

**Τράπεζα θεμάτων
Γ' λυκείου –
Μαθηματικά
κεφάλαιο 2^ο**

97 θέματα - 07/07/2024

Θέμα 23197 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α , β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.

Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

(Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f .

(Μονάδες 8)

Θέμα 23199 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x > 1$ να ισχύει $xf(x)f'(x) = \frac{1}{2}$ και $f(e) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$, $x > 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 9)

Έστω $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x > 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και $B(e, 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B .
(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$.
(Μονάδες 8)

Θέμα 23200 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

- α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό a ισχύει $f(a \ln a) \leq f(\ln a)$ (Μονάδες 7)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$. (Μονάδες 6)
- δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

Θέμα 23210 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.

Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,
- τα a, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(a) < 0, f(\beta) > 0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0 .

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

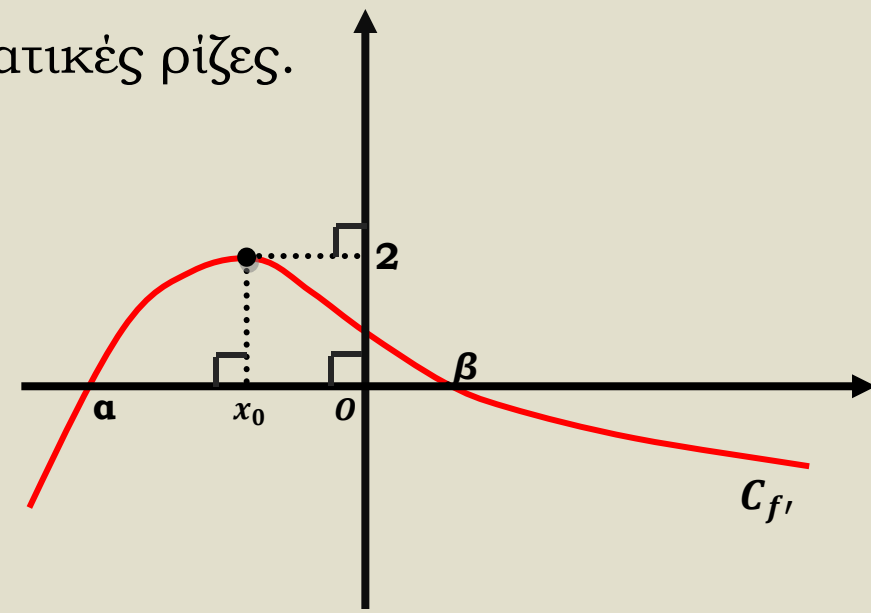
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$.

(Μονάδες 8)



Θέμα 23311 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους v που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0,1 \text{ m/sec}$. (Μονάδες 05)

Θέμα 23312 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε:

f συνεχής στο $[-2, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, για κάθε $x \in [-2, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

(Μονάδες 08)

β) Αν $f(0) = 3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x \in [-2, 2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sin x$. (Μονάδες 08)

Θέμα 23375 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \text{ (Μονάδες 06)}$$

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x + f(x)) > x$, $x \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 06)

Θέμα 23376 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις:

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$ και

2. $g(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

I. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)

II. η συνάρτηση h είναι “1-1”. (Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x - 1) + h\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0, x > 0$. (Μονάδες 08)

Θέμα 23530 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

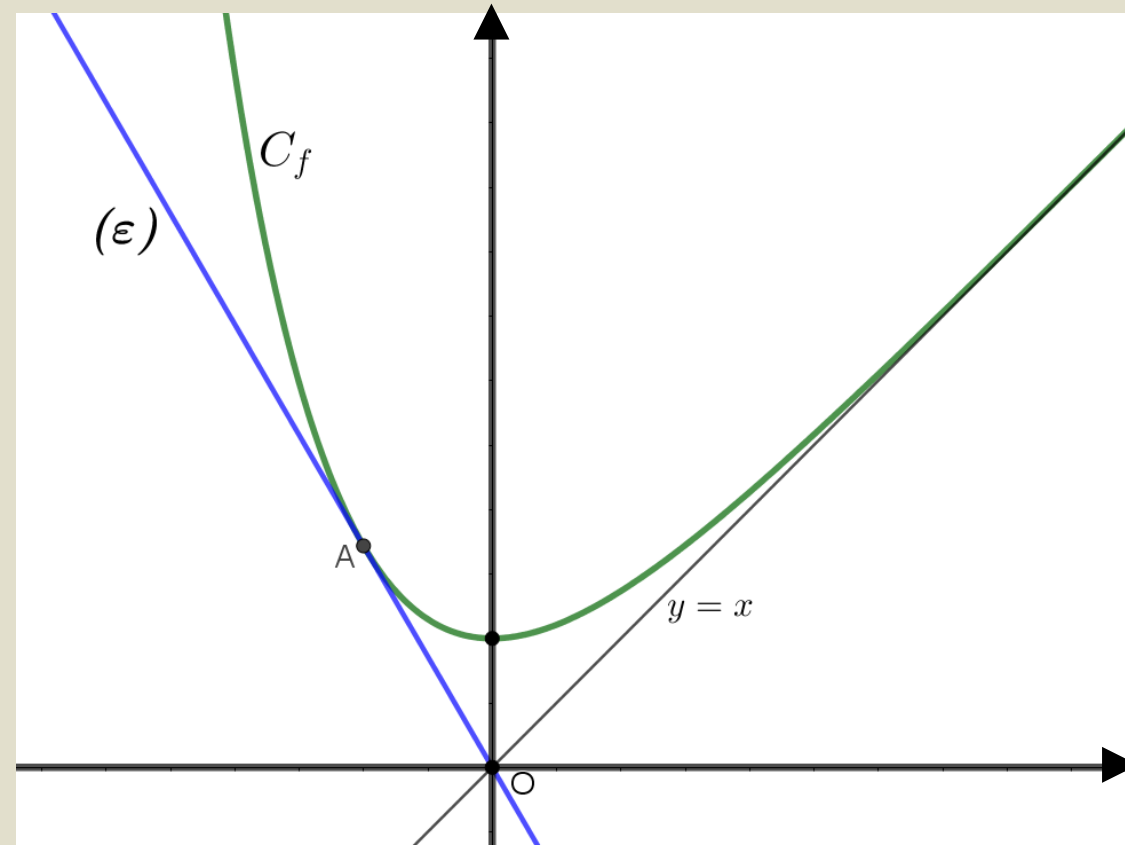
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο R συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.

