TÜREV

Türevin Tanımı : Bir fonksiyonun anlık değişim oranına türev denir.

$f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y' ile gösterilebilir.

Türev Alma Kuralları :

* $y = x^n$ ise $y' = n \cdot x^{n-1}$ (Dereceyi başa at). $x^{\text{(dereceyi 1 eksilt)}}$

* $k \in \mathbb{R}$; $y = k$ ise $y' = 0$ (Sabit sayının türevi 0'dır)

* $y = \sqrt{x}$ ise $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Toplam – Farkın Türevi :

* $y = f(x) + g(x)$ ise $y' = f'(x) + g'(x)$

* $y = f(x) - g(x)$ ise $y' = f'(x) - g'(x)$

Ayrı ayrı türevleri alınır.

Çarpım – Bölüm Türevi :

* $y = \underbrace{f(x)}_{\text{birinci}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\text{ikinci}} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Birincinin türevi • ikinci + birinci • ikincinin türevi

* $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$\frac{\text{Payın türevi} \cdot \text{Payda} - \text{pay} \cdot \text{Paydanın türevi}}{\text{paydanın karesi}}$$

Anlık değişim oranı :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Pay kısmındaki f ler silindiğinde pay ve paydada aynı ifade kalırsa, türevini al anlamına gelir.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+3h)-f(2-2h)}{h} = 5 \cdot f'(2)$$

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi :

* $y = \sin x$ ise $y' = \cos x$
* $y = \cos x$ ise $y' = -\sin x$
* $y = \tan x$ ise $y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
* $y = \cot x$ ise $y' = -(1+\cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

Üstel Fonksiyonun Türevi :

* $y = a^x$ ise $y' = a^x . \ln a$

$y = e^x$ ise $y' = e^x$

Logaritma Fonksiyonunun Türevi :

* $y = \ln x$ ise $y' = \frac{1}{x}$

$y = \log_a x$ ise $y' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

logaritma özelliğinden ; $\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

Bileşke Fonksiyonunun Türevi :

* $y = (f o g)(x)$ ise $y' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{f nin türevi içini aynen yaz.}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{içinin türevi}}$

$f(g(x))$ in türevi

$y = (f o g)(x)$ in türevi alınırken, $(f o g)(x)$ kolay bulunabiliyorsa, kural kullanmadan da türevi alınabilir. $(f o g)(x)$'i bul ve türevini al.

Çarpı içinin türevi :

* $y = f^n(x)$ ise $y' = \underbrace{n \cdot f^{n-1}(x)}_{\text{Derecenin türevi}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{içinin türevi}}$

(Dereceyi başa at • dereceyi 1 eksilt)

* $y = \sqrt{\underbrace{f(x)}_{\text{iç}}}$ ise $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) \Rightarrow \dfrac{\text{içinin türevi}}{2 \cdot \text{aynısı}}$

* $y = \sin(f(x))$ ise $y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

* $y = \cos(f(x))$ ise $y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$

* $y = \tan(f(x))$ ise $y' = (1 + \tan^2 f(x)) \cdot f'(x)$

$= \dfrac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$

* $y = \cot(f(x))$ ise $y' = -(1 + \cot^2 f(x)) \cdot f'(x)$

$= -\dfrac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x)$

* $y = a^{f(x)}$ ise $y' = \underbrace{a^{f(x)}}_{\text{aynen yaz}} \cdot \underbrace{\ln a}_{\ln(\text{taban})} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{içinin türevi}}$

* $y = e^{f(x)}$ ise $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
* $y = \ln(f(x))$ ise $y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
* $y = \log_a(f(x))$ ise $y' = \left(\frac{\ln f(x)}{\ln a}\right)' \rightarrow \frac{1}{f(x).\ln a} \cdot f'(x)$

$y = \sqrt[3]{f(x)}$ ise $y' = (f(x))^{1/3}$ şeklinde yazılıp türevi alınmalıdır.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot [f(x)]^{\frac{1}{3}-1} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{3[f(x)]^{2/3}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{3 \cdot \sqrt[3]{f^2(x)}} //$$

Yüksek Mertebeden Türev :

$y = f(x)$ ise $f'(x)$ (Birinci türev)

$f'(x)$ in tekrar türevi alınırsa, ikinci türev bulunur.

$f''(x)$ veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ ile gösterilebilir.

$f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ (Üçüncü türev)

$f^{(IV)}(x)$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ şeklinde devam edilirse

$\vdots$

$f^{(n)}x$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ (n. mertebeden türev)

Yüksek mertebeden türev alınırken, 1. türev, 2. türev, ... şeklinde sırayla türev alınarak bir kural elde edilmelidir.

Parametrik Fonksiyonların Türevi (Zincir Kuralı)

→ $y = 2x^3 \cdot a^2 \cdot t$ ifadesinde

$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3x^2 \cdot a^2 \cdot t$

y'nin x'e göre türevi
(x'in türevi • diğerleri)

$\frac{dy}{da} = 2x^3 \cdot 2a \cdot t$

y'nin a'ya göre türevi

$\frac{dy}{dt} = 2x^3 \cdot a^2 \cdot 1$

y'nin t'ye göre türevi

→ $\left.\begin{aligned} y &= u^2 + u \\ u &= x^2 - x + 1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{du}} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}$

$= (2u+1) \cdot (2x-1)$

du'lar sadeleşebildiği için $\frac{dy}{dx}$ bu şekilde yazılabilir.

→ $\left.\begin{aligned} y &= u^2 + u \\ x &= u^3 + 2u + 1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = ?$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ → paydaya atılırsa

$= \dfrac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$ → x'in u'ya göre türevi

$= \frac{2u+1}{3u^2+2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ ⇒ şeklinde istenildiği kadar parametre yazılabilir

Türevin Fiziksel Yorumu :

Konum - zaman fonksiyonunun türevi , hız - zaman fonksiyonudur.

$$x'(t) = v(t)$$

Hız - zaman fonksiyonunun türevi , ivme - zaman fonksiyonudur.

$$v'(t) = a(t)$$

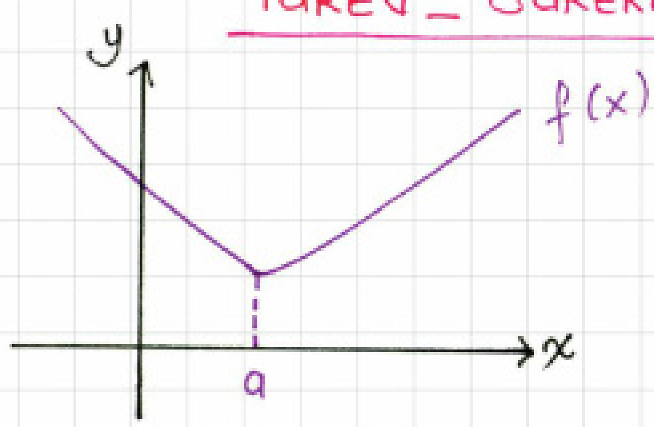
Önemli bir örnek ;

$y = \sin^2(\ln x)$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$y' = \underbrace{2\sin(\ln x)}_{\text{Derecenin türevi}} \cdot \underbrace{\cos(\ln x)}_{\text{Sin fonksiyonunun türevi}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{İçindeki } \ln x \text{ fonksiyonunun türevi}}$$

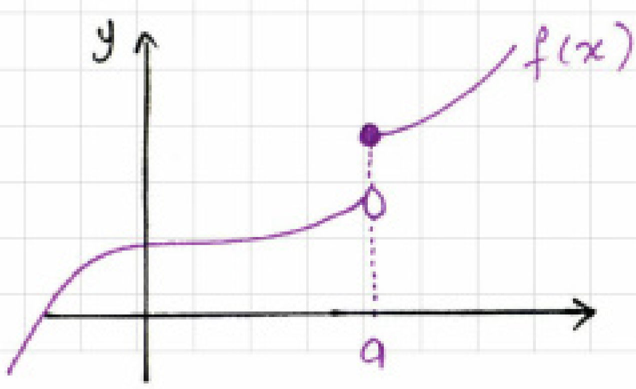
Türev alırken dıştan → içe doğru hareket edilmelidir

TÜREV _ SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ



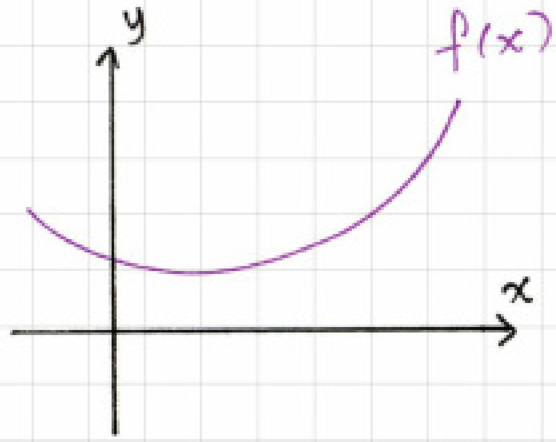
f(x) fonksiyonu , x=a noktasında limiti var ve süreklidir. Ancak uç nokta veya kırık noktalarda türev yoktur.

Sürekli olduğu noktalarda türev olmayabilir.



f(x) fonksiyonu , x=a noktasında sürekli değil. Uç noktalarda türev yoktur.

Sürekli değilse türev yoktur.



f(x) fonksiyonu tüm reel sayılarda türevlidir. Aynı zamanda sürekli olduğu görülmektedir.

Türevli olduğu noktalarda, süreklidir.

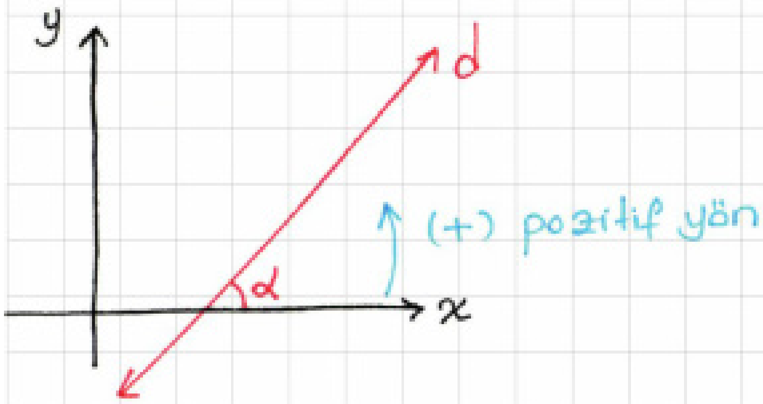
Bir fonksiyonun türevli olabilmesi için öncelikle sürekliliğe bakılmalıdır.

Parçalı fonksiyonlarda, mutlak değer fonksiyonunda, kesir türündeki fonksiyonlarda sürekli olmayan noktaların türevi de yoktur. Ancak sürekli olduğu noktalarda türevli olup olmadığı kontrol edilmelidir.

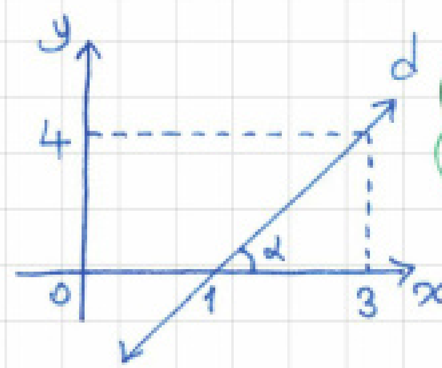
Türevin Geometrik Yorumu ile İlgili Hatırlatmalar :

Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantına EĞİM denir.

$\tan\alpha = \dfrac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik k.}}$



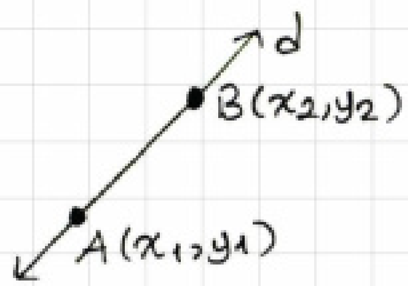
d doğrusunun eğimi $\underline{\tan\alpha}$ dır.



d doğrusunun eğimi

$\tan\alpha = \dfrac{4}{3-1} = 2$ dir.

*



A ve B noktalarından geçen d doğrusunun eğimi ;

$\boxed{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$ ya da $\boxed{\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}$ dir.

* Eğimi m ve üzerindeki bir noktası $A(x_1, y_1)$ olan doğrunun denklemi

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

* $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 45° = 1$, $\tan 60° = \sqrt{3}$

* x ekseni ile pozitif yönde yapılan açı, geniş açı ise, eğim negatiftir.

