$ değerine ise fonksiyonun mutlak maksimum (en büyük) [veya mutlak minimum (en küçük)] değeri adı verilir. Mutlak maksimum ve mutlak minimum noktaların kendileri de dahil olmak üzere diğer maksimum ve minimum noktalar yerel maksimum veya yerel minimum nokta olarak adlandırılır. Buna göre her mutlak maksimum ve mutlak minimum nokta aynı zamanda bir yerel maksimum ve yerel minimum noktadır, ama tersi doğru değildir.



Şekle göre $\{-x_4, -x_2, x_1\}$ noktaları fonksiyonun yerel maksimum noktaları iken, $\{f(-x_4), f(-x_2), f(x_1)\}$ noktaları yerel maksimum değerlerdir. Ayrıca; $\{-x_3, -x_1, x_2\}$ noktaları fonksiyonun yerel minimum noktaları iken,

$\{f(-x_3), f(-x_1), f(x_2)\}$ noktaları yerel minimum değerlerdir. Diğer taraftan x_1 noktası mutlak maksimum nokta, $f(x_1)$ ise mutlak maksimum değerdir. Benzer şekilde x_2 mutlak minimum nokta ve $f(x_2)$ mutlak minimum değerdir.

Teorem:7 $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ noktası bir ekstremum noktası olsun. Eğer $f'(x_0)$ varsa, bu takdirde $f'(x_0) = 0$ dir.

Teorem 7'ye göre ekstremum noktasında fonksiyonun türevi ya sıfırdır ya da yoktur. Ancak; teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani, x_0 noktasında fonksiyonun türevinin olmadığı veya sıfıra eşit olduğu durumlarda x_0 noktası ekstremum noktası olmayabilir.. Diğer bir ifadeyle x_0 noktasında fonksiyonun türevinin yokluğu veya sıfıra eşit olması, bu noktanın ekstremum noktası olması için gereklidir, fakat yeterli değildir.

Örneğin; $y = |x|$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ noktasında $f'(x_0) = f'(0)$: yoktur ve $x_0 = 0$ noktası bir ekstremum (minimum) noktasıdır.

$y = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ noktasında $f'(x_0) = f'(0)$: yoktur, ama $x_0 = 0$ noktası bir ekstremum noktası değildir.

$y = (x - 1)^2$ fonksiyonu için $x_0 = 1$ noktasında $f'(x_0) = f'(1) = 0$ dır ve $x_0 = 1$ noktası bir ekstremum (minimum) noktasıdır.

$y = (x - 1)^3$ fonksiyonu için $x_0 = 1$ noktasında $f'(x_0) = f'(1) = 0$ fakat $x_0 = 1$ noktası bir ekstremum noktası değildir.

Tanım:8 $y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu aralıkta fonksiyonun türevinin olmadığı veya sıfıra eşit olduğu noktalara kritik noktalar denir.

Bu tanıma göre $x_0 = 0$ noktası $y = |x|$ ve $y = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonları için ve $x_0 = 1$ noktası da $y = (x - 1)^2$ ve $y = (x - 1)^3$ fonksiyonları için kritik noktadır. Teorem 7 ve Tanım 8 birlikte değerlendirildiğinde, fonksiyonun ekstremum noktalarını onun kritik noktaları arasında aramak gerekir. Ancak; her kritik noktanın ekstremum noktası olamayacağını, fakat her ekstremum noktasının aynı zamanda bir kritik nokta olduğunu unutmamak gerekir. Kritik noktanın ekstremum noktası olabilmesi için aşağıda verilen yeter şart teoremleri ile değerlendirilmesi gerekir.

Teorem:8 (Birinci yeter şart teoremi) x_0 noktası, $y = f(x)$ fonksiyonu için bir kritik nokta olsun. Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 kritik noktasının bir komşuluğunda türevlenebilir ise bu komşulukta x_0 noktasından soldan sağa geçerken türevin işareti;

i) pozitiften negatife değişiyorsa, x_0 noktası maksimum noktadır

ii) negatiften pozitive değişiyorsa, x_0 noktası minimum noktadır.

iii) işaret değişmiyorsa, x_0 noktası ekstremum noktası değildir.

Sonuç:1 Verilen bir fonksiyonun ekstremum noktalarını ve ekstremum değerlerini belirlemek için şu işlemler uygulanır:

a) Fonksiyonun süreklilik aralıkları bulunur

b) Kritik noktalar bulunur

c) Kritik noktalardan geçiş sırasında, türevin işaretinin değişimine göre ekstremum noktaları belirlenir.

d) Ekstremum noktalarında, fonksiyonun ekstremum değerleri bulunur.