α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$. (Μονάδες 8)



Θέμα 23531 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - 3$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$. (Μονάδες 10)
- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$. (Μονάδες 9)

Θέμα 23937 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(Μονάδες 09)

Θέμα 24283 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1, 2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2, 5] \end{cases}$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)
- b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$. (Μονάδες 09)
- c) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 5]$. (Μονάδες 06)

Θέμα 24579 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$.

α)

- i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)
- iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 07)

Θέμα 24587 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε , είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} |x_0 - \ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} (x_0 - \ln x_0)$. (Μονάδες 05)

β)

- i. Να βρείτε το σημείο της C_f , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε . (Μονάδες 12)
- ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

Θέμα 24755 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$. (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 24756 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$. (Μονάδες 8)

Θέμα 24757 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° .

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$. (Μονάδες 9)

Θέμα 24759 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)
- iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

- i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (Μονάδες 5)
- ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

Θέμα 24760 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$, $x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, e)$ με $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_0 που είναι το $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$. (Μονάδες 7)

Θέμα 25124 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3, x \in (-\infty, 0]$.

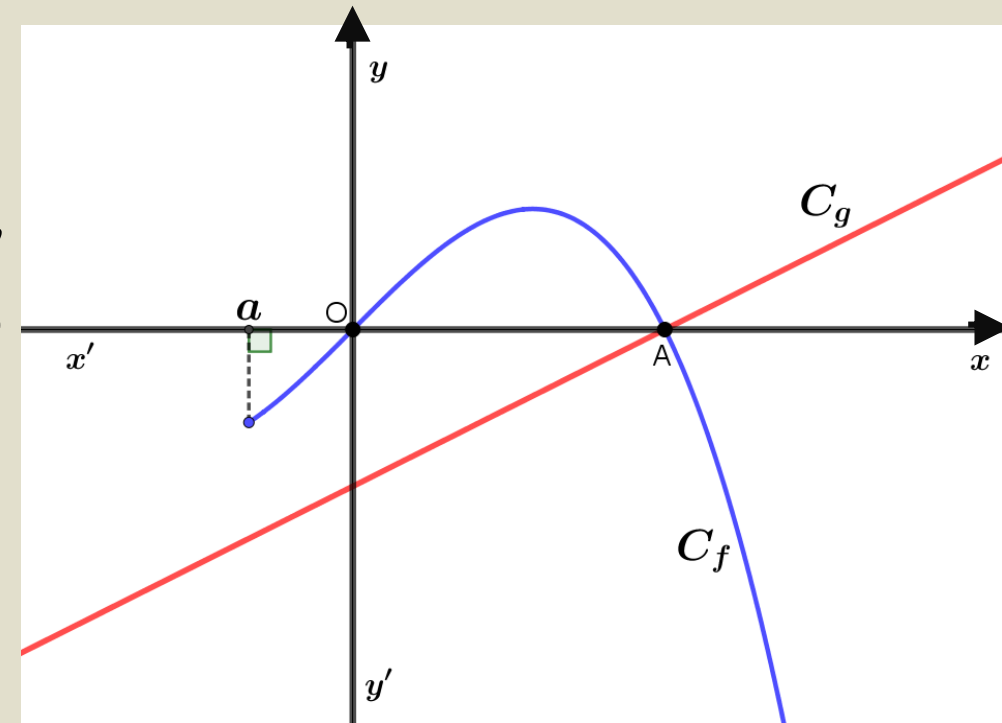
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .
(Μονάδες 7)

Θέμα 25234 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

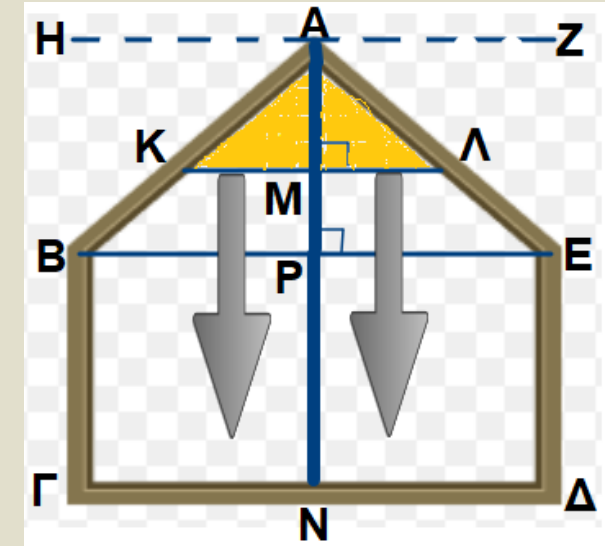
1. οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 0)$.
2. η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3. η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A .

- α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)
- β) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)}$. (Μονάδες 9)



Θέμα 25257 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο ΒΓΔΕ και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ. Είναι $AP = 0,8\text{m}$, $BE = 1,6\text{m}$, $AM = x\text{m}$, $BΓ = 1\text{m}$. Το ορατό κάτω μέρος ΚΛ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση ΗΖ, με σταθερό ρυθμό, ώστε το Μ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΝ (με $AM \neq 0$). Αν $E = E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:



- a) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E , ισχύει $E(x) = \begin{cases} x^2, \text{ αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, \text{ αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}$, σε m^2 . (Μονάδες 08)
- b) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x , όταν $x = \frac{4}{5}\text{m}$, είναι ίσος με $E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}\text{m}^2/\text{m}$. (Μονάδες 09)
- c) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t , τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5}\text{m}$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0,08\text{m/s}$ για κάθε $t \geq 0$. (Μονάδες 08)

Θέμα 25745 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f(0) = f(2)$ και $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (0,2)$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 8)

Θέμα 25748 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$. (Μονάδες 8)

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$. (Μονάδες 9)