$\tan 120° = -\tan 60°$

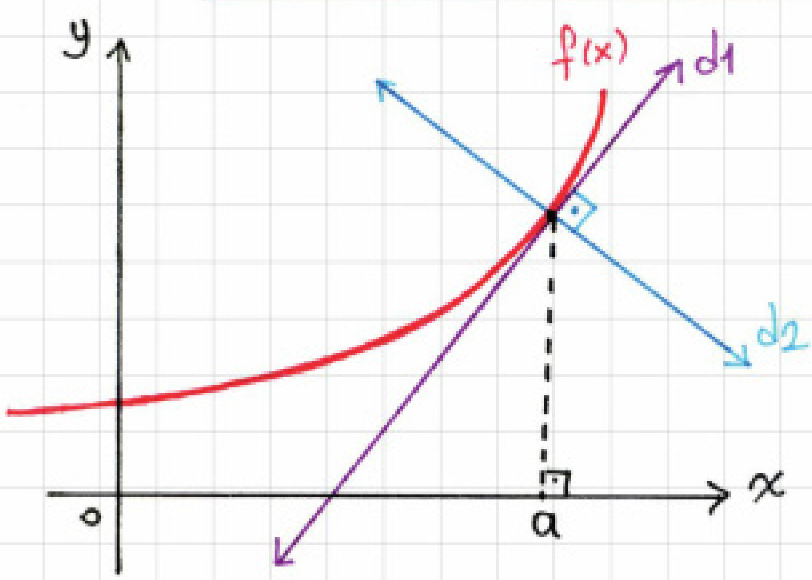
$\tan 135° = -\tan 45°$

$\tan 150° = -\tan 30°$

* Paralel doğruların eğimleri eşittir.

Birbirine dik olan doğruların eğimleri çarpımı -1 dir.

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU



Yandaki grafikte $f(x)$ eğrisine $x=a$ noktasından çizilen d_1 doğrusu TEĞET, d_2 doğrusu ise d_1 doğrusuna $x=a$ noktasında diktir.

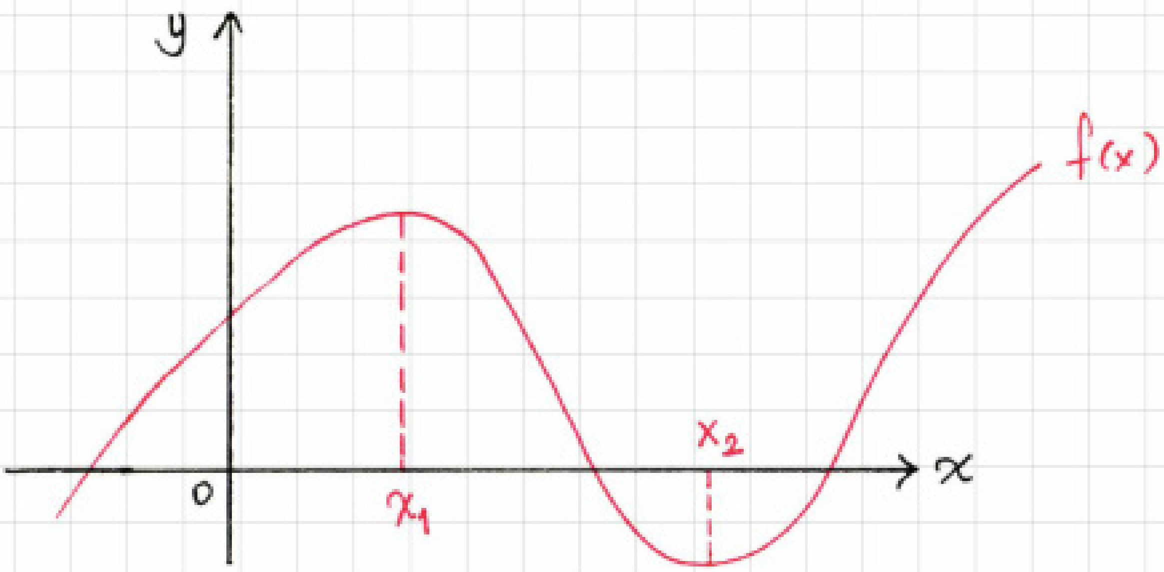
d_2 doğrusu d_1 doğrusunun NORMALİ dir.

$f(x)$ in türevi, $x=a$ noktasından çizilen d_1 doğrusunun eğimine eşittir.

d_1 doğrusunun eğimi m_{d_1} ise, $f'(x) = m_{d_1}$

d_2 doğrusunun eğimi m_{d_2} ise, $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$

Bir Fonksiyonun Artan - Azalan Olduğu Aralıklar :

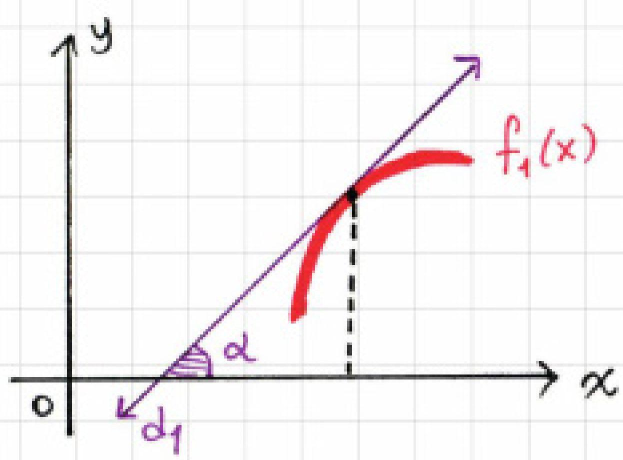


Yukarıda verilen grafikte $f(x)$ fonksiyonu

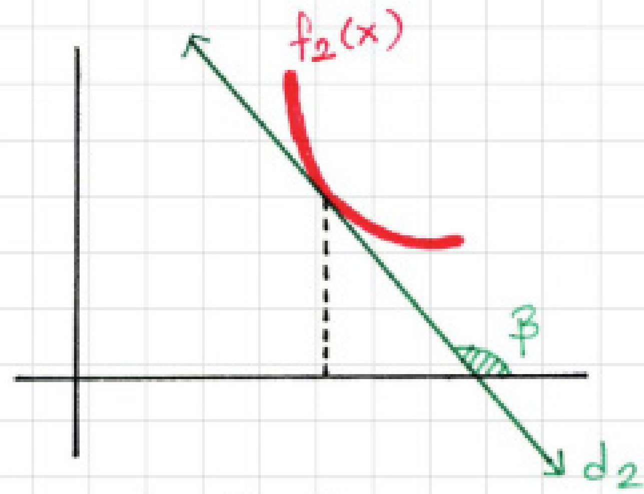
$(-\infty, x_1]$ aralığında artıyor,

$[x_1, x_2]$ aralığında azalıyor,

$[x_2, \infty)$ aralığında artıyor.



$f_1(x)$ fonksiyonunun artan olduğu görülmektedir. Üzerindeki bir noktadan çizilen teğet, x ekseni ile pozitif yönde dar açı yapar. Bu yüzden 1. türevi (eğimi) pozitiftir.



$f_2(x)$ fonksiyonunun azalan olduğu görülmektedir. Üzerindeki bir noktadan çizilen teğet, x ekseni ile pozitif yönde geniş açı yapar. Bu yüzden 1. türevi (eğimi) negatiftir.

* Bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralığı görebilmek için işaret tablosu yapılmalıdır.

$f'(x)$ fonksiyonunun kökleri x_1 ve x_2 olsun.

		x_1		x_2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗ ARTAN		↘ AZALAN		↗ ARTAN

$(-\infty, x_1] \rightarrow$ Artan

$[x_1, x_2] \rightarrow$ Azalan

$[x_2, \infty) \rightarrow$ Artan

Bir fonksiyonun daima artan olması için türevinin negatif olmaması gerekir. Bu durumda

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) > 0$ veya $f'(x) = 0$ (çift katlı kök)

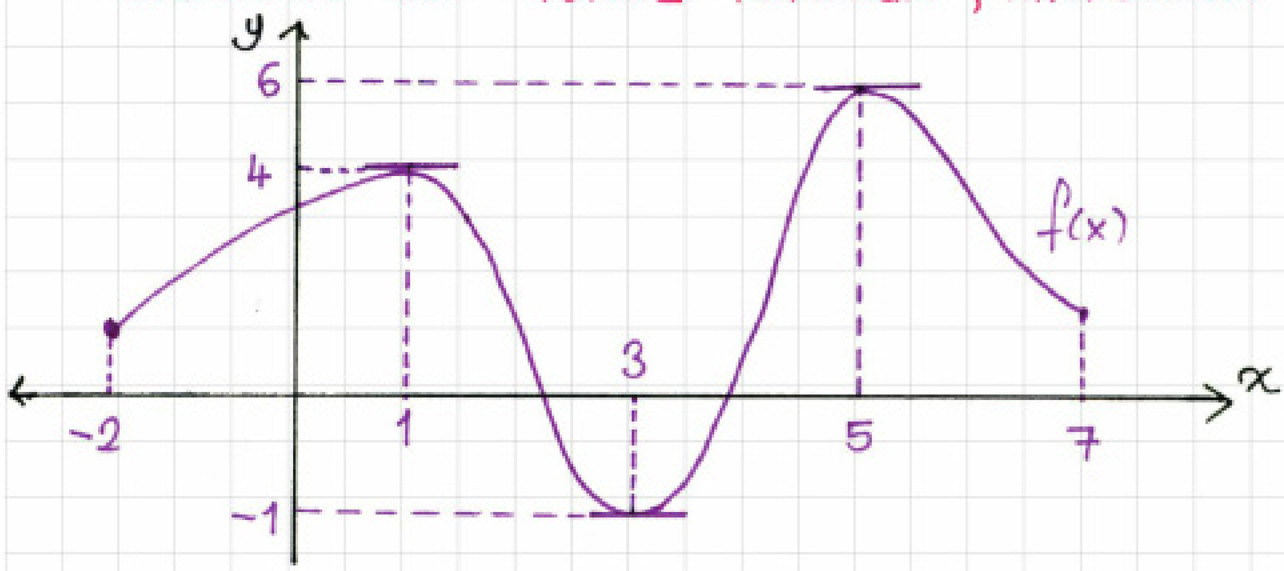
olmalı yani, $\Delta \leq 0$ olacaktır.

* x_1, $f'(x)$ in çift katlı kökü ise

		x_1	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	↗		↗

Daima artan

MUTLAK VE YEREL MİNİMUM, MAKSİMUM NOKTALARI



$f: [-2, 7] \rightarrow \mathbb{R}$

Grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu ,

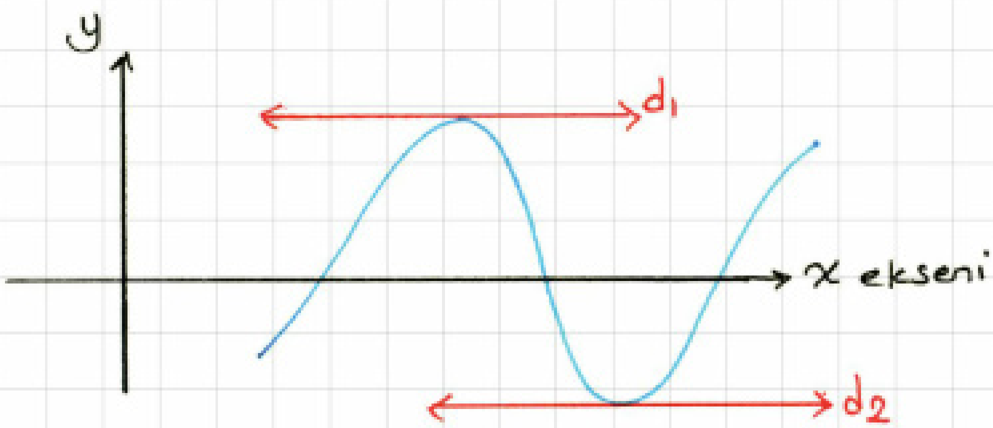
$\Rightarrow$ $x=1$ ve $x=5$ noktalarında maximum değer almış ,
$x=3$ noktasında ise minimum değer almıştır.

$\rightarrow$ $(1,4)$ noktası yerel maksimum noktasıdır. $f'(1)=0$ dır.
$\rightarrow$ $(5,6)$ noktası yerel maksimum noktasıdır. $f'(5)=0$ dır.
$\rightarrow$ $(3,-1)$ noktası yerel minimum noktasıdır. $f'(3)=0$ dır.

$\Rightarrow$ $x=5$ noktasındaki $y=6$ değeri daha büyük olduğu için mutlak maksimum noktasıdır.

Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına yerel ekstremum noktaları denir.

Yerel ekstremum noktalarından çizilen teğetler, x eksenine paralel oldukları için eğimleri yani 1. türevleri sıfırdır.



d_1 ve d_2 doğruları x eksenine paraleldir. 1. türevleri 0 dır.

$A(x_1, y_1)$ yerel ekstremum noktası ise

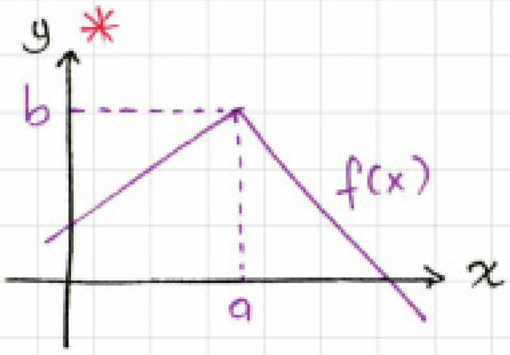
$$f'(x_1)=0 \quad \text{ve} \quad f(x_1)=y_1 \quad \text{dır.}$$

* x_1 ve x_2, $f'(x)$ in kökleri olsun.

		x_1		x_2	
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	Artan		Azalan		Artan
		maksimum nokta		minimum nokta	

Maksimum ve minimum değerleri bulmak için x_1 ve x_2 değerlerini $f(x)$ te x yerine yazmalıyız.

