

**Τράπεζα Θεμάτων
Γ' Λυκείου –
Μαθηματικά
κεφάλαιο 3^ο**

61 θέματα - 07/07/2024

Θέμα 23218 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K . (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)
- γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 , με $x_1 < -1 < x_2$.
- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x = x_2, x = -1$. (Μονάδες 8)

Θέμα 23219 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 x f'(x) dx < 1$. (Μονάδες 6)

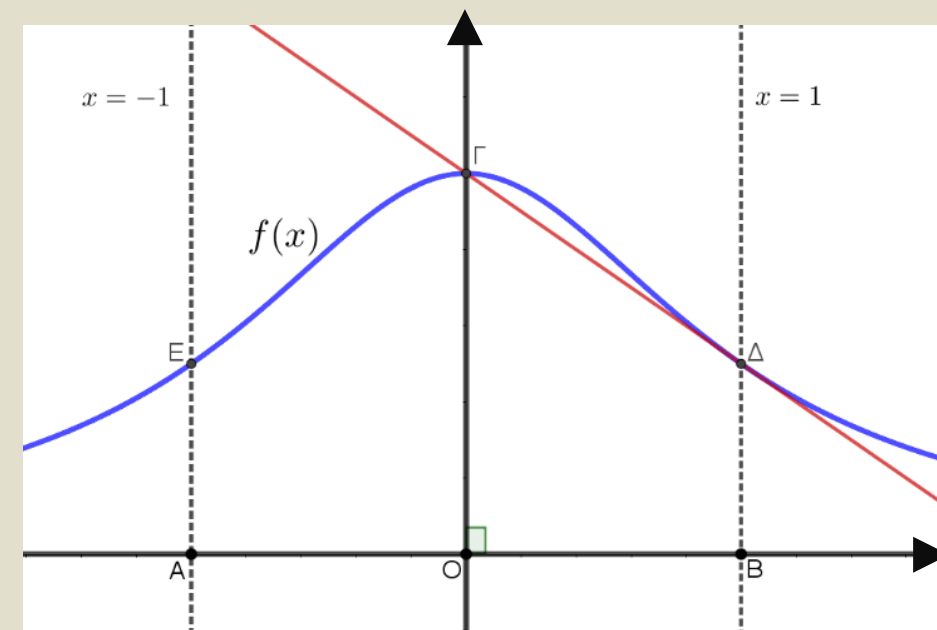
Θέμα 23955 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0, 1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)



Θέμα 23957 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \cdot \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$. (Μονάδες 10)

Θέμα 24275 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (Μονάδες 07)
- b) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)
- c) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \rho$ ισούται με $E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho - 1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

Θέμα 24704 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$. (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$. (Μονάδες 10)

Θέμα 24758 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ και για $x = -1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$. (Μονάδες 6)

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$. (Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$. (Μονάδες 6)

Θέμα 24769 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0 = 1$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$. (Μονάδες 5)

Θέμα 24770 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

(Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 24771 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$

και $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{2x}{x^2+1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B, Γ, Δ του ορθογωνίου ABΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου A(α , 0). (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ABΓΔ δίνεται από τον τύπο

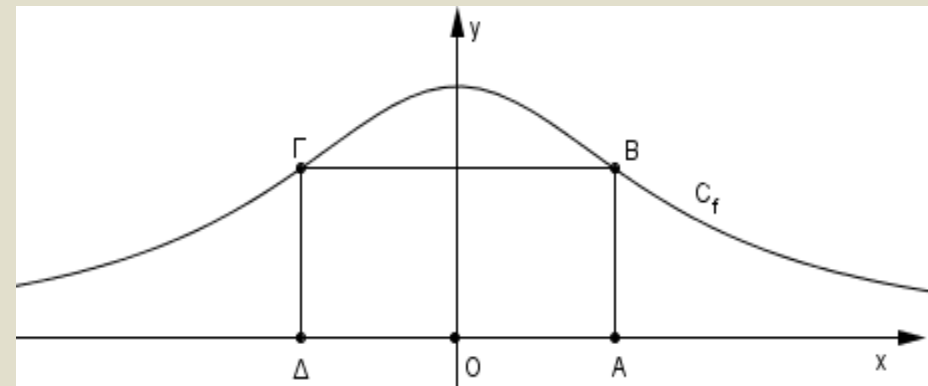
$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \quad \alpha > 0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2} \quad (\text{Μονάδες 6})$$



Θέμα 25147 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους. (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των c_f, c_g . (Μονάδες 9)