Bazı durumlarda kritik noktadan geçişte türevin işaretinin değişimini incelemek zor olabilir. Bu gibi durumlarda İkinci yeter şart teoremine başvurmak gerekir.

Tanım: 9 $y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli, tanımlı ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan noktalara kararlı noktalar denir.

Teorem: 9 (İkinci yeter şart teoremi) (a, b) aralığında sürekli, tanımlı ve türevlenebilir bir fonksiyon $f(x)$, $x_0 \in (a, b)$ noktası bu fonksiyon için bir kararlı nokta ($f'(x_0) = 0$) olsun. Eğer $f''(x_0)$ var ve $f''(x_0) < \infty$ (yani sonlu) ise o zaman;

a) $f''(x_0) > 0$ olduğunda x_0 noktası minimum nokta

b) $f''(x_0) < 0$ olduğunda x_0 noktası maksimum noktadır.

Teorem 9 $f''(x_0) = 0$ durumunu kapsamaz. Böyle bir durumda x_0 noktasının maksimum veya minimum nokta olup olmadığına karar veremeyiz. Bu takdirde üçüncü yeter şart teoremine başvurulur.

Teorem: 10 (Üçüncü yeter şart teoremi) $f(x)$ fonksiyonu, bir x_0 noktasında ve bu noktanın bir komşuluğunda $(n + 1)$ -nci mertebeden sürekli türeve sahip ve $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ şartlarını sağlasın. Bu takdirde;

i) n tek sayı ise x_0 noktası bir ekstremum noktasıdır. Eğer $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ise x_0 bir minimum noktadır. Eğer $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ise x_0 bir maksimum noktadır.

ii) n çift sayı ise x_0 noktası bir ekstremum noktası değildir.

Örnek:15 $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz ve bu sabitin değerini bulunuz?

Cözüm $y = \arctan x$ ve $y = \operatorname{arccot} x$ fonksiyonları $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ tanımlı ve türevlenebilir olduğundan, $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ fonksiyonu da $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı ve türevlenebilirdir. Türevi ise;

$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} + \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = 0$ dir. Böylece Teorem 5 gereğince $f(x) = c$ olup, sabit fonksiyondur.

$f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ eşitliği $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki her x elemanı için geçerli olduğundan $x = 1$ için de geçerlidir. Yani; $f(1) = \arctan(1) + \operatorname{arccot}(1) = c \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ bulunur. O halde $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ dir.

Örnek:16 $f(x) = x^2 e^{-x}$ fonksiyonu verilsin.

a) Fonksiyonun monotonluk aralıklarını bulunuz?

b) Fonksiyonun kritik noktalarını belirleyiniz? Bu noktaların ekstremum noktası olup olmadığına karar veriniz? Ekstremum noktası olanlara karşılık gelen ekstremum değerlerini bulunuz?

Cözüm a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ fonksiyonu için $D(f) = (-\infty, +\infty)$ olup, bu aralıkta fonksiyon sürekli ve türevlenebilirdir. Monotonluk durumu birinci mertebeden türevin işaret incelemesi ile belirlenir.

$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$ ya $2x - x^2 = 0$ veya $e^{-x} = 0$ olmalıdır. Ancak $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ için $e^{-x} > 0$ olduğundan $2x - x^2 = 0$ olmak zorundadır. Böylece $2x - x^2 = x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 2$ bulunur. Birinci türev için işaret tablosunu kuralım ve Teorem 6'yı uygulayalım.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$2x - x^2$	-	⊙	+	⊙	-
e^{-x}	+		+		+
$f'(x) = (2x - x^2) e^{-x}$	-	⊙	+	⊙	-
$f(x) = x^2 e^{-x}$	↘		↗		↘

İşaret tablosu ve Teorem 6'ya göre

$(-\infty, 0)$ ve $(2, +\infty)$ aralığında $f'(x) < 0$ olduğundan bu aralıklarda $f(x)$ monoton azalandır. $(0, 2)$ aralığında $f'(x) > 0$ olduğundan bu aralıkta $f(x)$ monoton artandır.

b) Birinci türevi tanımsız yapan ve birinci türevin kökleri olan ($f'(x) = 0$ denklemini sağlayan) noktalar kritik noktalardır. $f'(x) = (2x - x^2) e^{-x}$ türev fonksiyonu $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ için tanımlı olduğundan türevi tanımsız yapan nokta yoktur. Bu durumda kritik noktalar birinci türevin kökleri olan $x = 0$ ve $x = 2$ noktalarıdır. Bu noktaların ekstremum noktası olup olmadığına Teorem 8 veya Teorem 9 uygulanarak karar verilebilir.