Θέμα 25761 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

Θέμα 25762 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$. (Μονάδες 7)

Θέμα 25764 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x + 1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 26366 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

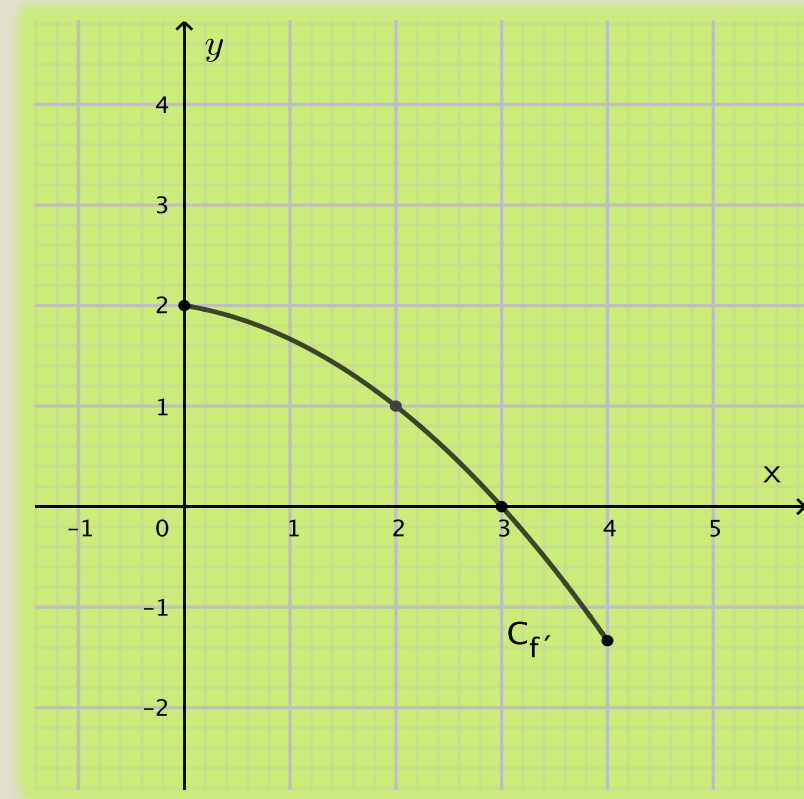
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$.

α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;
(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$. (Μονάδες 08)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.
(Μονάδες 06)

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f''(x)dx$.
(Μονάδες 05)



Θέμα 26605 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

1. $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

- i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)
- ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)
- ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.
(Μονάδες 9)

Θέμα 26630 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x & , \text{αν } x < 0 \\ 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \sin x & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

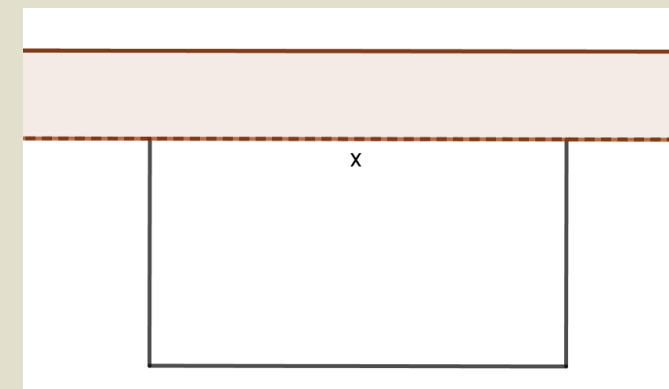
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$ (Μονάδες 7)

Θέμα 26633 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Με συρματοπλέγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρεις πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2$ με

$0 < x < 400$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x , για την οποία το εμβαδό $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής.

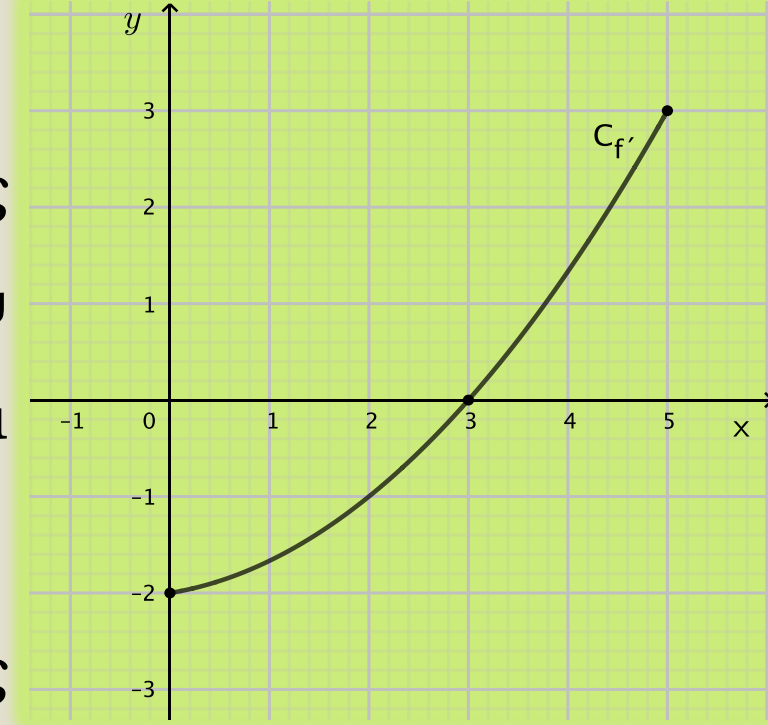
(Μονάδες 5)

δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x , που ανήκει στο διάστημα $(0, 200)$ για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με $300 \cdot \pi$ τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

Θέμα 26707 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.