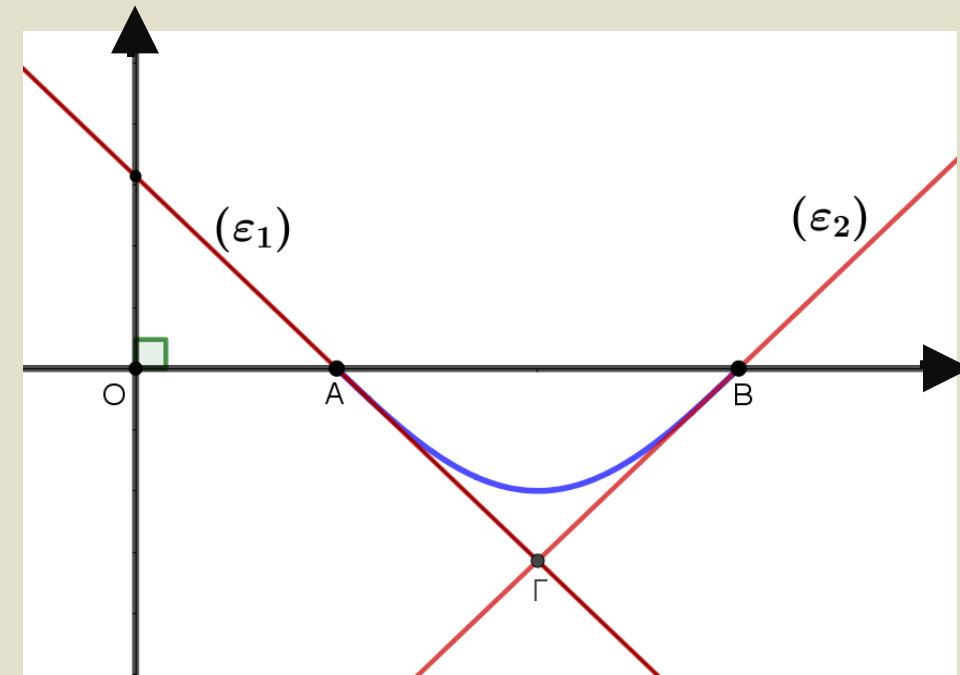
Θέμα 25235 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι $(\varepsilon_1) \quad y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$. (Μονάδες 8)



Θέμα 25259 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$. (Μονάδες 06)

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x)-1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$. (Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. (Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$. (Μονάδες 06)

Θέμα 25746 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}f(x)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$. (Μονάδες 6)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$. (Μονάδες 7)
- δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$. (Μονάδες 6)

Θέμα 25747 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0, 2]$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0, 2]$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$. (Μονάδες 6)

Θέμα 25757 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

- a) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 09)
- b) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0, 1]$, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1 - x$. (Μονάδες 07)
- c) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

Θέμα 25765 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} . (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$, $x = 1$.
(Μονάδες 6)

Θέμα 25766 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(2) = 5$$

τότε:

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$. (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$. (Μονάδες 5)

Θέμα 26183 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1 , αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1 .
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$.
(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 10)

Θέμα 26184 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$.
(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x) dx$. (Μονάδες 9)

Θέμα 26631 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$.

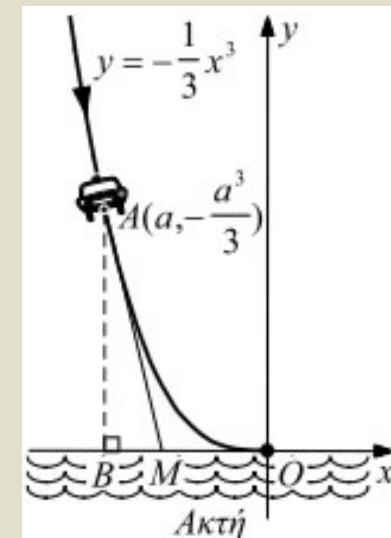
- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς ασύμπτωτες. (Μονάδες 8)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln \left(\frac{x^2+3}{2x^2+1} \right) = 2-x^2$ (Μονάδες 8)

Θέμα 27031 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A . (Μονάδες 06)

β) Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$,

- να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 . (Μονάδες 08)
- Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M . (Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 . (Μονάδες 09)

Θέμα 27321 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0, 1)$ και $\alpha \in (1, +\infty)$.

(α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y ; (Μονάδες 9)

(β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

(γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f . Να αποδείξετε ότι $F(\beta) -$

$$F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

Θέμα 27322 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \text{ όπου:}$$

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.

k είναι μια θετική σταθερά.

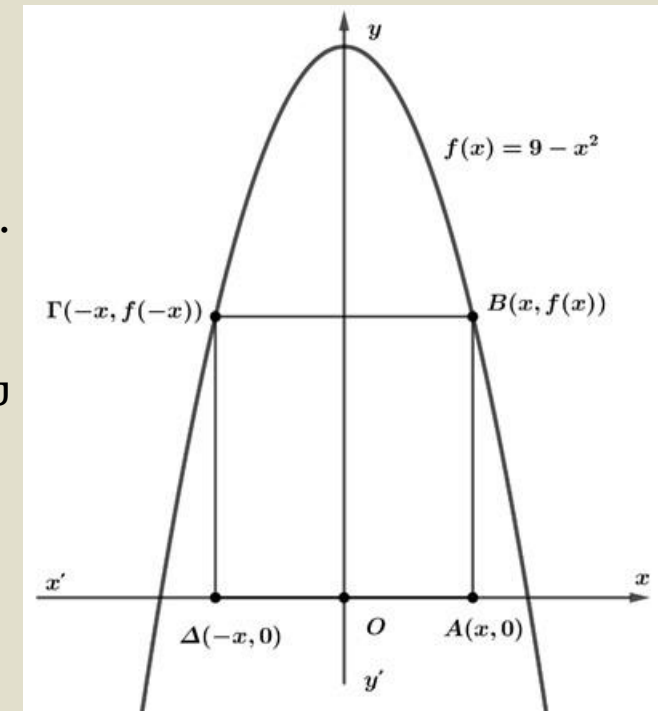
α) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$. (Μονάδες 10)

Θέμα 27408 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές Β(x, f(x)) και Γ(-x, f(-x)) είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x \in [0, 3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 18x - 2x^3$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

Θέμα 27668 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 3)(x - \lambda)(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ με $1 < \lambda < 3$.