*



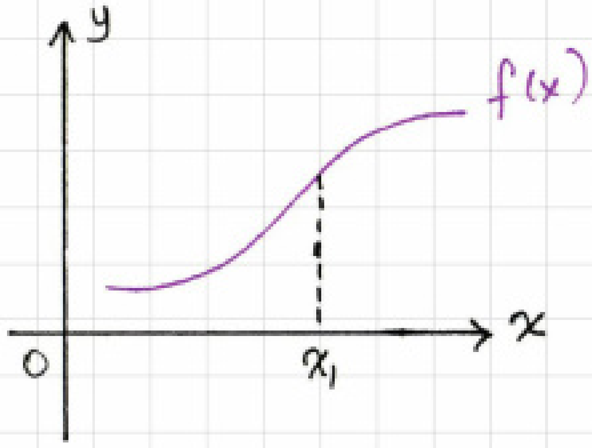
Kırık noktalardan birden fazla teğet çizilebildiği için bu noktalarda türev yoktur.

(a,b) noktası, yerel maksimum noktadır. Ancak $x=a$ noktasında türev yoktur.

* x_1 noktası $f'(x)$ in çift katlı kökü olsun.

	x_1	
+	‖	+

$(x_1, f(x_1))$ noktası yerel ekstremum noktası değildir.



Çift katlı köklerde fonksiyon daima artan ya da daima azalandır. Yerel ekstremum noktası olamazlar.

Max-Min Problemleri

Bir problemde bir fonksiyon en büyük veya en küçük değeri isteniyorsa, bu problem türev ile çözülebilir.

Problemde sorulan max-min ifadesi fonksiyon kabul edilir.

Bu fonksiyon gerekli geometrik - cebirsel işlemlerle tek bilinmeyene düşürülür. Bu değişkene göre 1. türev alınıp, 0'a eşitlenerek değişken bulunabilir.

Bazı pratik yöntemler :

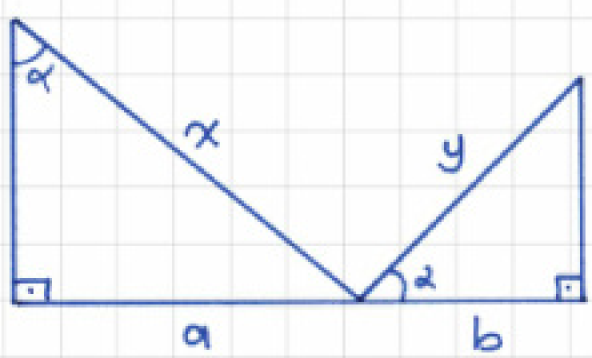
* Çember içine çizilen dikdörtgenin en büyük alanlı olması için dikdörtgen kare seçilmelidir.

* Çeyrek çember içine çizilen en büyük alanlı dik üçgen ikizkenar üçgendir.

* Bir üçgen içine çizilen dikdörtgenin alanı en fazla, üçgenin alanının yarısıdır.

* Küre içine yerleştirilen en büyük hacimli dik silindirin yarıçapı, kürenin yarıçapının $\sqrt{2}/3$ katıdır.

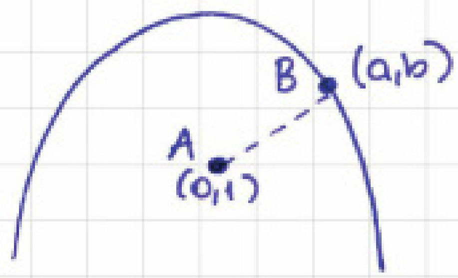
*



$x+y$ toplamının en büyük olması için

$$\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$ dir.

(✱) $x>0$ olmak üzere, $y=4-x^2$ eğrisinin grafiği üzerinde ve $(0,1)$ noktasına en yakın nokta (a,b) ise b değeri kaçtır?



(a,b) eğri üzerinde olduğu için $\boxed{b = 4 - a^2}$

$f(a) = |AB| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$

$f(a) = \sqrt{a^2 + (4-a^2-1)^2} = \sqrt{a^2 + (3-a^2)^2}$

(f, tek bilinmeyene düştü)

a'ya göre türev alalım, 0'a eşitleyelim.

$$f'(a) = \frac{2a + 2(3-a^2)\cdot(-2a)}{2\sqrt{a^2+(3-a^2)^2}} = 0$$

$$2a(1 - 2(3-a^2)) = 0$$

$$1 - 6 + 2a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$b = 4 - \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

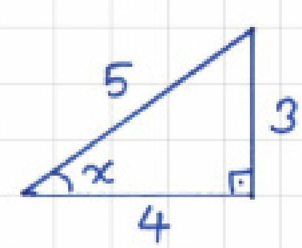
(#) $y = 3\sin x + 4\cos x$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki en büyük değeri kaçtır?

En büyük değeri için 1. türevini 0'a eşitleyelim.

$$y' = 3\cos x - 4\sin x = 0$$

$$3\cos x = 4\sin x$$

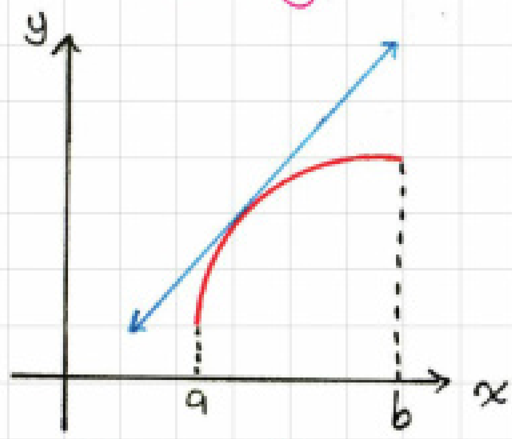
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan x = \frac{3}{4}$$



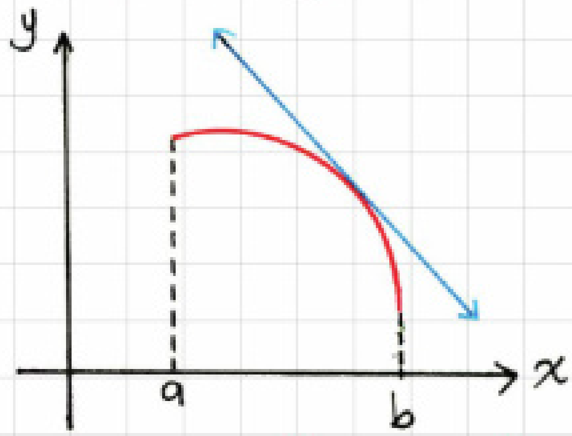
$$y = 3\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\frac{4}{5} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$$

! $y = a\sin x + b\cos x$ ifadesinin en büyük değeri $\sqrt{a^2+b^2}$ dir.

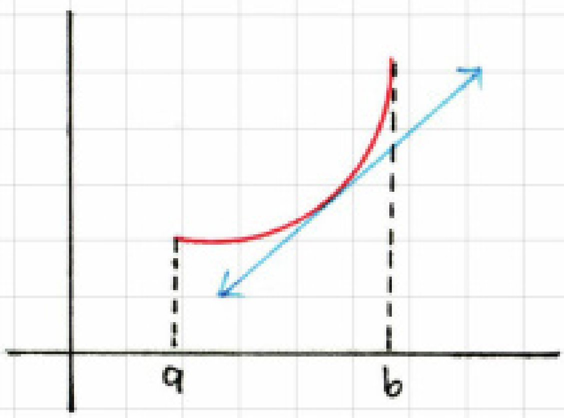
İçbükeylik ve Dışbükeylik (II. Türev)



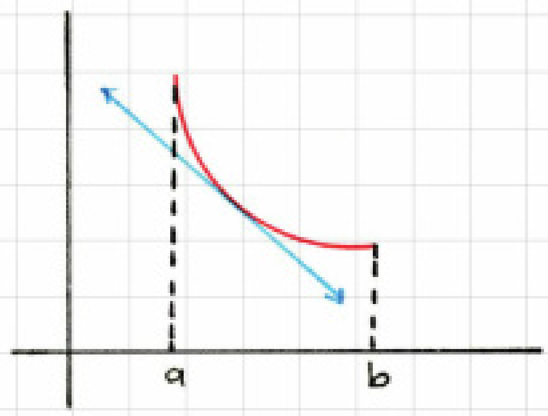
Konkav (içbükey)



Konkav (içbükey)



Konveks (dışbükey)



Konveks (dışbükey)

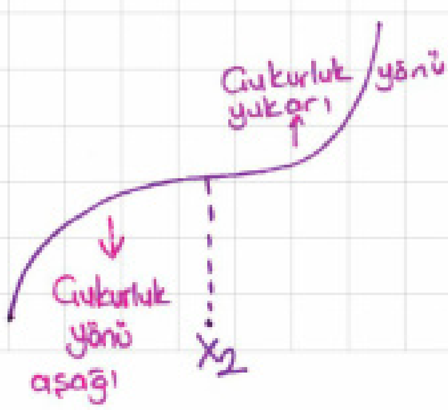
Bir fonksiyonun konkav, konveks aralığını bulabilmek için; ikinci türev alınır. İkinci türevin işaret tablosu yapılır.

$f''(x)$ in kökleri x_1 ve x_2 olsun.

		x_1	x_2
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	∪	∩	∪

Çukurluk yönü aşağı — İçbükey, Konkav, Ağlayan surat

Çukurluk yönü yukarı — Dışbükey, Konveks, Gülen surat



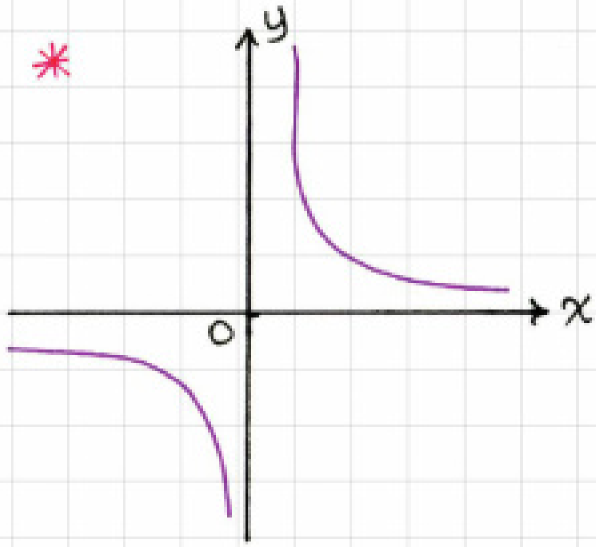
⟸ x_2 noktasında grafiğin görüntüsü

x_1 ve x_2 noktaları $(f''(x))$ 2. türevi 0 yapan noktalardır. Yani 2. türevin kökleridir. Bu noktalara dönüm (büküm) noktaları denir.

$A(a,b)$ noktası dönüm noktası ise

$$f''(a)=0 \quad \text{ve} \quad f(a)=b \text{ dir.}$$

*



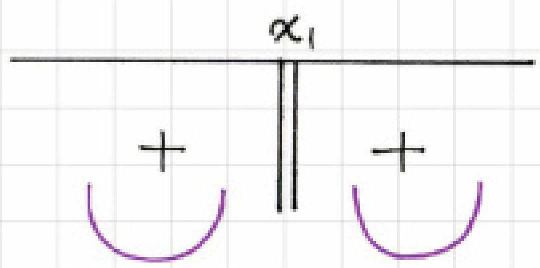
Yanda $f(x)=\dfrac{1}{x}$ in grafiği verilmiştir.

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

$x=0$ noktasında çukurluk yönü değişmektedir.
Ancak $x=0$ da $f(x)$ sürekli değildir. $f''(x)$ tanımlı değildir.
Bu yüzden, $f''(x)$ in kökü yoktur.
$x=0$ noktası dönüm noktası değildir.