α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_0 = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)

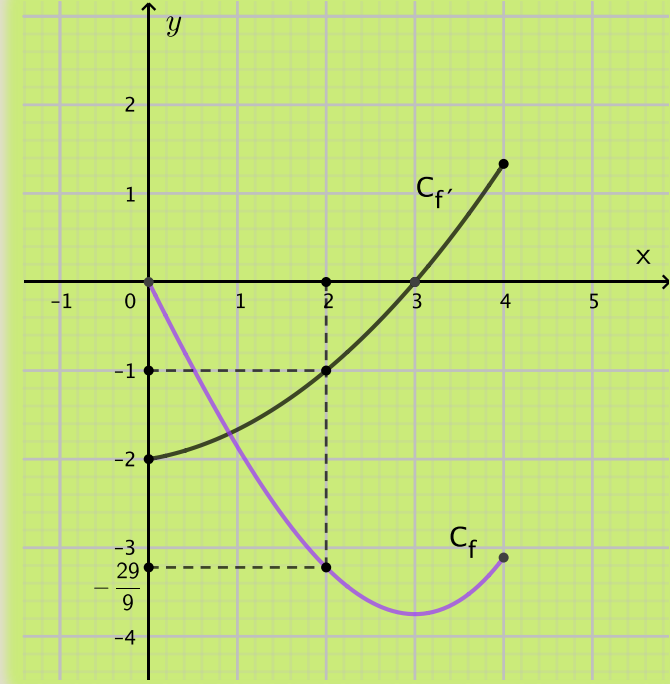
Θέμα 26712 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f' .

α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$.
(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)



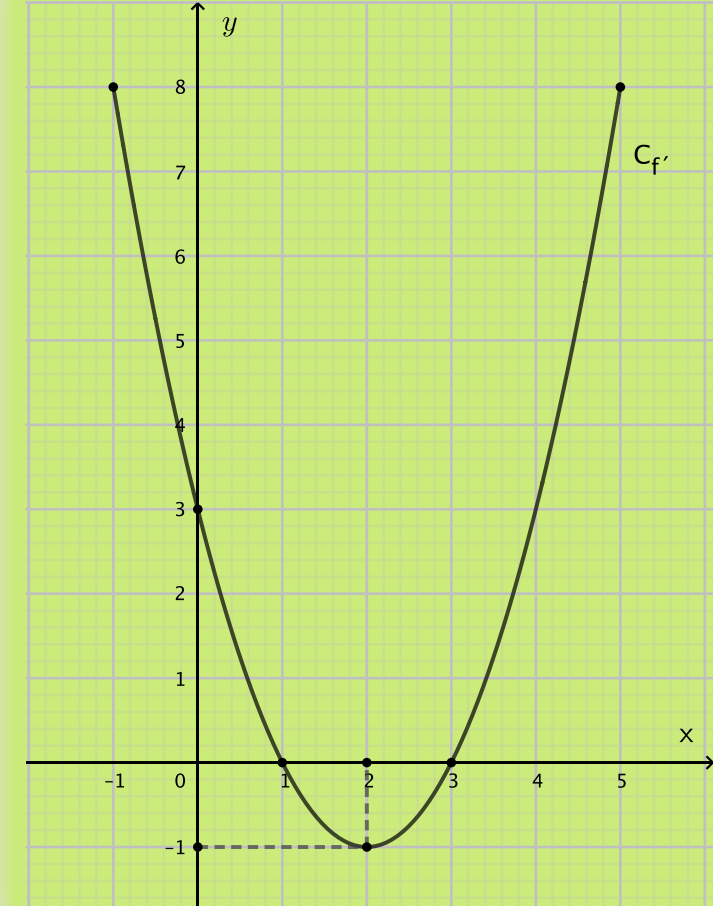
Θέμα 26736 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2, -1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$. (Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$; (Μονάδες 06)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$. (Μονάδες 09)



Θέμα 27082 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (Μονάδες 09)
- β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$. (Μονάδες 09)
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$. (Μονάδες 07)

Θέμα 27084 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. (Μονάδες 08)

Θέμα 27092 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

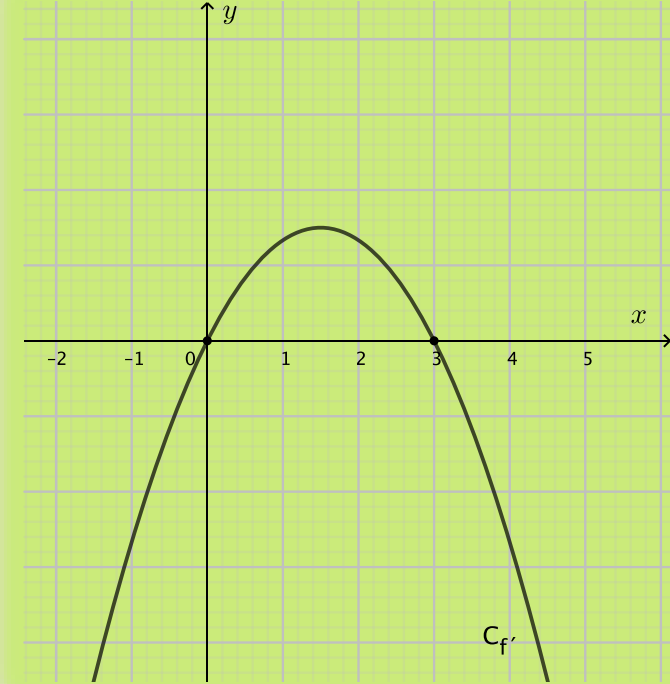
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f . (Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f . (Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, στο διάστημα $(0, 3)$. (Μονάδες 07)



Θέμα 27315 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x < 2 \\ ax^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 2$, δηλαδή τα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. (Μονάδες 07)

γ) Αν $a = 2$, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f .
(Μονάδες 06)

Θέμα 27319 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x - 2)e^x + (x - 1)\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα $(1, 2)$. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8) (Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $x'x$ στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 09)

Θέμα 27320 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f . (Μονάδες 09)