- a) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)
- b) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 08)
- c) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4 - x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x) dx$. (Μονάδες 05)

Θέμα 28338 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου f' τέμνονται στο σημείο $A(-2, 0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

i. $x_1 = 2$, (Μονάδες 5)

ii. $x_2 = -2$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f' είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού και η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $B(0, -12)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) = 3x^2 - 12$, (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = x^3 - 12x - 16$, (Μονάδες 5)

iii. η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 6)

Θέμα 28476 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0 \text{ και } f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ (Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E , που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$. (Μονάδες 07)

Θέμα 28870 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

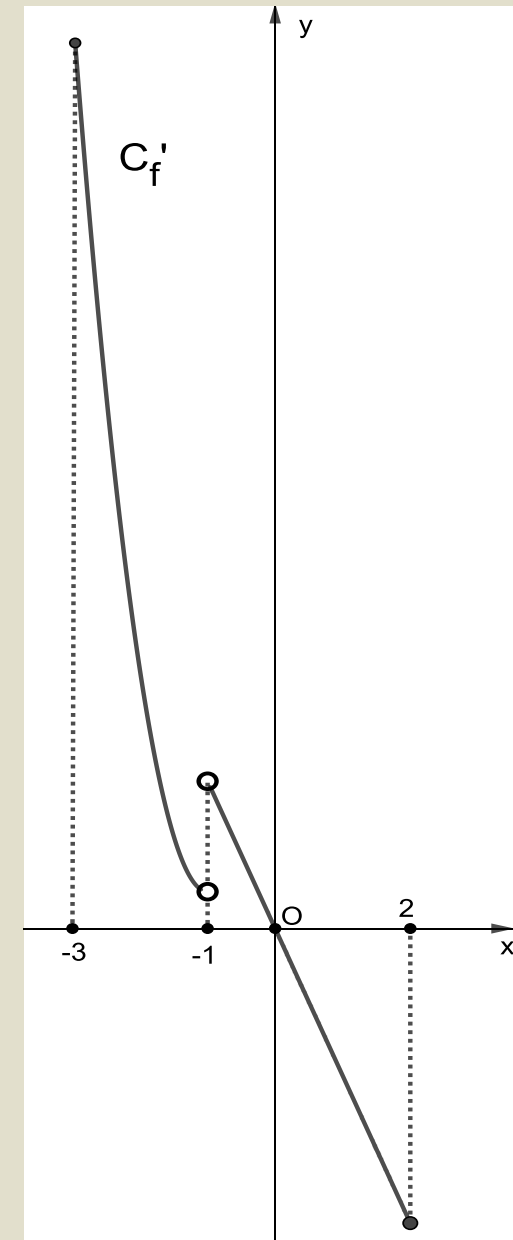
Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3,2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η C_f , που στο διάστημα $(-1,2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

- i. Τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 06)
- ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους. (Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x) dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$. (Μονάδες 06)



Θέμα 29549 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0) = f(0) = 0 \text{ και } \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = - \int_0^\pi f'(x) \sigma \upsilon \nu x dx.$ (Μονάδες 07)

β) $f(\pi) = 0.$ (Μονάδες 08)

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής. (Μονάδες 10)

Θέμα 29645 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, & x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$.
(Μονάδες 12)

β)

i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α). (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$. (Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και την ευθεία $x=0$. (Μονάδες 05)

Θέμα 29646 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f . (Μονάδες 09)
- ii. Τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB . (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 08)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B , η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα $y'y$. (Μονάδες 05)

Θέμα 29837 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου.

(Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$. (Μονάδες 6)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

δ) Αν $\varphi(x) = (f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x) dx$. (Μονάδες 5)

Θέμα 31148 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in \mathbf{R}$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ , ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι $\ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

Θέμα 31149 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1 + f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$. (Μονάδες 9)

Θέμα 31530 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 που περιέχεται στο διάστημα $(0, 1)$. (Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_0 είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1. (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_0 - \theta)x - 5}$, αν x_0 είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, 4)$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$. (Μονάδες 7)

Θέμα 31533 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

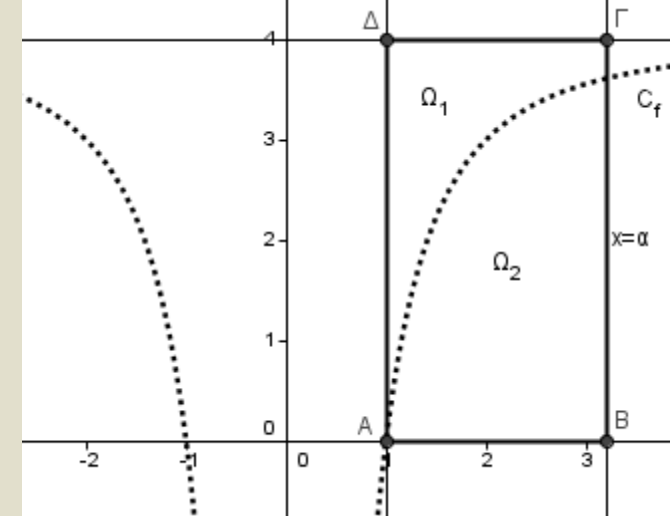
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f . (Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$. (Μονάδες 6)

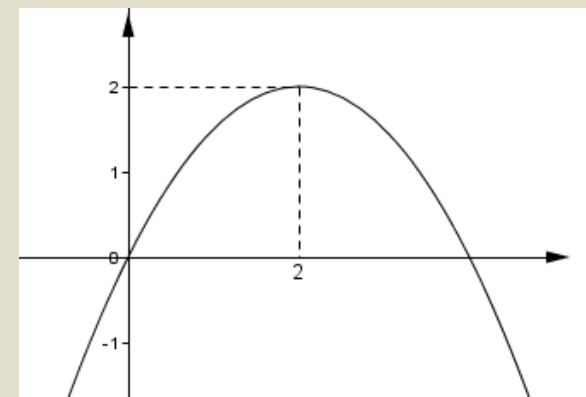
γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$, $\alpha > 1$ και $y = 4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1 , Ω_2 .

- Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων. (Μονάδες 5)
- Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$. (Μονάδες 5)



Θέμα 31534 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$

(Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$. (Μονάδες 5)

Θέμα 31551 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

και $\phi(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^\kappa \phi(x) dx = 0$. (Μονάδες 5)

Θέμα 31792 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(\ln x)^2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f . (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$. (Μονάδες 9)

Θέμα 32225 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Για μια συνεχή συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$(f(x) + x)^2 = x^2(x + 1), \text{ για κάθε } x \in [-1, +\infty),$$

$$f(1) > -1 \text{ και } f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}.$$

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1} - 1)$, $x \geq -1$. (Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι

γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x))dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1))dx$.

(Μονάδες 06)

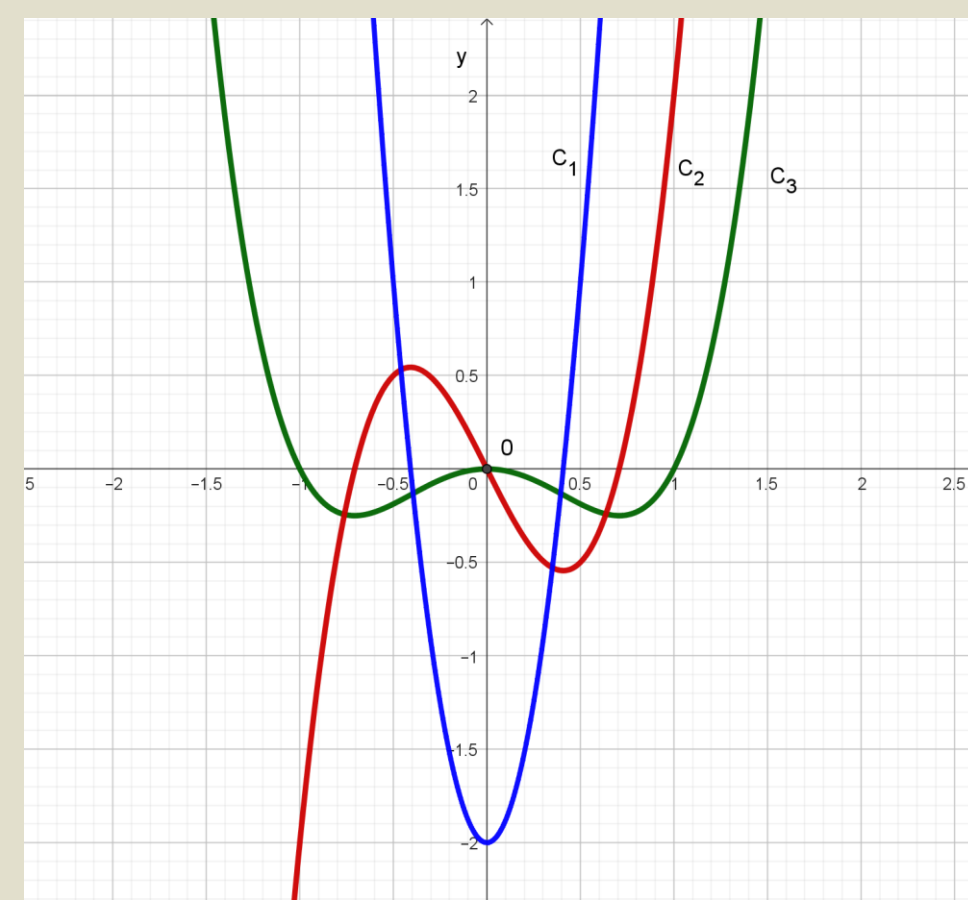
Θέμα 32693 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,

α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F . (Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F . (Μονάδες 12)