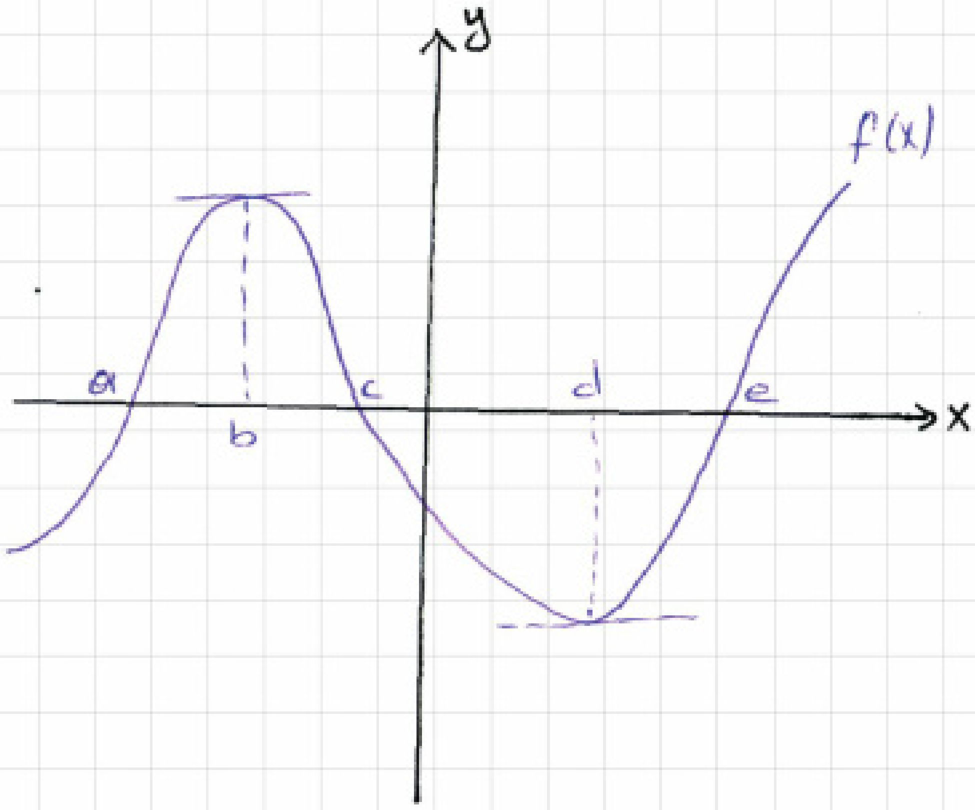
* x_1, $f''(x)$ in çift katlı kökü ise



$f''(x_1)=0$ apsisli noktada $f''(x_1)$ sıfır olmasına rağmen, 2. türev işaret değiştirmediği için dönüm noktası olamaz.

$f''(x)$ fonksiyonunda $\Delta \leq 0$ ise $f(x)$ in dönüm noktası yoktur.

Grafikte $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ yorumları:



$f(x)$ in grafiği verilmişse bak - gör - yorumla

→ $[a,b]$ aralığında $f(x)$ artan olduğu için, $f'(x) > 0$ dır.

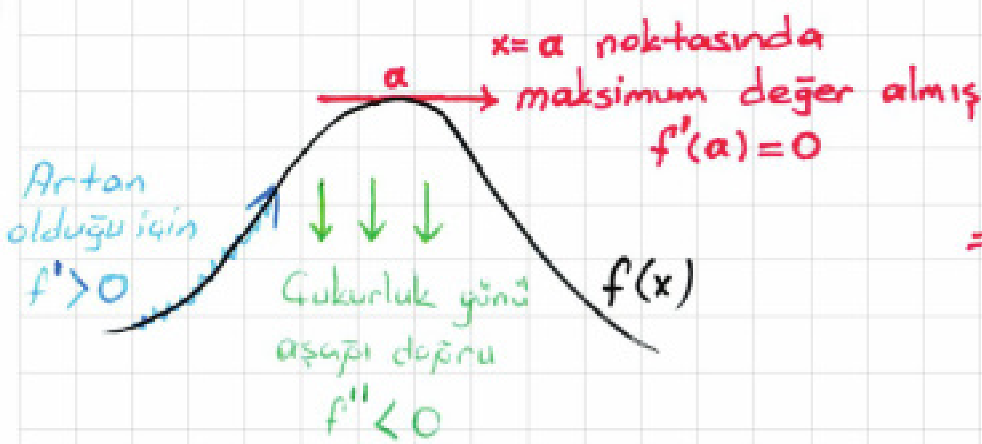
→ $[a,b]$ aralığında $f(x)$ in çukurluk yönü aşağı, $f''(x) < 0$ dır.

→ $x=b$, maksimum değer aldığı nokta, $f'(b)=0$ dır.

→ $[b,d]$ aralığında $f(x)$ azalan olduğu için $f'(x) < 0$ dır.

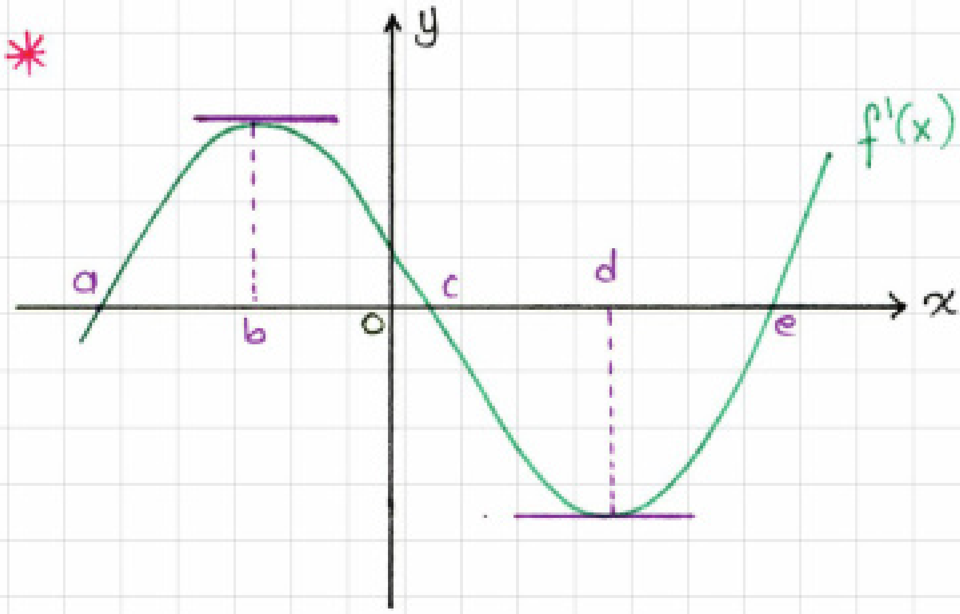
→ $x=d$, minumum değer aldığı nokta $f'(d)=0$ dır.

→ $[d,e]$ aralığında çukurluk yönü yukarı doğru, $f''(x) > 0$ dır.



⇒ Dikkat et...

*



$f'(x)$ in grafiği verilmişse işaret tablosu yap!

$x=a$, $x=c$, $x=e$ noktaları , $f'(x)$ in kökleridir.

$x=b$ ve $x=d$ noktaları , $f'(x)$ in max-min noktalarıdır. $(f''(x)=0)$ ikinci türevi sıfır yapan noktalardır. Dolayısıyla bu noktalar , $f(x)$ in dönüm noktalarıdır.

		a		e		c	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗
		min		max		min	

→ $[a,c]$ aralığında $f(x)$ artandır.

→ $x=a$, $x=c$ ve $x=e$ yerel ekstremum noktalarıdır.

→ $[e,\infty)$ aralığında $f(x)$ artandır.

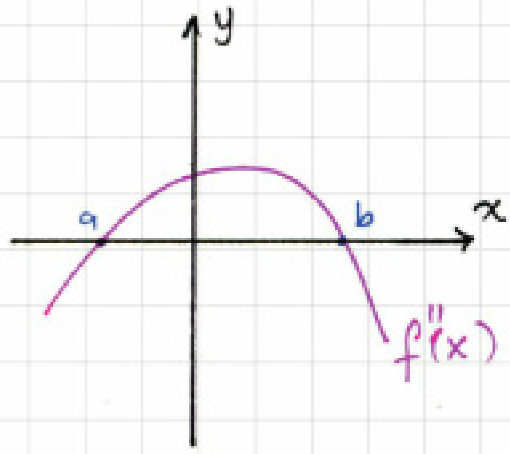
→ $c<m<n<e$ için $f(m)>f(n)$ dır.
Çünkü $f(x)$, (c,e) aralığında azalandır.

Grafiğe bakarak ;

→ $[a,b]$ aralığında $f'(x)$ arttığı için $f''(x)>0$ dır.

→ $[a,c]$ aralığında konkav olduğu için $f'''(x)<0$ dır.

*



İkinci türevin grafiği verilmişse, işaret tablosu yap.

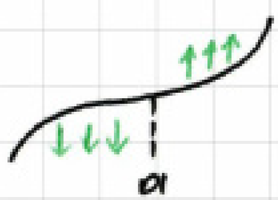
!

	a		b	
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	∩	∪	∩

→ $[a,b]$ aralığında, $f(x)$ in grafiği konvekstir.

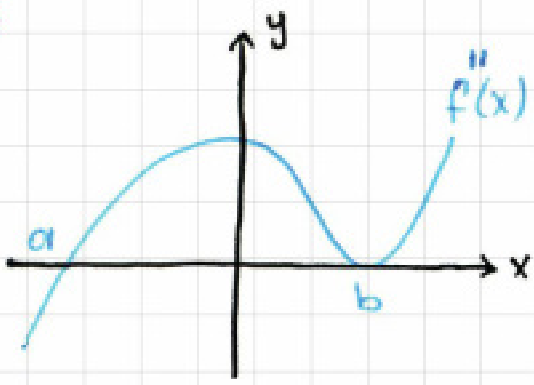
→ $x=a$ ve $x=b$, $f(x)$ in dönüm noktalarıdır.

→ $x=a$ noktasında, $f(x)$ in grafiği;



şeklindedir.

*

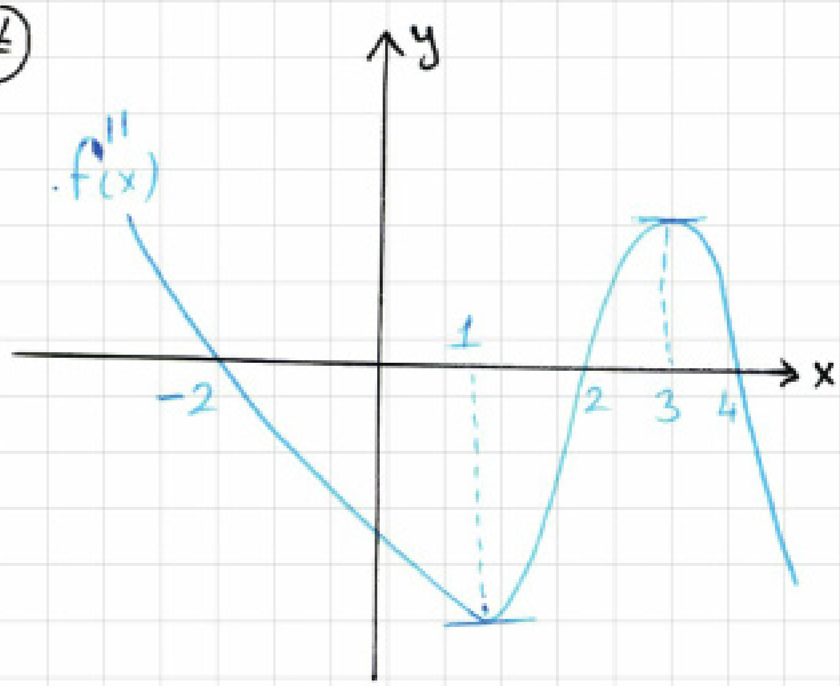


	a		b	
f''	$-$	$+$	$+$
f	∩	∪	∪

!

$x=b$ de grafik x eksenine teğet olduğu için $x=b$ $f(x)$ in çift katlı köktür. $f(x)$ in dönüm noktası olamaz.

#



		-2		2		4	
f''	+		−		+		−
f'	↗		↘		↗		↘
f	∪		∩		∪		∩

$x=-2,\ 2$ ve 4 noktaları $f(x)$ in dönüm noktalarıdır.

$f'(0) > f'(1)$ (−2 ile 2 arasında $f'_{(x)}$ azalan)

$[2,4]$ aralığında $f(x)$ in grafiği konvekstir.

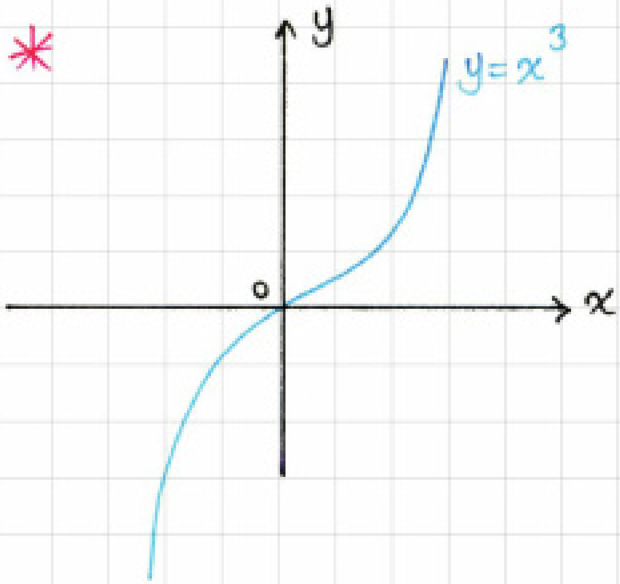
$x=-2$ ve $x=4$, $f'_{(x)}$ in maksimum noktalarıdır.

$x=2$ ve $x=4$ aralığında çukurluk yönü aşağı baktığı için $f^{(4)}_{(x)} < 0$

$(2,3)$ aralığında $f''_{(x)}$ artan olduğu için, $f'''_{(x)} > 0$ dır.