Teorem 8 uygulanırsa;

$x = 0$ noktasında birinci türevin işareti negatiften pozitifte değiştiği için bu nokta bir minimum (hem yerel hem de mutlak minimum) noktadır.

$x = 2$ noktasında birinci türevin işareti pozitiften negatife değiştiği için bu nokta bir maksimum (hem yerel hem de mutlak maksimum) noktadır.

Teorem 9 uygulanırsa;

$x = 0$ ve $x = 2$ noktalarında $f'(x) = 0$ olduğundan bu noktalar aynı zamanda karalı noktaldır. Bu sebeple bu noktaların ekstremumluğuna karar vermede Teorem 9 da uygulanabilir. Bunun için fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin bu noktalarda alacağı değerlere bakmamız gerekir.

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$x = 0$ için $f''(0) = 2e^0 = 2 > 0$ olduğundan $x = 0$ bir minimum (hem yerel hem de mutlak minimum) noktadır.

$x = 2$ için $f''(2) = -2e^{-2} < 0$ olduğundan $x = 2$ bir maksimum (hem yerel hem de mutlak maksimum) noktadır.

$x = 0$ bir minimum nokta olduğundan minimum değer $f(0) = 0$ ve

$x = 2$ bir maksimum nokta olduğundan maksimum değer $f(2) = 4e^{-2}$ dir.

Örnek:17 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (x - 1)^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu için

a) Fonksiyonun monotonluk aralıklarını bulunuz?

b) Fonksiyonun kritik noktalarını belirleyiniz? Bu noktaların ekstremum noktası olup olmadığına karar veriniz? Ekstremum noktası olanlara karşılık gelen ekstremum değerlerini bulunuz?

Cözüm a) Verilen fonksiyonun tanım kümesi $D(f) = (-\infty, +\infty)$ aralığı olup, fonksiyon bu aralıkta süreklidir. Ayrıca;

$(-\infty, 0)$ aralığında fonksiyonun türevi $f'(x) = -2x$

$(0, 1)$ aralığında fonksiyonun türevi $f'(x) = 0$

$(1, \infty)$ aralığında fonksiyonun türevi $f'(x) = 2(x - 1)$ dir. Fakat $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında türevin olup olmadığı incelenmelidir. Çünkü bu noktalardan geçişte fonksiyon tanımı değişmektedir. Şimdi bu noktalarda türevin olup olmadığına bakalım:

$x = 0$ noktası için;

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \Delta x = 0 \\ f'(0^+) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{0-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$ olduğundan $x = 0$ noktasında fonksiyonun türevi var ve $f'(0) = 0$ dır.

$x = 1$ noktası için;

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{0-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ f'(1^+) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(1+\Delta x - 1)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \Delta x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$f'(1^-) = f'(1^+) = 0$ olduğundan $x = 1$ noktasında fonksiyonun türevi var ve $f'(1) = 0$ dır.

Sonuç olarak; $f'(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x-1) & , x > 1 \end{cases}$ olup,

$(-\infty, 0)$ aralığında $x < 0$ olduğundan $f'(x) = -2x > 0$ ve böylece $f(x)$ monoton artan

$[0, 1]$ aralığında $f'(x) = 0$ olduğundan $f(x)$ sabit

$(1, +\infty)$ aralığında $f'(x) = 2(x-1) > 0$ olduğundan $f(x)$ monoton artandır.

b) Birinci türevi tanımsız yapan ve birinci türevin kökleri olan ($f'(x) = 0$ denklemini sağlayan) noktalar kritik noktaldır. Tanım kümesinde birinci türevi tanımsız yapan nokta bulunmamaktadır. Ancak; $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında birinci türev sıfır olduğu için bu noktalar kritik noktaldır. Birinci türevin işaret incelemesi:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	++	⊖	0	⊖	++
$f(x)$	↗	sabit	↘	↗	

Bu tablodan anlaşıldığı üzere, $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarından geçerken türevin işaretinde herhangi bir değişim almamaktadır. Bu sebeple bu noktalar ekstremum noktası olamaz. Ekstremum noktası olmadığı için ekstremum değeri de yoktur.