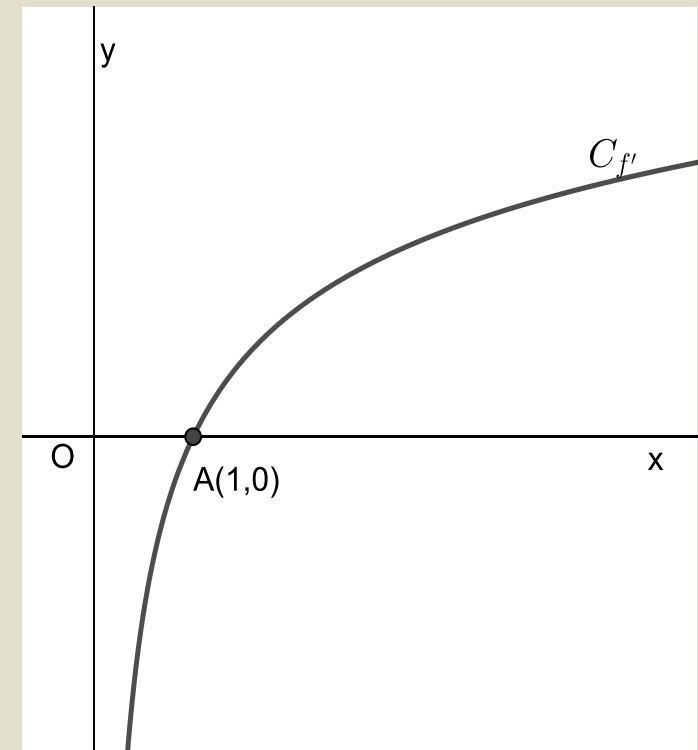
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1^{ον}: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2^{ον}: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$ να ισούται με 2».

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)



Θέμα 27455 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

Θέμα 27650 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

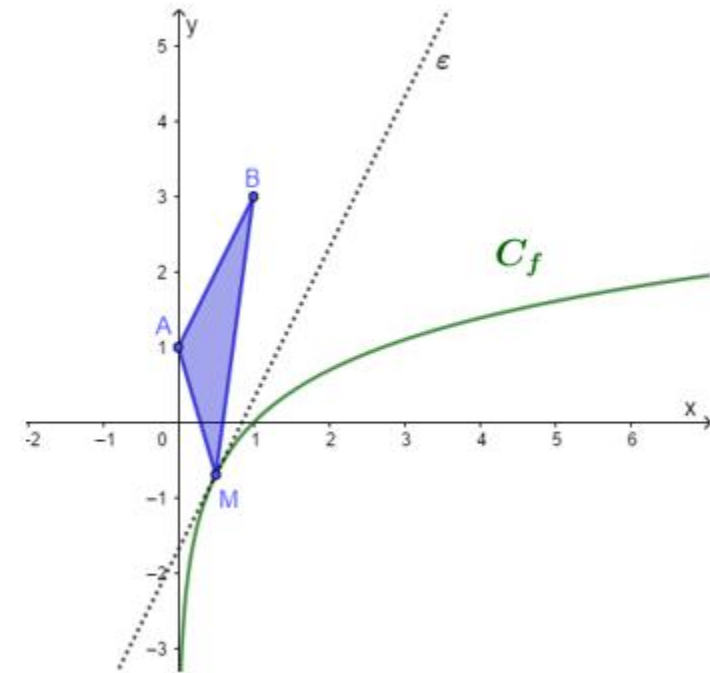
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α)

- i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB . (Μονάδες 06)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0 . (Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - \ln x), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM , όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A . (Μονάδες 07)



Θέμα 27667 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023, x \in \mathbb{R}$.

- a) Να αποδείξετε ότι:
- i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 05)
 - ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)
- b) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ . (Μονάδες 05)
- c) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η συνάρτηση $g(x) = \alpha x - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$. (Μονάδες 09)

Θέμα 28302 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε την παράγωγο της $g \circ f$ στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

Θέμα 28314 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x + 1}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f . (Μονάδες 8)
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(Μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 5)

Θέμα 28337 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f' , είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0, -2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1, 2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1, 2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$.

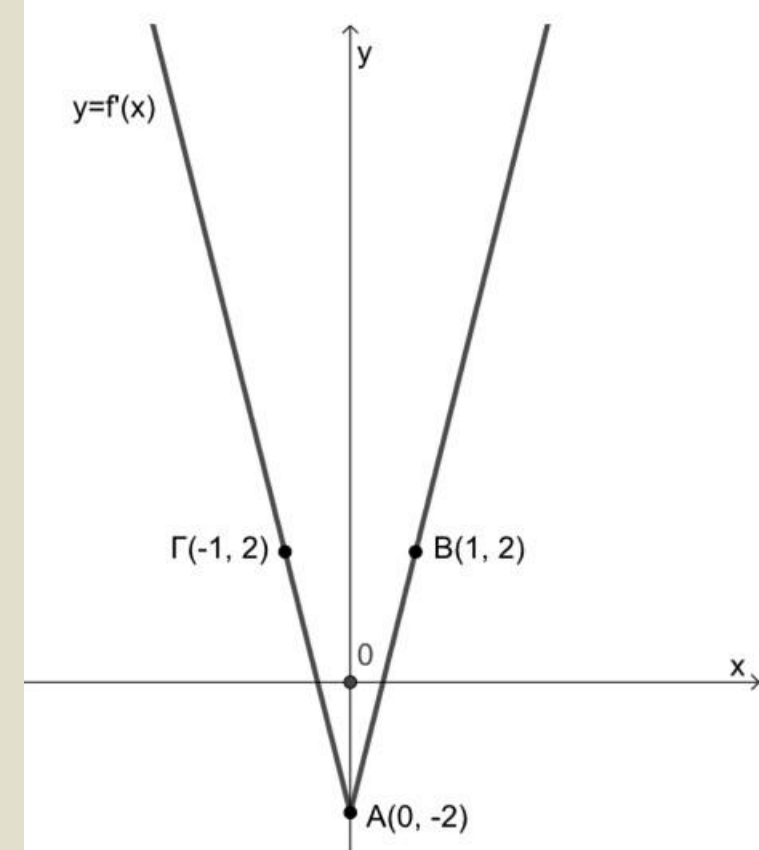
(Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 6)

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f . (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1, 0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Delta$ εφαπτεται της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 7)



Θέμα 28340 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x + 1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