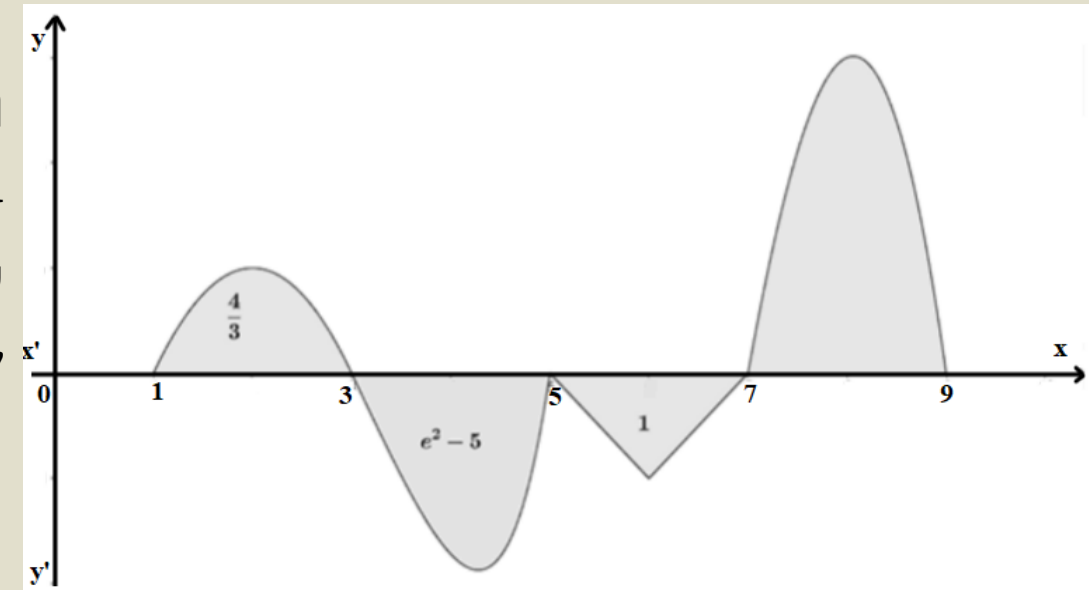


Θέμα 32800 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 7]$.

Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x) dx \right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες $1, 3, 5, 7$.



α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x) dx = 4$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 9]$. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x) dx$. (Μονάδες 08)

Θέμα 33577 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

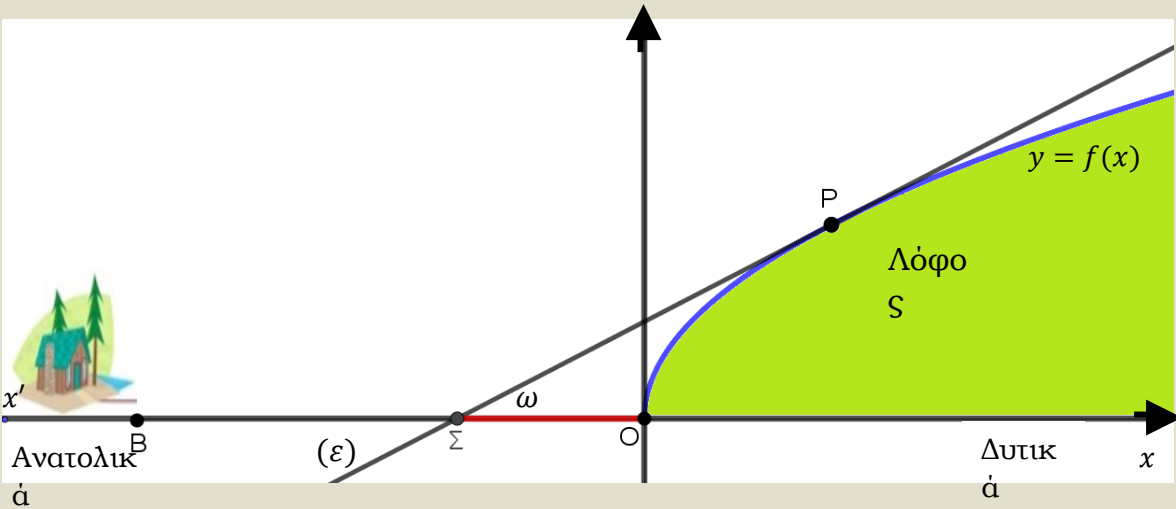
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση **B** του αρνητικού ημιάξονα **Ox'**. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα **Ox**, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του **ΟΣ**, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου **t**, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρούμε **t = 0** τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο **O** του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά.

Ας είναι $\hat{\omega} = \widehat{P\hat{S}O}$.

- α) Αν το σημείο **P** έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου **S** είναι $x_S = -x_P$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}$. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά (**ΟΣ**) τη χρονική στιγμή **t₀** κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή **t₀** η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}$ **rad** ανά λεπτό. (Μονάδες 10) Δίνεται ότι $\frac{1}{\sin^2 \omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2 \omega$.



Θέμα 33578 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + \eta \mu x \geq 1$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln(e^x + \eta \mu x)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια

αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x}{e^x + \eta \mu x}$, $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi x f'(x) dx = \frac{\pi}{e^\pi}$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta \mu x) \cdot x} dx < 1$. (Μονάδες 7)

Θέμα 33588 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$.