Örnek:18 Aşağıdaki fonksiyonların varsa ekstremum noktalarını ve ekstremum değerlerini bulunuz?

a) $f(x) = \frac{x^2}{3} - \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ c) $f(x) = 2\sin(3x)$ d) $f(x) = x^{2/3}$

e) $f(x) = x^4 e^{-2x^2}$

Çözüm a) $f(x) = \frac{x^2}{3} - \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ olup, bu küme üzerinde fonksiyon süreklidir. Ekstremum noktaları eğer varsa kritik noktalar arasında aranmalıdır. Kritik noktalar birinci türevi tanımsız yapan noktalar ile sıfır yapan noktaldır.

$$f'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \left(\frac{x^{\frac{4}{3}} - 1}{x^{\frac{1}{3}}} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt[3]{x^4 - 1}}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ için birinci türev tanımsızdır.} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1 \text{ bulunur.} \end{cases}$$

O halde $x = -1, 0, 1$ noktaları verilen fonksiyon için kritik noktaldır, bu noktalar ekstremum noktaları olabilir. Türev için işaret tablosunu kuralım.

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	------	-----------

$f'(x)$	- -	⊙	+ +	- -	⊙	+ +
$f(x)$	↘		↗	↘		↗

$$x = -2 \in (-\infty, -1) \text{ için } f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt[3]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(-2) = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt[3]{(-2)^4-1}}{\sqrt[3]{-2}} = -0,804 < 0$$

$$x = 0,5 \in (0, 1) \text{ için } f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt[3]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(0,5) = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt[3]{(0,5)^4-1}}{\sqrt[3]{0,5}} = -0,507 < 0$$

$x = -1$ noktasında türev (-) den (+) ya değişiyor bu nokta minimum nokta ve $f(-1) = -\frac{2}{3}$ minimum değer.

$x = 0$ noktasında türev (+) den (-) ye değişiyor bu nokta maksimum nokta ve $f(0) = 0$ maksimum değer.

$x = 1$ noktasında türev (-) den (+) ya değişiyor bu nokta minimum nokta ve $f(1) = -\frac{2}{3}$ minimum değerdir.

b) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} \Rightarrow D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ olup, bu küme üzerinde fonksiyon süreklidir. Ekstremum noktaları eğer varsa kritik noktalar arasında aranmalıdır. Kritik noktalar birinci türevi tanımsız yapan noktalar ile sıfır yapan noktalardır.

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x^2}(x^4 - 1) = \frac{3}{x^2}(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$x = 0$ için türev tanımsız, ancak $x = 0 \notin D(f)$ olduğundan bu nokta bir kritik nokta değildir. Bu sebeple bu fonksiyon için bir ekstremum noktası olamaz.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{x^2}(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ olmak zorundadır. Çünkü $\forall x \in D(f)$ için hem $\frac{3}{x^2} > 0$ hem de $x^2 + 1 > 0$ dir. O halde türevi sıfır yapan noktalar $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ dir. Şimdi birinci türev için işaret incelemesi yapalım.

x	$-\infty$	-1	0	+1	$+\infty$
$\frac{3}{x^2}$		++	++	++	++
$x^2 + 1$		++	++	++	++
$x^2 - 1$		++	⊙ --	--	⊙ ++
$f'(x)$		++	⊙ --	--	⊙ ++
$f(x)$		↗	↘	↘	↗
		Max		Min	

$x = -1$ noktasında türev (++)dan (--) ye değişiyor, bu sebeple bu nokta maksimum noktasıdır.

$x = 1$ noktasında türev (--)den (++) ya değişiyor, bu sebeple bu nokta minimum noktasıdır.

Eksremum değerleri $x = -1$ için $f(-1) = -4$ maksimum değer ve $x = 1$ için $f(1) = 4$ minimum değerdir. Buna göre $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ üzerinde $\min f(x) = 4$ iken $\max f(x) = -4$ dür. Burada $\max f(x) < \min f(x)$ olmasının nedeni verilen fonksiyonun $x =$

0 noktasında süreksiz olmasıdır. Çünkü arka arkaya gelen max. Ve min değerlerden maksimumun minimumdan büyük olma özelliği sürekli fonksiyonlar için geçerlidir.

c) $f(x) = 2\sin(3x) \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ olup, bu küme üzerinde fonksiyon süreklidir. Ekstreum noktaları eğer varsa kritik noktalar arasında aranmalıdır. Kritik noktalar birinci türevi tanımsız yapan noktalar ile sıfır yapan noktalardır.