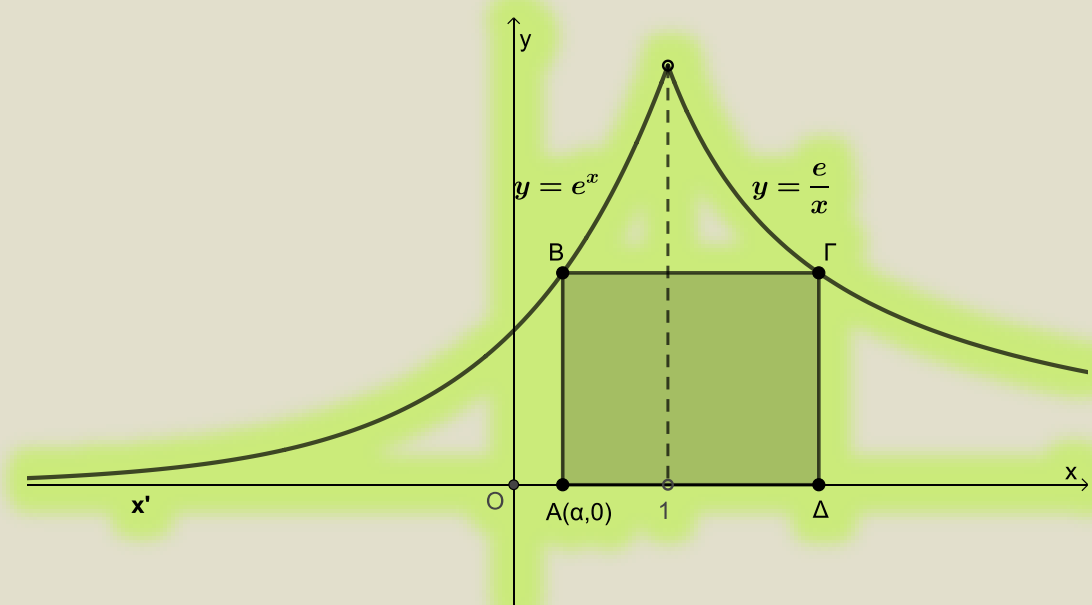
i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(f \circ g)'(2)$ και $(g \circ f)'(-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f \circ g}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της $C_{g \circ f}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

Θέμα 28342 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις κορυφές A και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές B και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $A(\alpha, 0)$ με $\alpha < 1$.



α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$,
(Μονάδες 6)
- ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $E(\alpha) = e - \alpha e^\alpha$, $\alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)

Θέμα 28532 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο A μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο B της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα 3 Km/h και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα 6 Km/h .

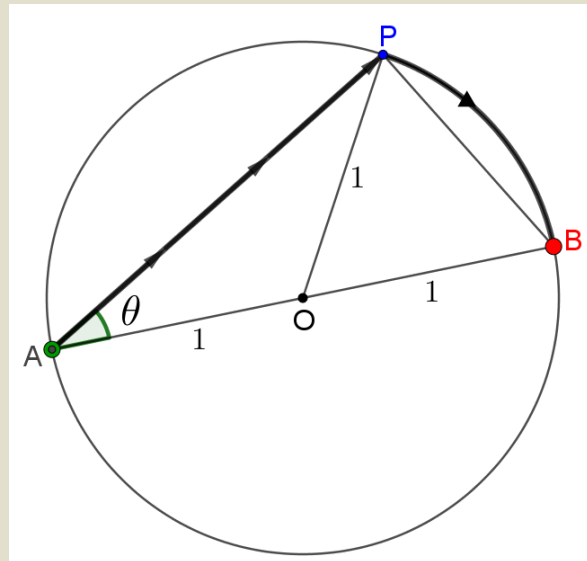
Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι $\theta\text{ rad}$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το A στο B είναι $f(\theta) = \frac{1}{3} \cdot (2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος. (Μονάδες 10)

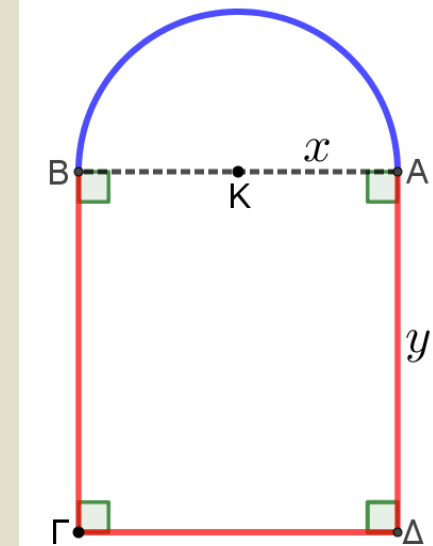
γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$. (Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\text{ rad}$ σε κύκλο ακτίνας R , είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) $\times$ (ταχύτητα).



Θέμα 28534 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4 m , αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\text{ m}$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta) = y\text{ m}$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)}$. (Μονάδες 8)

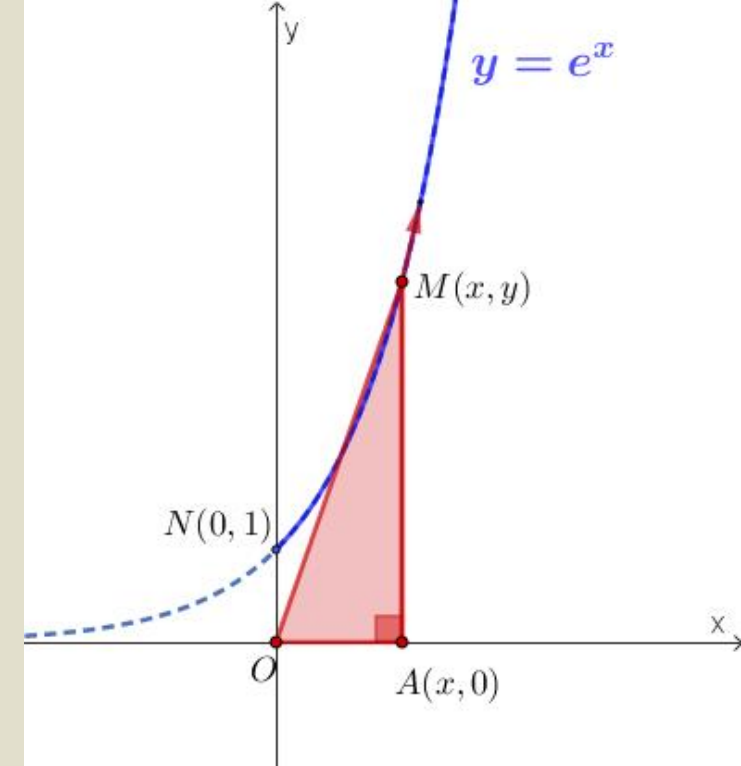
Θέμα 28685 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$. (Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό M ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x, x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAM , όπου $O(0,0)$, $A(x, 0)$ και $M(x, y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x, x \geq 0$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 cm^2/sec$. (Μονάδες 10)