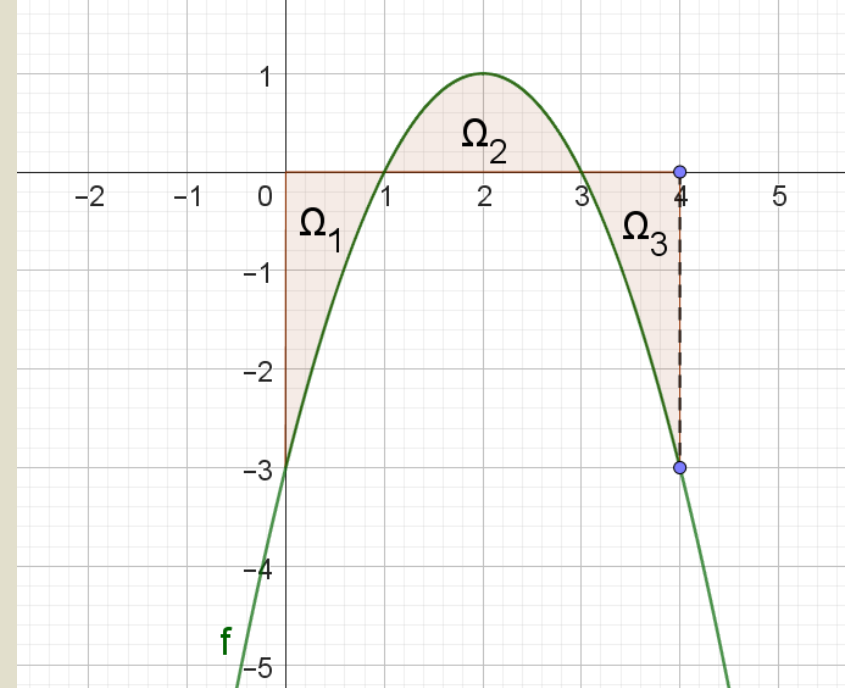
α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 f(x) dx. \text{ (Μονάδες 6)}$$

$$\int_0^3 f(x) dx. \text{ (Μονάδες 6)}$$

$$\int_0^4 f(x) dx. \text{ (Μονάδες 6)}$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x) dx - \int_4^{2023} f(x) dx$. (Μονάδες 7)



Θέμα 33593 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και $\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

- α) $\int_3^2 f(x)dx$. (Μονάδες 5)
- β) $\int_3^7 f(x)dx$. (Μονάδες 6)
- γ) $\int_7^2 f(x)dx$. (Μονάδες 6)
- δ) $\int_1^3 (f(x) - x)dx$. (Μονάδες 8)

Θέμα 33598 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y = 1$ και τη γραφική παράσταση της f .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} . (Μονάδες 5)

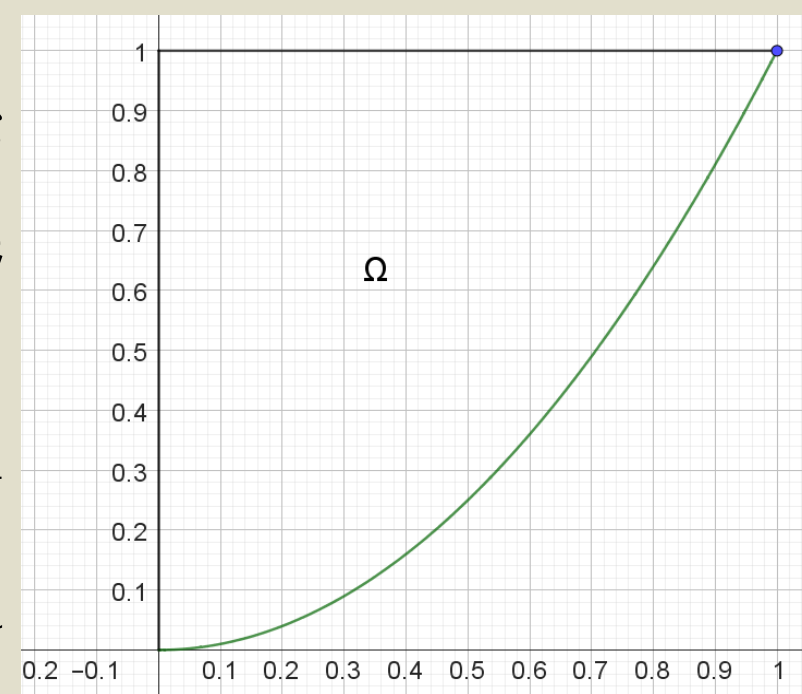
β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx$ (Μονάδες 5)

ii. $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x) dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω .
(Μονάδες 5)



Θέμα 33634 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu^2 x dx$.

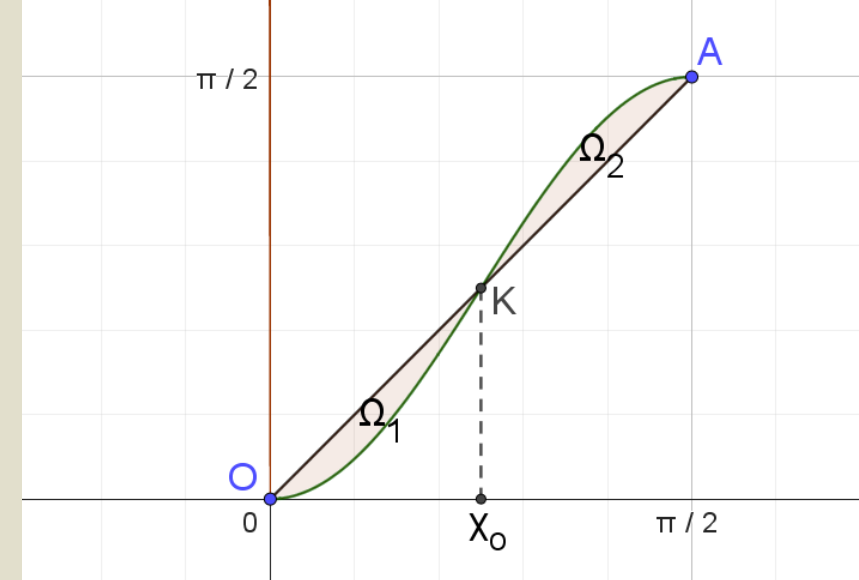
α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$. (Μονάδες 6)