$f'(x) = 6\cos(3x)$ olup, bu türev $\forall x \in D(f)$ için tanımlıdır. Yani türevi tanımsız yapan hiçbir nokta yoktur. Bu türev fonksiyonu cosinüs fonksiyonu gereğince $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ noktalarında ve böylece $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ noktalarında sıfır olacaktır. Buna göre fonksiyonun kritik noktaları $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ olup, sonsuz tanedir. Ancak; hem verilen fonksiyon hem de $f'(x) = 6\cos(3x)$ türev fonksiyonu periyodik fonksiyon olup esas periyodu $0 \leq 3x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ olması sebebiyle $T = \frac{2\pi}{3}$ dür. Bu sebeple fonksiyonun sadece $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ aralığındaki kritik noktalarını bulup bu noktalar üzerinden ekstreum araştırmak yeterlidir. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ aralığında $k = 0$ için $x = \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ ve $k = 1$ için $x = \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ olup $f'(x) = 0$ olacağından fonksiyonun iki tane kritik noktası vardır. Şimdi bu durumu dikkate alarak bu aralıkta türevin işaretini inceleyelim:

$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ aralığında $0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < 3x < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $f'(x) > 0$ dir.

$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$ olduğundan $f'(x) < 0$ dir.

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ aralığında $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 3x < 2\pi$ olduğundan $f'(x) > 0$ dir.

Buna göre $x = \frac{\pi}{6}$ noktasından geçişte $f'(x)$ (++) dan (--) geçiş yaptığı için $x = \frac{\pi}{6}$ bir maksimum noktadır. Benzer şekilde $x = \frac{\pi}{2}$ noktasından geçişte $f'(x)$ (--) dan (++) geçiş yaptığı için $x = \frac{\pi}{2}$ bir minimum noktadır. Verilen fonksiyonun periyodik olduğu dikkate alınırsa esas periyodunun $T = \frac{2\pi}{3}$ olması nedeniyle $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ noktaları fonksiyonun maksimum noktaları iken $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$ noktaları fonksiyonun minimum noktaları olacaktır. Böylece verilen fonksiyonun sonsuz sayıda ekstreum noktası vardır.

Ekstreum değerleri ise;

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \text{ için maksimum değer } f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) = 2\sin\left(3\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 2$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \text{ için minimum değer } f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) = 2\sin\left(3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -2$$

olup, $D(f) = \mathbb{R}$ üzerinde $\max f(x) = 2$ ve $\min f(x) = -2$ olur.

d) $f(x) = x^{2/3} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ olup, bu küme üzerinde fonksiyon süreklidir. Ekstreum noktaları eğer varsa kritik noktalar arasında aranmalıdır. Kritik noktalar birinci türevi tanımsız yapan noktalar ile sıfır yapan noktalardır.

$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ olup, $x = 0$ noktasında verilen fonksiyonun türevi yoktur. Bu sebeple $x = 0$ noktası bir kritik noktadır. Türevi sıfır yapan hiçbir nokta olmadığından başka kritik nokta yoktur. Türevin işaret incelemesi;

$x < 0$ için $\sqrt[3]{x} < 0$ olduğundan $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} < 0$ ve $x > 0$ için $\sqrt[3]{x} > 0$ olduğundan $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0$ dır. Yani $x = 0$ noktasından geçişte türevin işareti (--) den (++) ya değişmektedir. Bu sebeple $x = 0$ noktası bir ekstremum noktası, yani bir minimum noktadır. Bu noktada ekstremum değeri ise $x = 0$ iken $\min f(x) = 0$ dır.

e) $f(x) = x^4 e^{-2x^2} \Rightarrow D(f) = (-\infty, +\infty)$ olup, bu aralıkta fonksiyon sürekli ve her mertebeden türeve sahiptir. Ekstremum noktalarını iki yolla bulabiliriz:

1.yol: Kritik noktaları bulup birinci türevin işaret incelemesi ile

Kritik noktalar birinci mertebeden türevi sıfır yapan ve tanımsız yapan noktalardır.

$f'(x) = 4x^3 e^{-2x^2} + x^4 (-4x e^{-2x^2}) = 4x^3 (1 - x^2) e^{-2x^2}$ olup, $\forall x \in D(f)$ için türev tanımlıdır. Yani türevi tanımsız yapan hiçbir nokta yoktur. O zaman kritik noktalar $f'(x) = 0$ eşitliğini sağlayan noktalar olacaktır. $\forall x \in D(f)$ için $e^{-2x^2} > 0$ olduğundan $f'(x) = 0$ olabilmesi için gerek ve yeter şart ya $4x^3 = 0$ veya $1 - x^2 = 0$ olmak zorundadır. Buradan kritik noktalar $x = -1, 0, 1$ noktalarıdır. Buna göre birinci türevin işaret tablosu aşağıda verildi. Bu tabloya göre; $x = -1$ ve $x = 1$ noktaları maksimum, $x = 0$ noktası ise minimum noktadır.