Θέμα 29130 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία $y = x$ εφαπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)
- ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y = x$ τα οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)
- ii. Στο διάστημα $(0, +\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y = x$ (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 06)

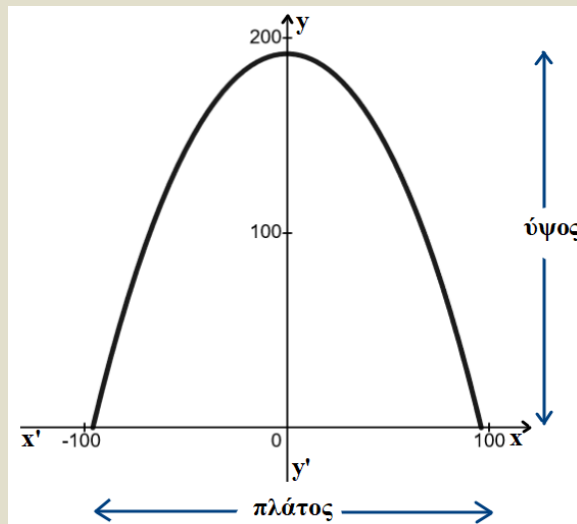
Θέμα 29149 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $g: [-96, 96] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{\frac{x}{96}} + e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
(Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha > 0$ και $f(x) = 2\alpha[g(96) - g(x)]$, $x \in [-96, 96]$ τότε:

- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (-96, 96)$. (Μονάδες 06)
- Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της. (Μονάδες 07)



Θέμα 29150 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Η συνάρτηση $x(t) = (t - 2)(t - 1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

- α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)
- β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)

Θέμα 29211 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 08)
- γ)
- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 05)
- ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} . (Μονάδες 07)

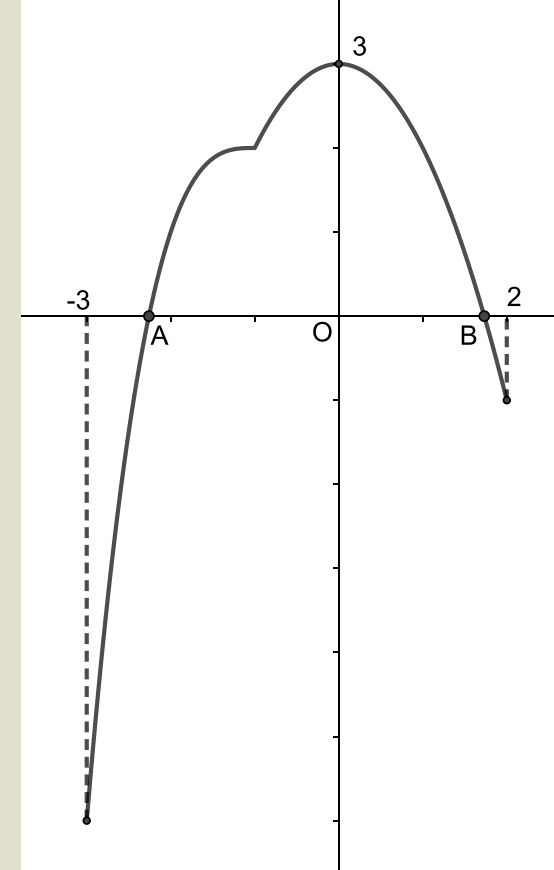
Θέμα 29644 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[-3,2]$ η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x ' x στα σημεία A και B. Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-3,2]$. (Μονάδες 05)
- ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$. (Μονάδες 10)



Θέμα 29927 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(Μονάδες 6)

β)

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = a$ και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a . (Μονάδες 9)

Θέμα 31527 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μόρια 10)
- β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.
 - i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) . (Μόρια 7)
 - ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f , διαφορετικό από το A , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε) . (Μόρια 8)

Θέμα 31547 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2} \text{ για κάθε } x \neq 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

Θέμα 31549 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$. (Μονάδες 6)
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)
- δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται $e \simeq 2,71$.

Θέμα 31550 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_0} + x_0$. (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

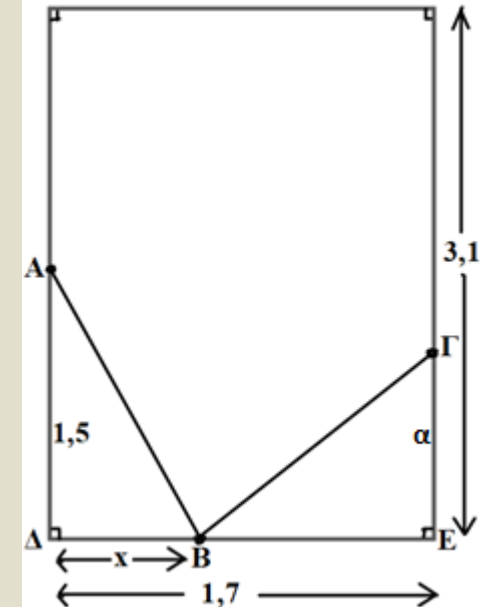
Θέμα 31643 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

- α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. (Μονάδες 13)

Θέμα 31680 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος 3,1 μέτρα και πλάτος 1,7 μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1,7$, $A\Delta = 1,5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.



α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$. (Μονάδες 07)

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει 1,02 μέτρα από το Δ.