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι $I = J = \frac{\pi^2}{8}$. (Μονάδες 7)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \frac{\pi}{2} \eta \mu^2 x$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η ευθεία OA τέμνει τη C_f στα σημεία $O(0,0), A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), K(x_0, f(x_0))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2 . Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του άξονα yy' και της ευθείας $y = \frac{\pi}{2}$ είναι το J . (Μονάδες 6)

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα . (Μονάδες 6)



Θέμα 33998 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοικτό τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5} dt$. (Μονάδες 06)

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln \frac{4}{5}$, για κάθε $t > 0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου. (Μονάδες 12)

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t) = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t \in [0, +\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο. (Μονάδες 07)

Θέμα 34151 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

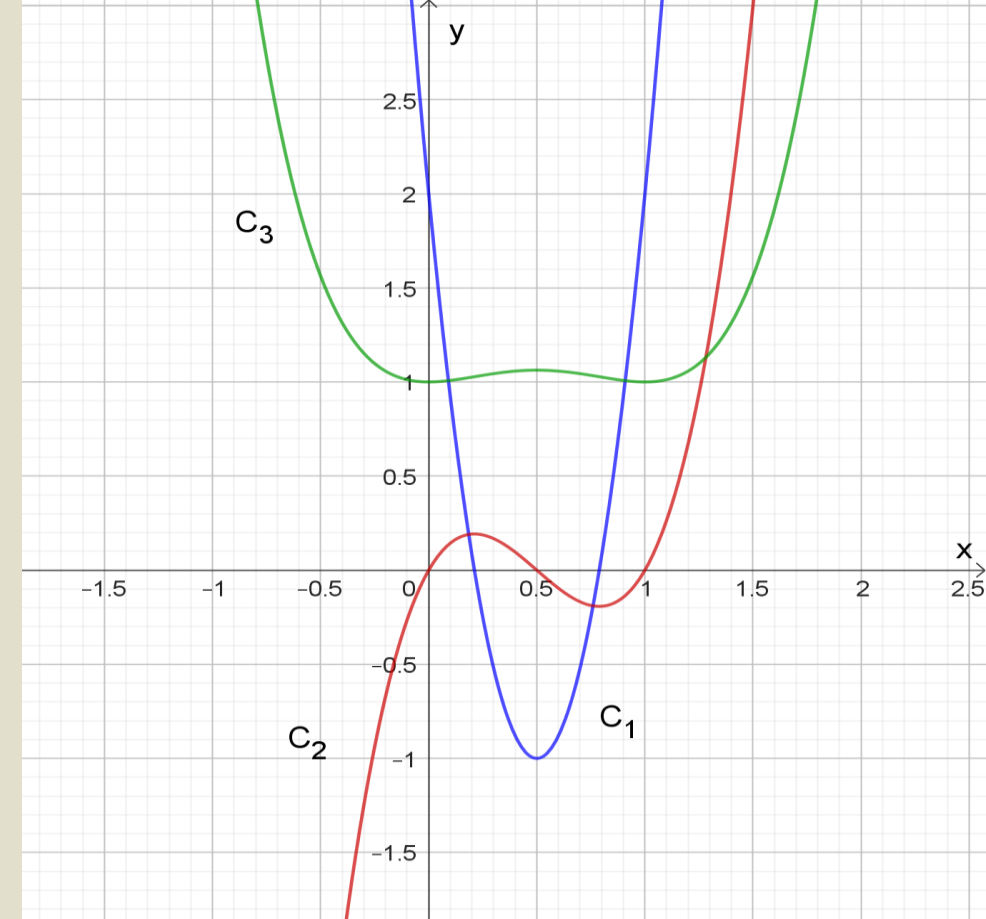
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,

α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F . (Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F . (Μονάδες 6)

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)



Θέμα 34565 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1 < \alpha < \beta$ και την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $[\alpha, \beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + \lambda\alpha - f(\alpha)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ ώστε $cf'(c) - f(c) - \lambda\alpha + f(\alpha) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c) \neq \lambda$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c, f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. (Μονάδες 7)

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{x \cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)} dx$ ισούται με -1 .

(Μονάδες 7)

Θέμα 34566 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

- $\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) f'(x) dx = -\ln 2$.
- $\beta f^2(\beta) = \alpha f^2(\alpha)$.
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x f^2(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $\ln 4$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ ισχύει $\frac{G(x) - G(\alpha)}{x - \alpha} < f(\alpha)$. (Μονάδες 7)

Θέμα 35245 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 04)
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης. (Μονάδες 08)
- γ) Να αποδείξετε ότι:
- i. $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)
 - ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha + 1) - f(\alpha) < 1$. (Μονάδες 07)