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$4x^3$	--	--	++	++	++
$1 - x^2$	--	++	++	--	--
e^{-2x^2}	++	⊙	++	⊙	++
$f'(x)$	++	⊙	--	++	⊙
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	↘
		mak.	min.	mak.	

2.yol $x = -1, 0, 1$ kritik noktalarında $f'(x) = 0$ olduğundan bu noktalar aynı zamanda kararlı noktalardır. Kararlı noktaların ekstremumluğuna karar vermede ikinci yeter şart teoreminden yararlanılır. Bunun için bu noktalarda ikinci türevin değerine bakmak gerekir.

$$f'(x) = (4x^3 - 4x^5)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = (12x^2 - 20x^4)e^{-2x^2} - (4x^3 - 4x^5)(4x)e^{-2x^2} \Rightarrow f''(x) = (16x^6 - 36x^4 + 12x^2)e^{-2x^2}$$

$x = -1$ için $f''(-1) = (16 - 36 + 12)e^{-2} = -8e^{-2} < 0$ olduğundan, $x = -1$ noktası maksimum noktadır.

$x = 0$ için $f''(0) = 0e^0 = 0$ olduğundan, $x = 0$ noktası hakkında karar verilemez.

$x = 1$ için $f''(1) = (16 - 36 + 12)e^{-2} = -8e^{-2} < 0$ olduğundan, $x = 1$ noktası da maksimum noktadır.

Şimdi $x = -1$, $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları birlikte ele alındığında, inceleme aralığında sürekli fonksiyonlar için iki maksimum nokta arasında mutlaka bir minimum nokta bulunacağından $x = 0$ noktasının minimum noktası olduğuna karar verilir.

Ekstremler değerleri ise;

$$x = -1 \text{ için } \max f(x) = f(-1) = (-1)^4 e^{-2(-1)^2} = e^{-2}$$

$$x = 0 \text{ için } \min f(x) = f(0) = (0)^4 e^{-2(0)^2} = 0$$

$$x = 1 \text{ için } \max f(x) = f(1) = (1)^4 e^{-2(1)^2} = e^{-2} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek:19 Verilen $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında ekstremum durumunu inceleyiniz?

Cözüm $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \Rightarrow D(f) = (-\infty, +\infty)$ olup, bu aralıkta fonksiyon sürekli ve her mertebeden türeyebilir. $x = 0$ noktasının verilen fonksiyon için bir ekstremum noktası olup olmadığına yeter şart teoremleri ile karar verilebilir.

Birinci yeter şart teoremine göre

$f'(x) = -\sin x + x - \frac{1}{2}x^2$ olup bu türev $\forall x \in D(f)$ için tanımlıdır. $x = 0$ için $f'(0) = \sin(0) + 0 = 0$ olduğundan bu nokta hem bir kritik nokta hem de bir kararlı noktadır. $x > 0$ iken (örneğin $x = \frac{\pi}{2}$ için $f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} = -0,6629 < 0$ olduğundan) $f'(x) < 0$ dır. $x < 0$ iken (örneğin $x = -\frac{\pi}{2}$ için $f'(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(-\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} = -1,8045 < 0$ olduğundan) $f'(x) < 0$ dır. Buna göre $x = 0$ noktasından geçişte türevin işareti değişmediğinden $x = 0$ noktası verilen fonksiyonun bir ekstremum noktası değildir.

İkinci yeter şart teoremine göre

$f'(x) = -\sin x + x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = 0$ bir kararlı nokta olduğundan ikinci türevin bu noktadaki değerine bakalım.

$f''(x) = -\cos x + 1 - x \Rightarrow f''(0) = -\cos(0) + 1 - 0 = -1 + 1 = 0$ olduğundan, ikinci yeter şart teoreminin bu noktanın ekstremum noktası olup olmadığına karar veremez.

Üçüncü yeter şart teoremine göre

$$f'(x) = -\sin x + x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x + 1 - x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$f'''(x) = \sin x - 1 \Rightarrow f'''(0) = -1 \neq 0$ olup, $n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$ olup, çift sayı olduğundan $x = 0$ noktası verilen fonksiyon için bir ekstremum noktası değildir.