$x=1$, $f''_{(x)}$ in minumum noktası olduğu için $f'''_{(1)} = 0$ dır.

*

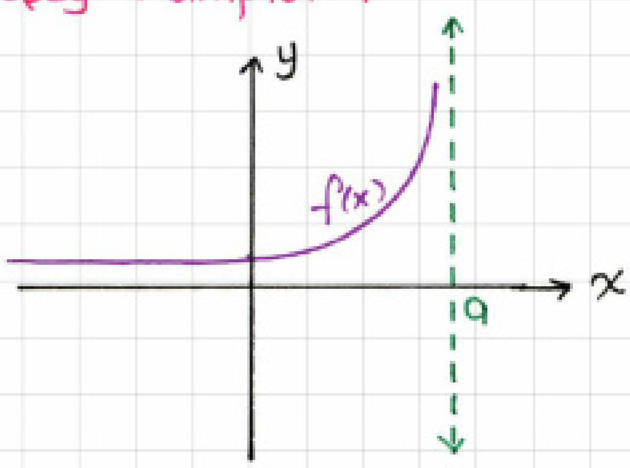


Yanda verilen $y=x^3$ fonksiyonu için yerel ekstremum noktası yoktur, daima artandır.
Dönüm noktası $x=0$ noktasıdır. Dönüm noktası $(0,0)$, aynı zamanda SİMETRİ MERKEZİ dir.

FONKSİYON GRAFİKLERİ

Asimptot Kavramı : Sonsuzda teğet olduğunu düşündüğümüz doğrulara asimptot denir.

1_Düşey Asimptot :



$f(x)$ eğrisi, $x=a$ doğrusuna soldan giderek yaklaşmaktadır. $x=a$ doğrusuna giderek yaklaştığı için, sonsuzda teğet olduğu düşünülür. $x=a$ doğrusu düşey asimptottur.

HATIRLATMA

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x}{x-a}$ ifadesinde $x=a$ yazılırsa, sadece payda sıfır olmaktadır. Sonuç $\mp\infty$ çıkar.

* $a \in \mathbb{R}$ iken $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ya da $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ifadelerinin biri $\mp\infty$ çıkıyorsa $x=a$ doğrusuna düşey asimptot denir.

! Sonuç olarak düşey asimptot, paydayı sıfır yapan değerlerdir.

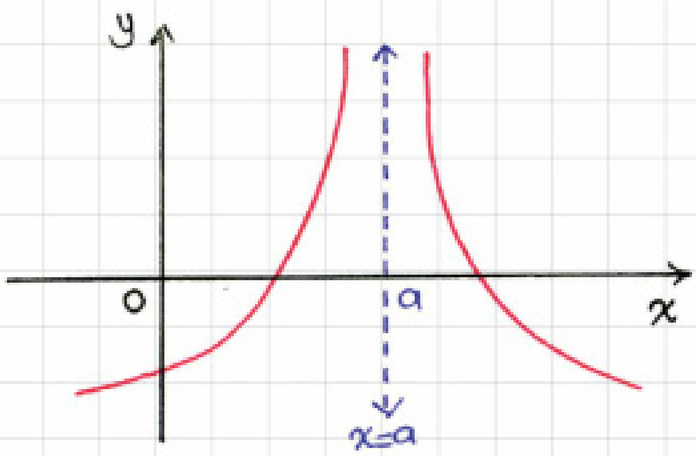
→ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ ifadesinde düşey asimptotlar paydayı 0 yapan $x=2$ ve $x=-2$ değerleridir.

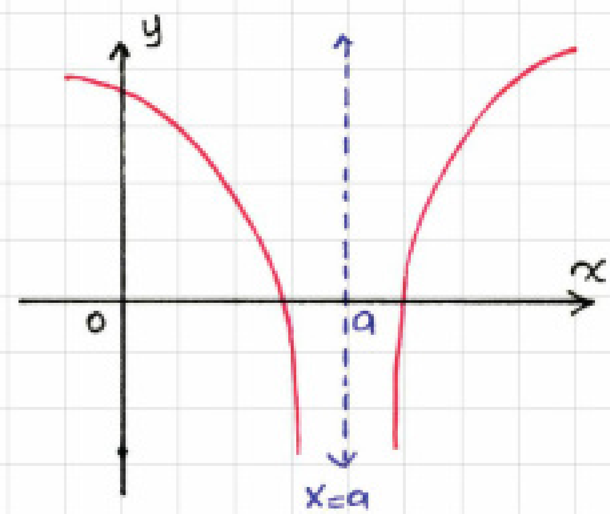
→ $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ ifadesinde düşey asimptot $x=-2$ dir.

$x=2$ değeri, $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğini ortaya çıkarır. Sadece payda sıfır olmalıdır.

Kesrin en sade hali alındıktan sonra, paydayı 0 yapan değer, düşey asimptottur.

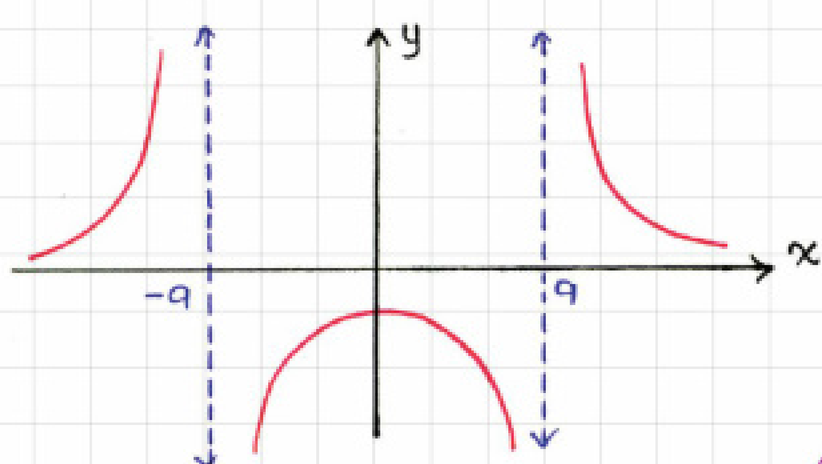
$f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$ gibi paydası tam kare olan ifadelerde, $x=a$ doğrusu düşey asimptottur. Payda tam kare ise, grafik baca, volkan ağzı dediğimiz şekli alır.





Düşey asimptot n tane ise, grafik n+1 tane parçadan oluşur.

→ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$ ise düşey asimptotlar $x=-a$ ve $x=a$ olmak üzere iki tanedir.



Grafik, üç parçadan oluşmuş.

Grafik asla düşey asimptotu kesmez

→ $f:(3,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere ,

$f(x) = \ln(x-3)$ fonksiyonunun düşey asimptotu

$\lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x-3) = -\infty$ olduğu için $x=3$

DÜŞEY ASIMPTOT tur.

2_ Yatay Asımptot :

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ veya $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ ise

$y=b$ doğrusuna yatay asımptot denir.

x sonsuza veya eksi sonsuza giderken aldığı limit değeri yatay asımptotu verir.

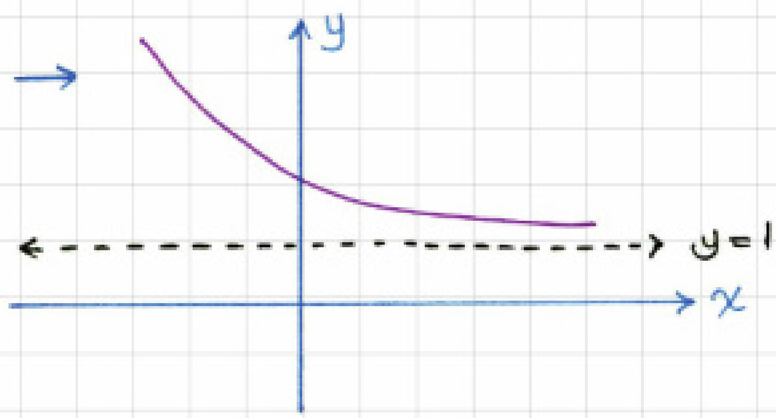
Hatırlatma:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+1}{2x^2+5} = \dfrac{3}{2}$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+1}{2x+5} = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{2x^2+5} = 0$

$y=\dfrac{3}{2}$ yatay asimptot — yatay asımptot yok — $y=0$ yatay asımptot

171

→

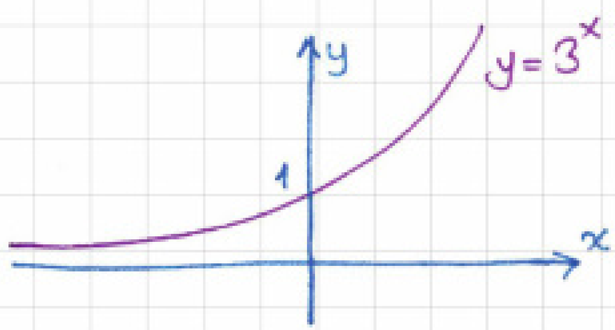


$y=1$ yatay asımptot

→ $y=3^x$ fonksiyonunda

$\lim\limits_{x \to \infty} 3^x = 3^{\infty} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{\infty}} = 0$ ($y=0$, x ekseni yatay asımptot)



$y=0$ doğrusu yatay asımptot

Düşey asimptot ile yatay asimptotun kesiştiği noktalar fonksiyonun simetri eksenidir.

Polinom fonksiyonların asimptotu yoktur.

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken ;

→ Fonksiyonun tanım kümesi bulunur.

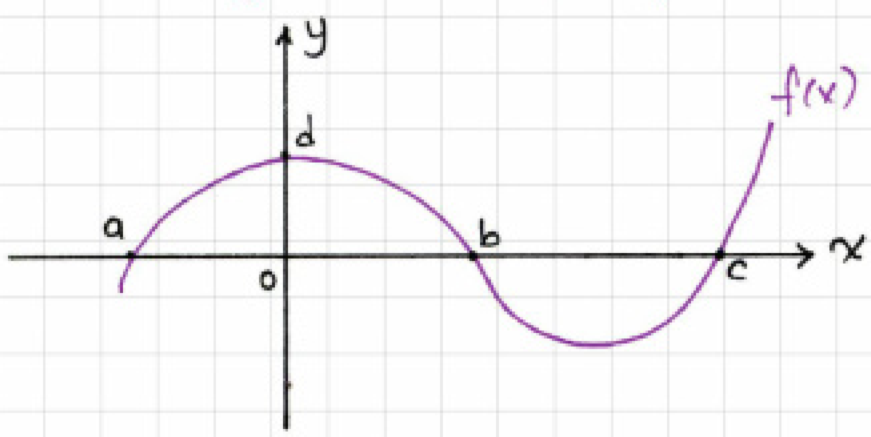
→ Varsa, eksenleri kestiği noktalar bulunur.

→ Varsa, asimptotlar bulunur.

→ Birinci türev yardımıyla, artan-azalan olduğu aralıklar ve yerel ekstremum noktaları bulunur.

→ İkinci türev yardımıyla, içbükey-dışbükey olduğu aralıklar bulunur.

Grafiği verilen fonksiyonun denklemini yazarken



$x=a$, $x=b$ ve $x=c$ $f(x)$ in kökleridir.

$(x-a)$, $(x-b)$ ve $(x-c)$ çarpanlarıdır.

$$y = m \cdot (x-a)(x-b)(x-c)$$

$(0,d)$ noktası, $f(x)$ denklemini sağlar.