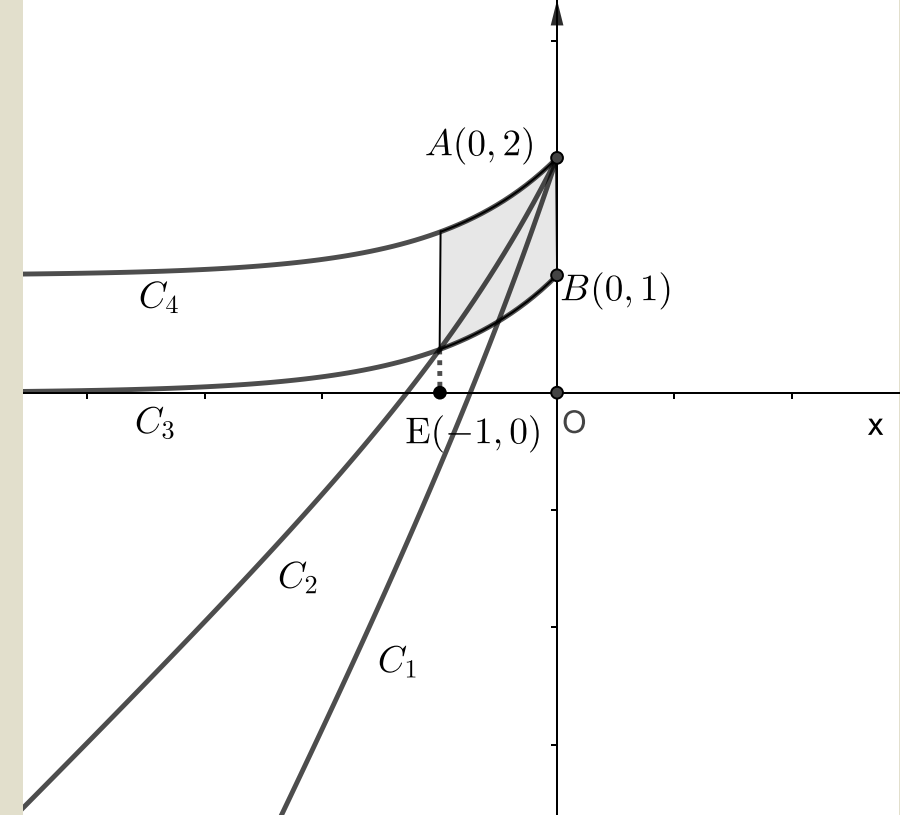
Θέμα 35302 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f , g και h με $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x + 1$ και $h(x) = e^x + x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 09)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4 . Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 0$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 07)



Θέμα 36816 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$,

για την οποία ισχύει $xf(x) = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 09)

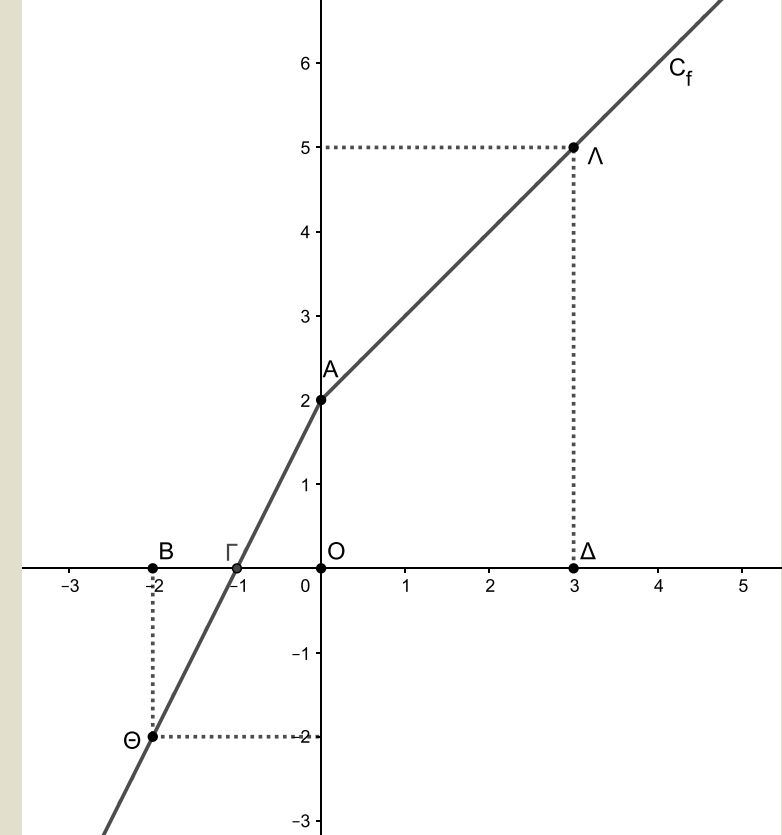
δ) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \leq \frac{1}{4}$ (Μονάδες 08)

Θέμα 36837 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή $\Theta\Lambda$ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(-1,0)$.

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ $\int_{-1}^0 f(x)dx$
 $\int_0^3 f(x)dx$ (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 3$. (Μονάδες 10)



Θέμα 36838 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g .

Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$ και $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα: $\int_3^8 f(x)dx$ $\int_5^8 2f(x)dx$ $\int_1^5 (f(x) + g(x))dx$ (Μονάδες 18)

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1, 5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$. (Μονάδες 07)

Θέμα 36849 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f με
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 - \sin x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -2$ και $x = \pi$. (Μονάδες 18)

Θέμα 24131 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$, $x \geq 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f . (Μονάδες 07)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2 . Με δεδομένα ότι

- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f και η άλλη στην γραφική παράσταση της f^{-1} ,

- $\int_{-\frac{1}{2}}^0 f^{-1}(x) dx = a$

Να βρείτε:

i. Ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της f και ποια την γραφική παράσταση της f^{-1} , (Μονάδες 04)

ii. Το πρόσημο του a καθώς και το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$ συναρτήσει του a . (Μονάδες 07)

Θέμα 35244 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \varepsilon\varphi x - 1, x \in 0, \frac{\pi}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = (1 + x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x \in 0, \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)