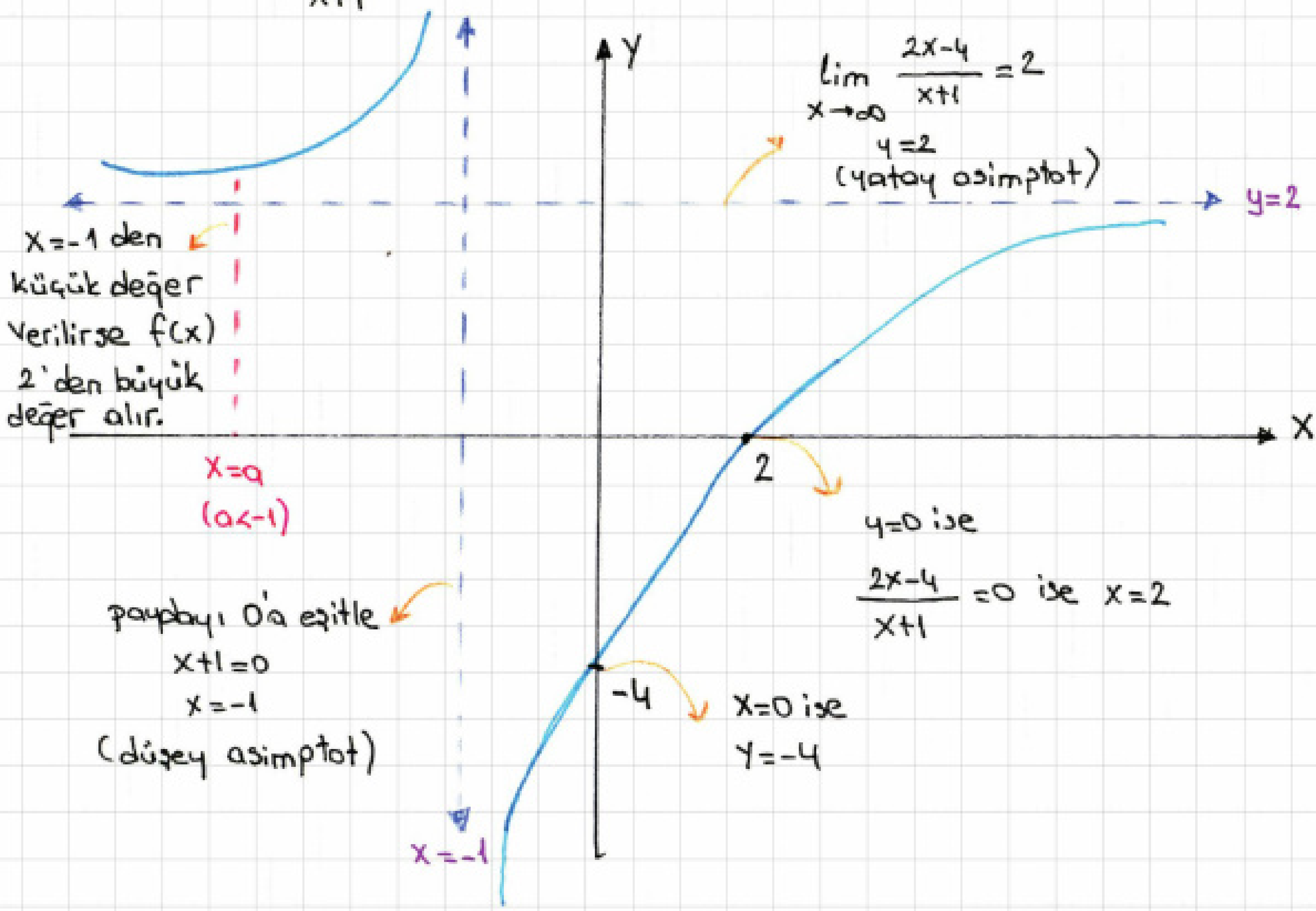
m değerini bulmak için bu nokta kullanılmalıdır.

Test sorusu çözerken:

$f(x) = \frac{x+a}{(x+b)(x+c)}$ gibi fonksiyonların grafiği aranırken,

- önce asimptotlardan yola çıkın
- f(x) üzerinden değer seçerek, şıkları deneyin.

• $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini bulalım.



INTEGRAL :

Türevi alınan bir fonksiyonun ilk halini bulmak için yapılan işleme integral denir.

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x \quad \text{ise} \quad d(x^2) = 2x\,dx$$ eşitliğine diferansiyel denir.

x^2 nin türevini al

önümde türevi alınmış bir fonksiyon var. (x e göre türevi alınmış)

2x fonksiyonunun ilk halini bulmak için integralini alalım.

$$\int 2x\,dx = x^2$$

integral işareti

Ancak, x^2+1 in türevi
x^2+3 ün türevi
x^2+5 in türevi
⋮
x^2+c nin türevi de $2x$ olur.

sabit sayı

İntegrali alınan bir fonksiyonun, ilk halinde varsa sabit sayıyı bulamadığımız için sonuca "c" eklemek gerekir.

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$ olmalıdır.

→ $d(x^2+1) = 2x\,dx$ ise
$\int 2x\,dx = x^2 + c$ yazılmalıdır.

İntegral Alma Kuralları :

* $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

* $\int dx = x + c$

* $\int a\, dx = ax + c$

* $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

* $\int e^x dx = e^x + c$

* $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

* $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

* $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

* $\int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

* $\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

İntegral Alma Özellikleri :

* $\int (f(x) \mp g(x))\, dx = \int f(x) dx \mp \int g(x) dx$

* $\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$

İntegral, toplama üzerinde tanımlıdır. Yani integral içindeki işlem, toplama veya çıkarma olmalıdır.

İntegral Alma Yöntemleri

Değişken Değiştirme :

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx \quad \text{veya} \quad \int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx$$

işlemlerinde direkt olarak integral alamıyorsak , $f(x)$ veya $g(x)$ ten birine "u" denir. u denilen fonksiyonun türevi, diğer fonksiyonu vermelidir.

Örneğin ,

$$\int (x^2-3x)^3 \cdot (2x-3)\, dx$$ ifadesinde

$x^2-3x=u$ denirse , türevi diğer fonksiyonu verecektir.

$$u = \underbrace{x^2 - 3x}$$

u'ya göre türev al

x'e göre türev al

Her iki tarafın türevi alınırsa ,

$du = (2x-3)\,dx$ eşitliği bulunur. Soruda bulunan ifadeler yerlerine yazılırsa

$$\int \underbrace{(x^2-3x)^3}_{u} \cdot \underbrace{(2x-3)\,dx}_{du} = \int u^3 \cdot du$$

⇒ integral kolaylaştı

$$\int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + c$$ (u yerine değerini yazalım)

$$= \frac{(x^2-3x)^4}{4} + c$$

Neye u denir ?

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx \Rightarrow u = \sin x$$

$$\int \sqrt[3]{x^2+3} \cdot x \, dx \Rightarrow u = x^2+3$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} \, dx \Rightarrow u = \ln x$$

$$\int e^{x^2+3} \cdot x \, dx \Rightarrow u = x^2+3$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(\ln x)} \Rightarrow u = \ln x$$

$$\int \frac{e^x}{\sin^2(e^x)} \, dx \Rightarrow u = e^x$$

(*) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$ integralinde $u^2 = x+1$ dönüşümü yapılırsa;

$$u^2 = x+1 \longrightarrow x = u^2-1$$

$$2u\,du = dx$$

$$\int \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2}} \cdot 2u\,du = \int \frac{u^2-1}{\cancel{u}} \cdot 2\cancel{u} \cdot du$$

$$= 2\int (u^2-1)\, du$$ integrali elde edilir.

NOT: Kesir şeklindeki fonksiyonlarda ilk önce paydanın türevine bakılmalıdır?

- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$ dir.

- $$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

  $\frac{1}{a}$ → içinin türevine bölmeyi unutma!

※ $$\int \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x| + c$$

※ $$\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x^2| + c$$

x^3+3x^2 → türevi $3x^2+6x = 3(x^2+2x)$

- $$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

- $$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

※ $$\int \sin(2x-1)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-1) + c$$

※ $$\int \cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$$

※ $$\int e^{3x+2}\,dx = \frac{e^{3x+2}}{3} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(5x+1)}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\tan(5x+1) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$$

Basit Kesirlere Ayırma

$\Rightarrow \int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+x}\,dx$

Payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşit ise polinom bölmesi yapılmalıdır.

$\Rightarrow \int \frac{2x-1}{x^2-x-1}\,dx$

Paydanın türevine bakılmalıdır.

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}\,dx = \ln|x^2-x-1| + c$$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x^3-x}\,dx$

Payda çarpanlarına ayrılabiliyorsa, basit kesirlere ayrılmalıdır.

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

A nın paydasını 0 yapan değeri, eşitliğin solundaki kesirde x yerine yaz. (x-1 çarpanını görmeden)

$$A = \frac{1}{\underset{1}{x}(\cancel{x-1})\underset{1}{(x+1)}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$\Longrightarrow$ Çarpanlarına ayrılmazsa, pay kısmı 1. dereceden yazılmalıdır.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$$

$$\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

Payda eşitleyerek A, B ve C değerleri bulunabilir.

KISMİ İNTEGRAL

$$\int d(u \cdot v) = u \cdot v$$

$$\int u\,dv + v\,du = u \cdot v$$

$$\boxed{\int u\,dv = u v - \int v \cdot du}$$

$\int f(x) \cdot g(x)\,dx$ integrali bilinen yollardan alınamazsa, kısmi integral aklımıza gelmelidir.

f(x) ve g(x) den hangisine u denilmelidir?

LOPTÜ

L → logaritma fonksiyon: $\log x$, $\ln x$, ⋮

P → Polinom fonksiyon: x, x^2+1, ...

T → Trigonometrik fonksiyon: $\sin x$, $\cos x$, ...

Ü → üstel fonksiyon: e^x, 2^x, ...

Sıralamasında önce gelen fonksiyona u denir. Kalanlara ise dv denir.

$$\int \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g(x)dx}_{dv} = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Örneğin ,

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{polinom} \\ \text{fonksiyon}}}{x} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{trigonometrik fonksiyon}} \, dx$$

$u = x$
(polinom fonksiyona u denir)

$\cos x \, dx = dv$
(kalanlara dv denir)

$du = dx$
(iki tarafın türevi alındı)

$\sin x = v$
(iki tarafın integrali alındı)

Bulunan ifadeler $u \cdot v - \int v \cdot du$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx$$

$$= x \cdot \sin x - (-\cos x) + c$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + c$$

PRATIK YOL

$$\int (x+2) \cdot e^x \, dx$$

(LOPTÜ'den seç) Türevi | (Diğer ifade) İntegrali

Loptü Sıralamasında önce gelenin türevi alınır. Türev "0" olana kadar devam et.

Türevi	İntegrali
$+ / x+2$	e^x
$- / 1$	e^x
$+ / 0$	e^x

integrali

integrali

+ 'dan başlayarak işaret değiştir.

Çapraz yöntemle çarpma işlemi yap.

$$= (x+2)e^x - 1 \cdot e^x + c$$

$$= (x+2)e^x - e^x + c$$

$$\int \ln x \, dx = ?$$

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx$$

logaritmik fonksiyon (türevi alınacak)

polinom fonksiyon (integrali alınacak)

Türev	Integral
$+$ $\ln x$	1
$-$ $\frac{1}{x}$	x

son adımda (düz çarpım) integral şeklinde yazılacak

$$= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = ?$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx$$

üstel fonksiyon (integrali alınacak)

trigonometrik fonksiyon (türevi alınacak)

Türev	Integral
$+$ $\sin x$	e^x
$-$ $\cos x$	e^x
$+$ $-\sin x$	e^x

Soruda e^x in yanındaki ifadenin ters işaretlisini bulunca işlem bitirilir.

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$$

eşitliğin diğer tarafına + olarak atılırsa

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) + c$$

$$= \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$$

Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

* $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ $\quad u = \cos x$ denilmelidir.

$du = -\sin x \, dx$

$= \int -\frac{1}{u} du$ $\quad -du = \sin x \, dx$

* $\int \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx = \int \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2} dx$

$= \frac{1}{2} \int \sin x \, dx$

Trigonometrik özdeşlikleri kullanmayı unutma

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

* $\int \sin(\underbrace{2x+3}) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+3) + c$

İçinin türevine bölmeyi unutma

* $\int \tan^2 x \, dx = \int 1 + \tan^2 x - 1 \; dx$

İntegral kurallarını hatırlayalım

$\int (1+\tan^2 x) dx = \tan x + c$

$= \int (1+\tan^2 x) dx - \int 1 \, dx$

* $\int e^x \cdot \sin x \, dx \Rightarrow$ Kısmi integrali unutma

üstel fonksiyon

Trigonometrik fonksiyon

Yüksek Mertebeden Trigonometrik İntegral

Trigonometrik fonksiyonların integrali alınırken, trigonometrik fonksiyonlar birinci dereceye düşürülebilir.

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\qquad$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x + 1 = 2\cos^2 x$ $\qquad$ $\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

$\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \int \dfrac{\cos 2x + 1}{2}\, dx$ yazılmalıdır.

$\Rightarrow \int \sin^2 x\, dx = \int \dfrac{1 - \cos 2x}{2}\, dx$ yazılmalıdır.

$\Rightarrow \int 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$ integralinde

$\sin 2x = 2\sin x . \cos x$

$\sin^2 2x = 4\sin^2 x . \cos^2 x$

$\int \sin^2 2x\, dx = \int \dfrac{1 - \cos 4x}{2}\, dx$ yazılabilir.

$\Rightarrow \int \sin^5 x . \cos^2 x\, dx$ integrali alınırken;

Derecesi çift olan trigonometrik fonksiyona u denir.

$u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx \Rightarrow -\dfrac{du}{\sin x} = dx$

$\int \sin^5 x . u^2 . \dfrac{-du}{\sin x} = \int -\sin^4 x . u^2 . du$

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$

$= (1 - \cos^2 x)^2 = (1 - u^2)^2$

$= -\int (1-u^2)^2 . u^2 . du$ integrali düzenlenip, integral alınabilir.

$$\Rightarrow \int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$$

İki trigonometrik fonksiyonun dereceleri tek ise,

$u = \sin x$ veya $u = \cos x$ denilebilir.

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx \Rightarrow -\dfrac{du}{\sin x} = dx$

$$\int \sin^3 x \cdot u \cdot \frac{-du}{\sin x} = -\int \sin^2 x \cdot u \cdot du$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$

$= -\int (1-u^2) \cdot u \cdot du$ integrali düzenlenip, integral alınabilir.

TÜREV - İNTEGRAL İLİŞKİSİ

$$\frac{d\left(\int f(x)dx\right)}{dx} = \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Türev ile integral sadeleşebilir

$\dfrac{\cancel{d}}{\cancel{dx}} \cancel{\int} f(x) \cancel{dx}$ şeklinde sadeleştirme yapılabilir.

d ile $\int$ birbiriyle sadeleşir.

dx ler sadeleşir.

$$\int d\left(f(x)\right) = \int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

! İntegral dışarda ise önce $f(x)$ in türevi, sonra integrali alındığı için "$+c$" unutulmamalıdır.

* $\frac{d}{dx}\int \sin x \, dx = \sin x$

* $\int d(\sin x) = \sin x + c$

* $\int x \cdot f(x)\, dx = x^3 - 4x^2 - 3x - 1$

eşitliğinde sağdaki kısmın türevi, içeriyi verir.

$\int A\,dx = B \Rightarrow$ B nin türevi A dır.

$x \cdot f(x) = 3x^2 - 8x - 3$ tür.

BELİRLİ İNTEGRAL

$$\int_a^b \underbrace{f'(x)}\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

Buradaki fonksiyonun aynen integrali alınır.

Sınırlar unutulmamalıdır. Önce üstteki sınır x yerine yazılır, sonra alttaki sınır x yerine yazılıp çıkarılır.

Belirli İntegralin Özellikleri :

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (Sınırlar aynı ise sonuç 0 dır)
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (Sınırlar yer değiştirirse, integral işaret değiştirir)
- $a \leqslant c \leqslant b$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

! Belirsiz integralin tüm özellikleri geçerlidir.

※ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\pi/2}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1$

$= -1$ //

※ $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$ //

! Parçalı fonksiyon ve mutlak değer fonksiyonunun integralleri alınırken, integral kritik noktalara göre parçalanır.

※ $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ 2x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x+2, & x \geq 1 \end{cases}$ fonksiyonu için

$\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x-1)\,dx + \int_0^1 (2x+1)\,dx + \int_1^3 (x+2)\,dx$ olur.

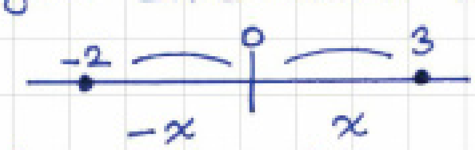
※ $f(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonu için

$\rightarrow \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x+1)\,dx$

$\rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^2 (x+1)\,dx$ olur.

※ $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x|\,dx = ?$

mutlak değerin kritik noktası $x=0$ dır.



$\displaystyle\int_{-2}^{3} |x|\,dx = \int_{-2}^{0} (-x)\,dx + \int_0^3 x\,dx$ olur.

(*) $\int_{-2}^{3} |x^2-1|\, dx = ?$

-2	-1	1	3
x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1	

$$\int_{-2}^{3} |x^2-1|\, dx = \int_{-2}^{-1} (x^2-1)\, dx + \int_{-1}^{1} (-x^2+1)\, dx + \int_{1}^{3} (x^2-1)\, dx$$

Tek-Çift Fonksiyonların İntegrali

$f(-x) = f(x)$ (ÇİFT FONKSİYON)

$f(-x) = -f(x)$ (TEK FONKSİYON)

* İntegralin sınırları simetrik ise

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \rightarrow$ f(x) tek fonksiyon ise

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx \rightarrow$ f(x) çift fonksiyon ise

$\Rightarrow \int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} x^2\,dx$ yazılabilir.

$\hookrightarrow$ çift fonksiyon

$\Rightarrow \int_{-2}^{2} x^3\,dx = 0$

$\hookrightarrow$ tek fonksiyon

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 0$$

$f(x)$ tek fonksiyon ise $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx$

* $\int_1^2 2x\,dx = \int_{-1}^{-2} 2x\,dx$

$x^2 \Big|_1^2 = x^2 \Big|_{-1}^{-2}$

$2^2 - 1^2 = (-2)^2 - (-1)^2$

$3 = 3$ bulunur.

$f(x)$ çift fonksiyon ise $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx$

* $\int_1^2 x^2\,dx = -\int_{-1}^{-2} x^2\,dx$

$\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = -\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{-2}$

$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = -\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)$

$\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$ bulunur.

Türev Altında İntegral

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$$

Sınırlar ve integral içindeki fonksiyon farklı değişkenler içeriyorsa ve $F'(x)$ istenirse :

$$F'(x) = f(\underbrace{b(x)}_{\text{Üst sınır f de yazılır}}) \cdot \underbrace{b'(x)}_{\text{üst sınırın türevi}} - f(\underbrace{a(x)}_{\text{alt sınır f de yazılır.}}) \cdot \underbrace{a'(x)}_{\text{alt sınırın türevi}}$$

$$\frac{d\left(\int_{10}^{x^2} \sin 2t\,dt\right)}{dx} = \sin 2x^2 . 2x - \sin 20 . 0$$

altsınırın türevi

$$= 2x . \sin 2x^2$$

$$\frac{d\left(\int_{3}^{8} (2t-5)\,dt\right)}{dx} = 0$$

t değişkeninin x'e göre türevi 0'dır.

$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} t^2 dx$ ise $f'(4) = ?$

$$f'(x) = (\sqrt{x})^2 . \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1^2 . 0$$

$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}}$ ise $f'(4) = \frac{4}{2\sqrt{4}} = 1$

Sınır Değiştirme:

$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ integralinde $u = \ln x$ dönüşümü yapalım.

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$u = \ln x$ eşitliğinde x yerine integralin sınırlarını yazalım.

$e^2 \longrightarrow x = e^2$ ise $u = \ln e^2 = 2$

$e \longrightarrow x = e$ ise $u = \ln e = 1$

$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \int_1^2 u\,du$ elde edilir.

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{1}{4+e^x}\,dx$$ integralinde $u = 4+e^x$ dönüşümü yapılırsa, hangi integral elde edilir?

$u = 4+e^x$ ise $\quad (e^x = u-4)$

$du = e^x \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$ tir.

$e^x \rightarrow u-4$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{1}{4+e^x}\,dx = \int_{7}^{8} \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{u-4} = \int_{7}^{8} \frac{1}{u^2-4u}$$ elde edilir.

$u = 4+e^x$ eşitliğinde $x = \ln 4$ ise $u = 4+e^{\ln 4} = 4+4 = 8$

$x = \ln 3$ ise $u = 4+e^{\ln 3} = 4+3 = 7$

$$\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$$ integralinde $x = 4.\sin u$ dönüşümü yapalım.

$x = 4\sin u$

$dx = 4\cos u\,du$

Sınırlar

$x = 4\sin u$ eşitliğinde

$x = 4$ ise $u = \frac{\pi}{2}$

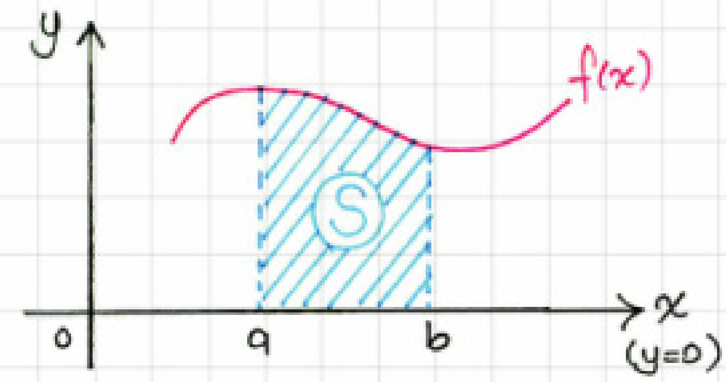
$x = 0$ ise $u = 0$ bulunur.

$$\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{16-16\sin^2 u}\,.\,4\cos u\,du = \int_{0}^{\pi/2} 4\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos^2 u}\,.\,4\,.\cos u\,.\,du$$

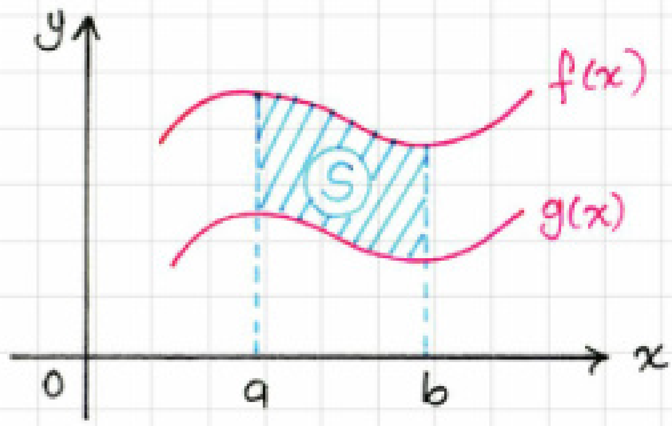
$$\int_{0}^{\pi/2} 4.\cos u\,.\,4\cos u\,.\,du = 16\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 u\,.\,du$$

Belirli İntegral Uygulamaları

Alan Hesabı

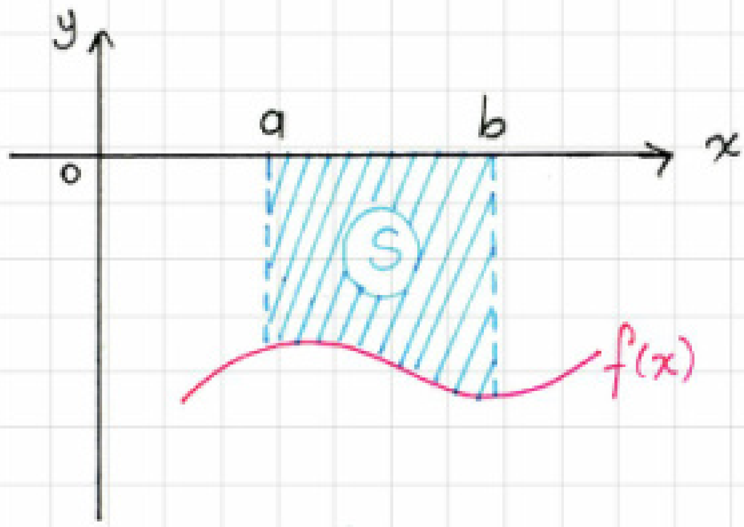


$$S=\int_a^b (f(x)-0)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

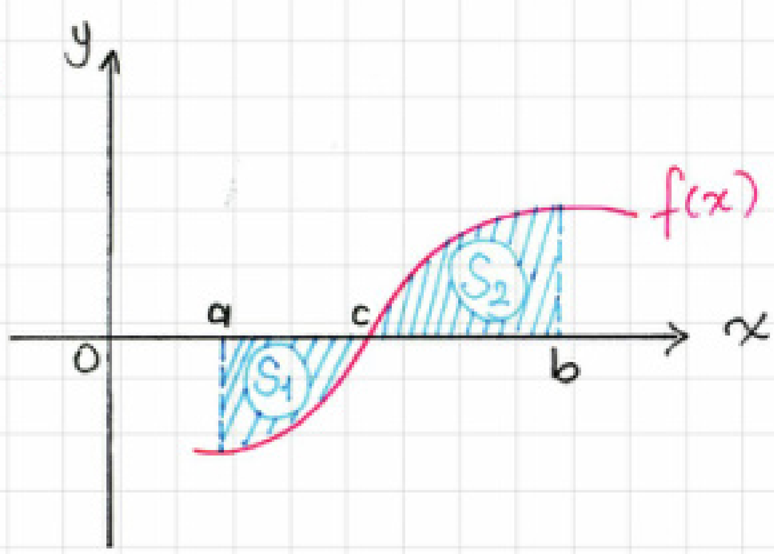


$$S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$

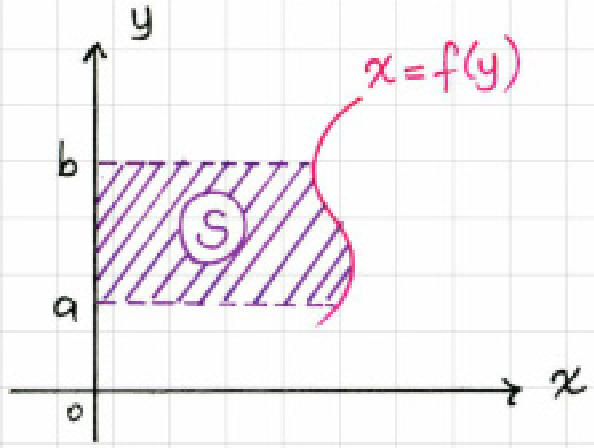


$$\int_a^c f(x)\,dx=-S_1$$

$$\int_c^b f(x)\,dx=S_2$$

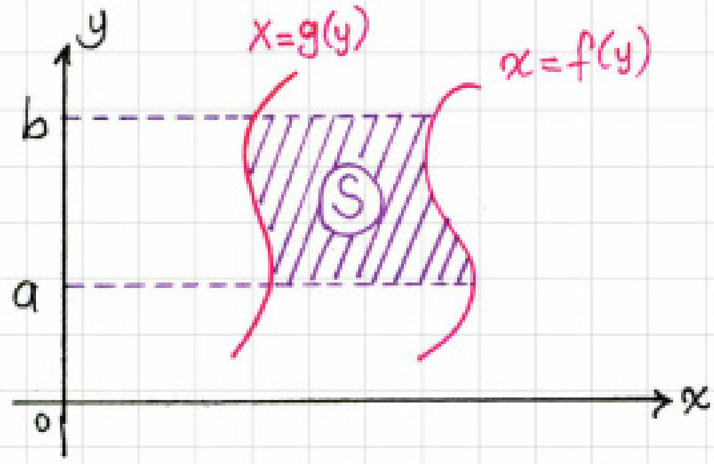
$$\int_a^b f(x)\,dx=-S_1+S_2$$

Oy Ekseni ile Alan Bulma

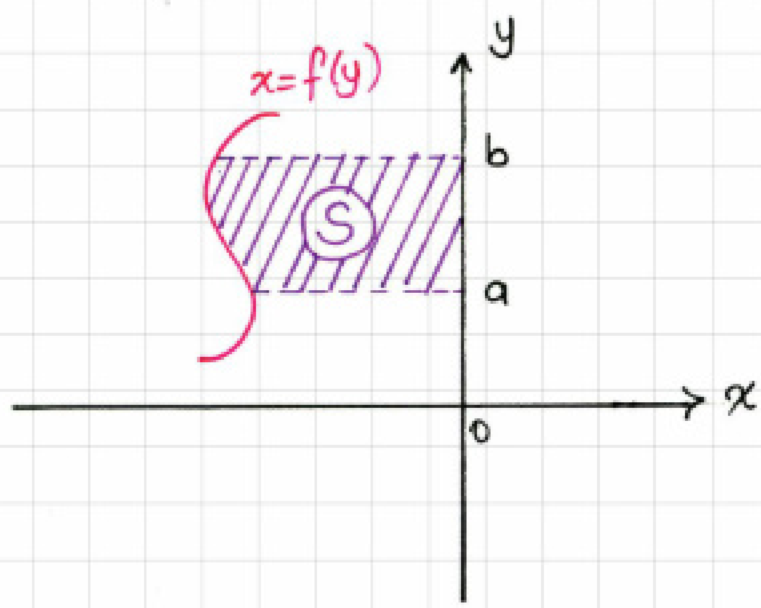


$$S = \int_a^b f(y)\,dy$$

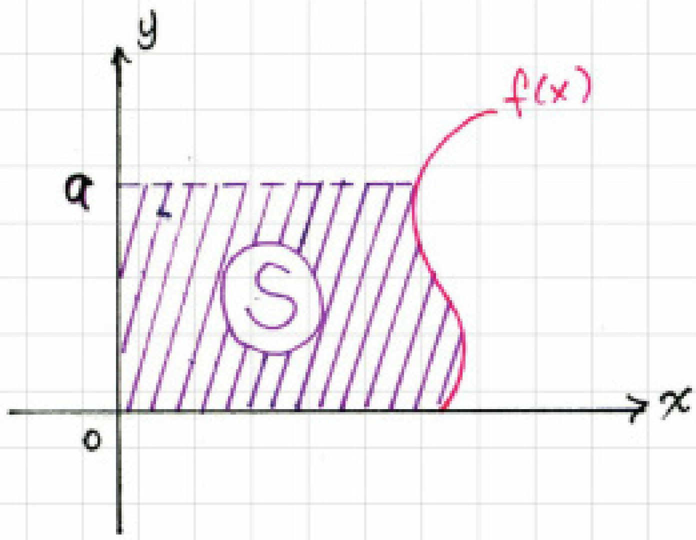
Sınırlar y ekseninden alınırsa integral içine y ye bağlı bir fonksiyon yazılmalıdır.



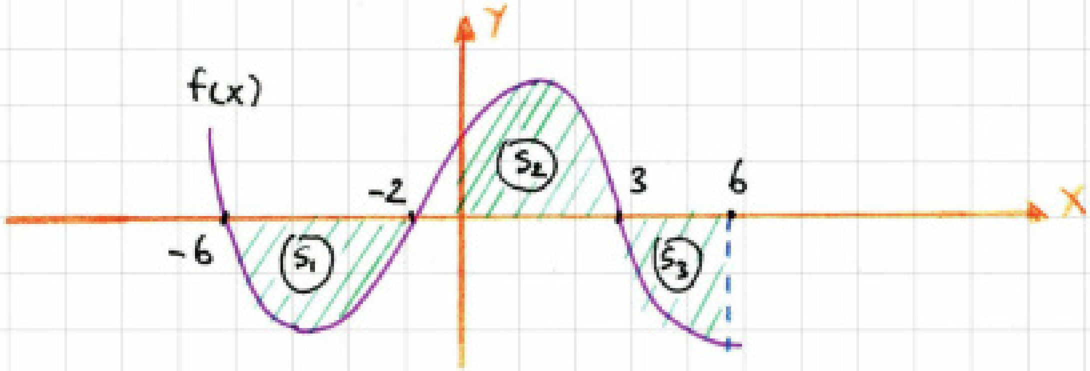
$$S = \int_a^b \big(f(y) - g(y)\big)\,dy$$



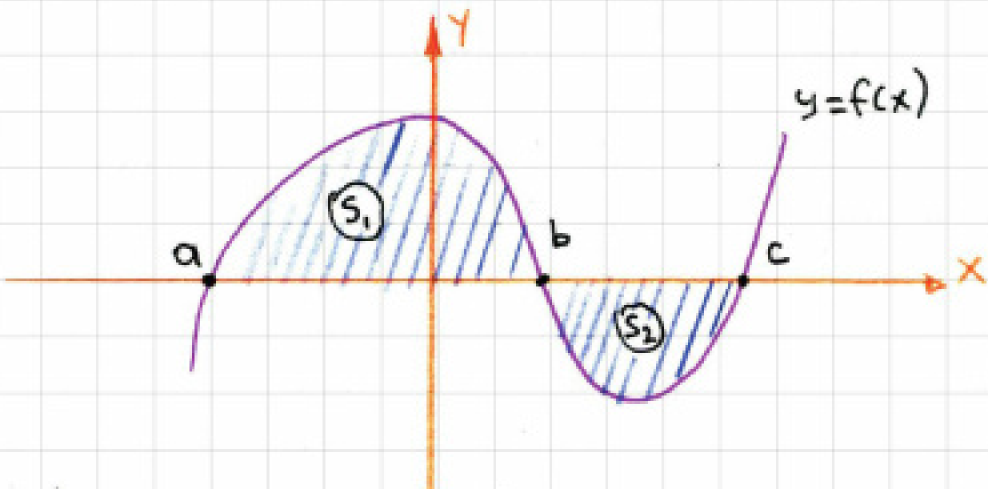
$$S = -\int_a^b f(y)\,dy$$



$$S = \int_0^a f^{-1}(x)\,dx$$

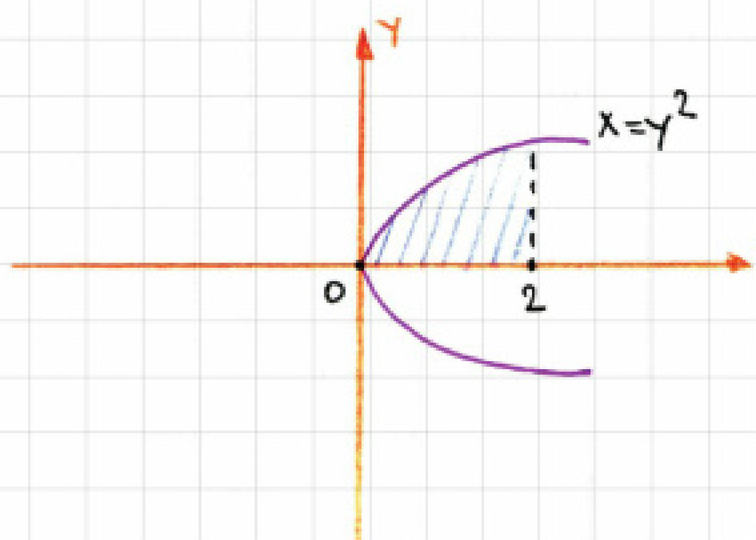


$$\int_{-6}^{6} f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_3$$ tür.

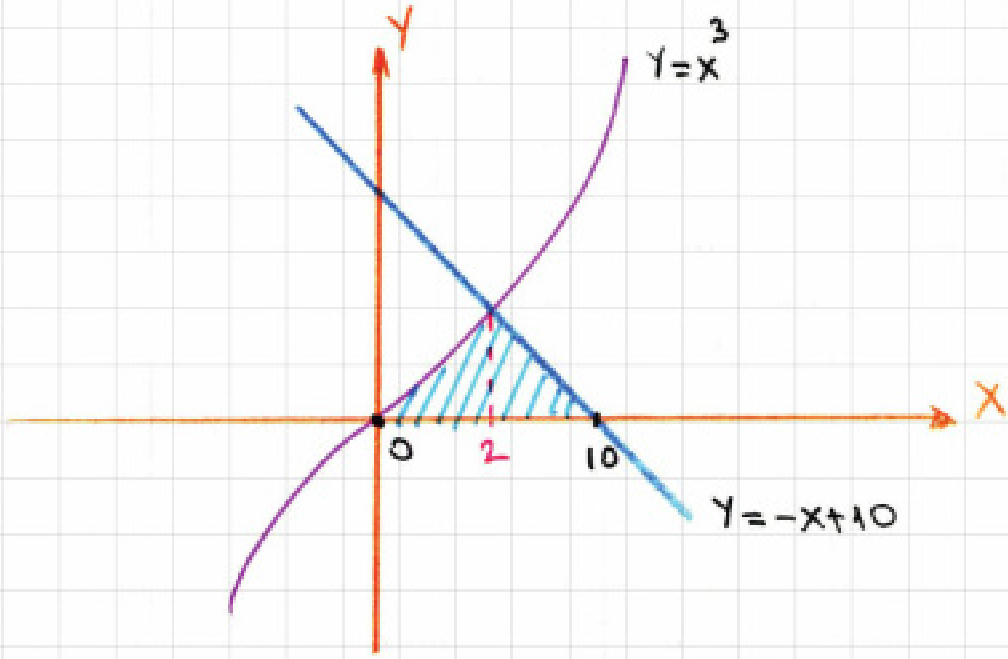


$\int_{a}^{b} f(x)dx = 10$ ve $\int_{b}^{c} f(x)dx = -5$ ise

taralı alanlar toplamı, $S_1 + S_2 = 10 + 5 = 15$ tir.



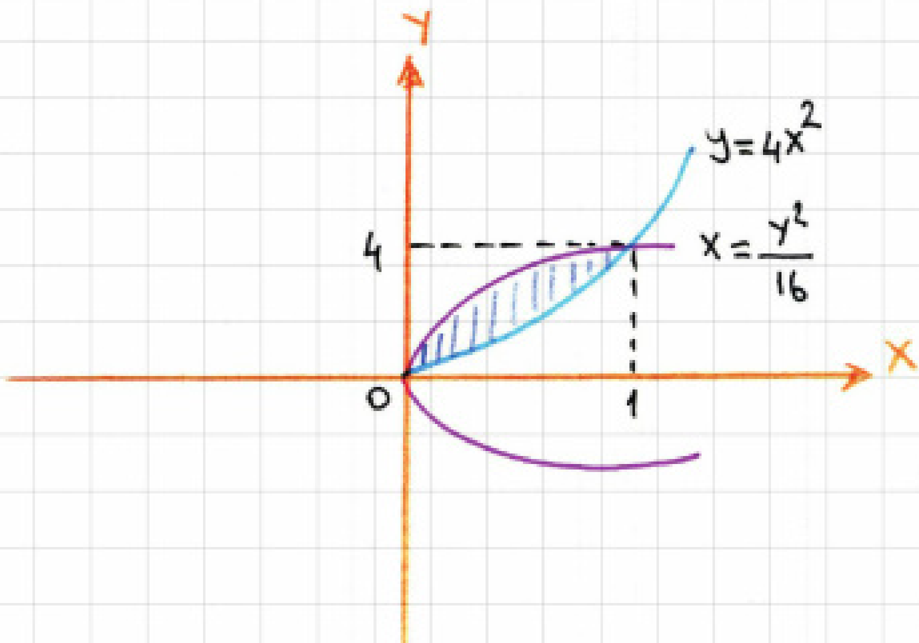
Taralı Alan: $\int_{0}^{2} \sqrt{x}\,dx$ şeklinde yazılır.



Taralı alanın bulunabilmesi için $Y=x^3$ ve $Y=-x+10$ denklemleri eşitlenerek kesiştikleri nokta bulunmalıdır.

$x^3=-x+10$ ise $x=2$ dir.

Taralı alan: $\int_0^2 x^3dx+\int_2^{10}(-x+10)dx$ tir.



$x=\frac{y^2}{16} \Rightarrow y=4\sqrt{x}$

$4x^2=4\sqrt{x}$
$x=1$ bulunur.

Taralı Alan: $\int_0^1 (4\sqrt{x}-4x^2)\,dx$ veya

$\int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y}}{2}-\frac{y^2}{16}\right)dy$ ile bulunabilir.