- i. Αν $L'(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{(1,7 - x)^2}{(1,7 - x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
(Μονάδες 10)
- ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1,02} \frac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει. (Μονάδες 08)

Θέμα 31743 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\eta\mu x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $\varphi(0) < 0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. (Μονάδες 9)

Θέμα 31746 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0, f(0))$. (Μονάδες 5)
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)
- δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq 2x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

Θέμα 31793 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$. (Μονάδες 7)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e, g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε) . (Μονάδες 8)

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x > 1$. Ένα σημείο $M(x, 0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/sec πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x)), \Gamma(x, g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στη θέση $(e^2, 0)$. (Μονάδες 10)

Θέμα 32390 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2, x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

Θέμα 32524 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1 - x) = x \ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x}{e - x \ln x - ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. (Μονάδες 07)

Θέμα 32694 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2 ,

α)

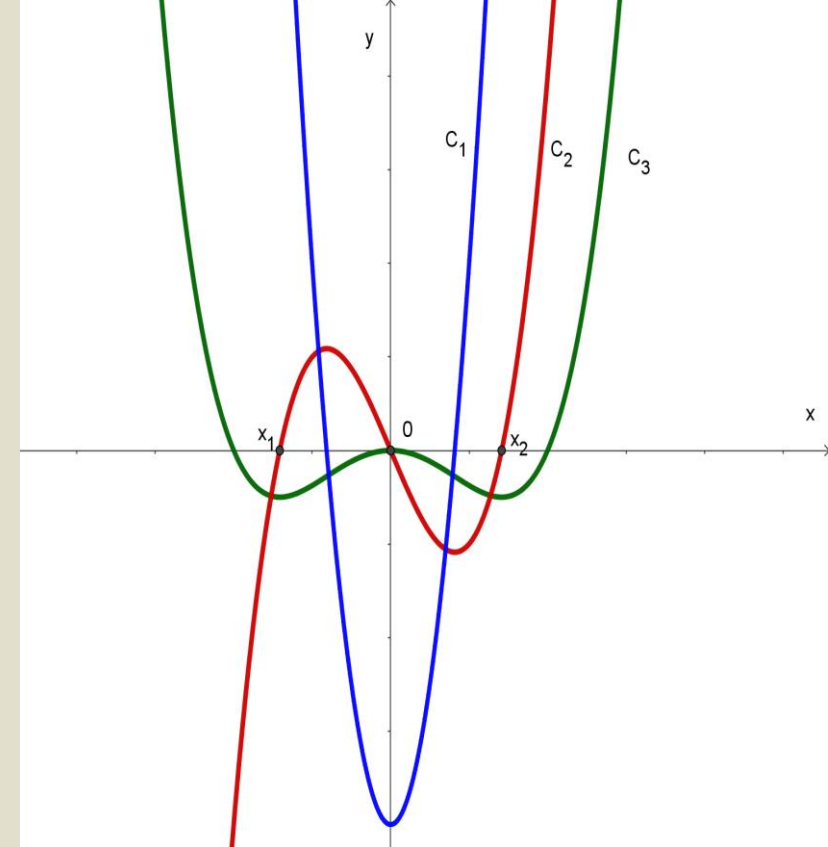
i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F . (Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F .

(Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F .

(Μονάδες 07)

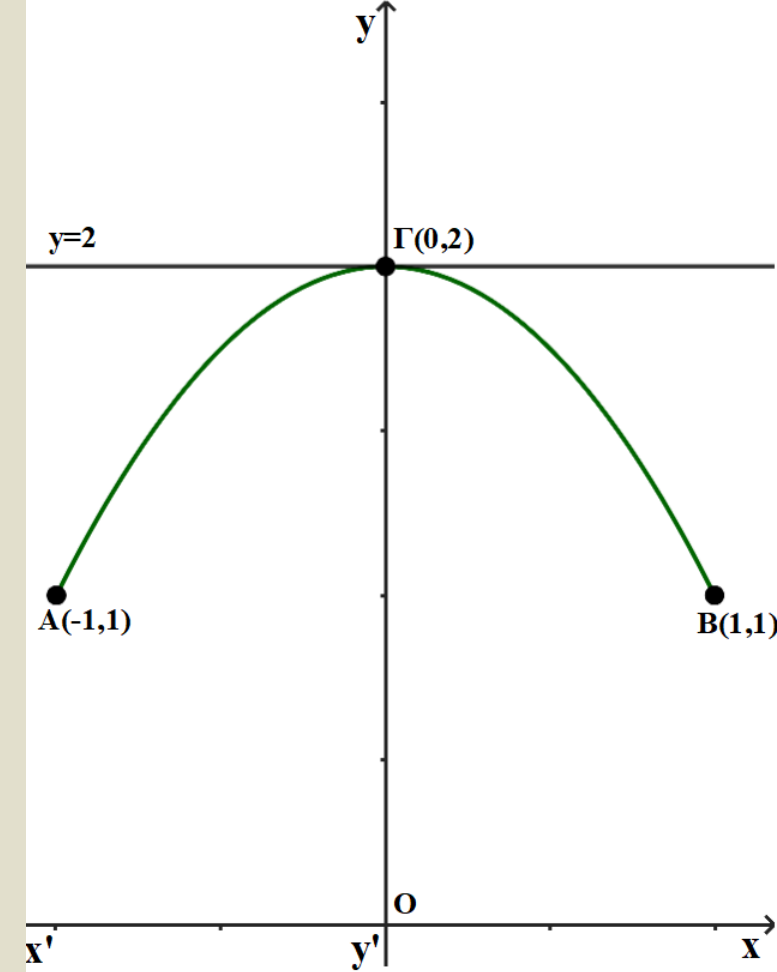


x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					

Θέμα 32799 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:

- α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1 \leq f'(x) \leq 2$, για κάθε $x \in [-1,1]$. (Μονάδες 07)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 08)
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 10)



Θέμα 33388 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$.
(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία.
(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)| \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq 3|\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. (Μονάδες 4)

Θέμα 33596 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $A(0,2)$. Αν $K(x, \ln x)$ με $x > 0$ τυχαίο σημείο της C_f και $M(x_o, \ln x_o)$ με $x_o > 0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A , να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτηήσει του $x > 0$ είναι $d(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}$. (Μονάδες 5)

β) $x_o^2 + \ln x_o - 2 = 0$. (Μονάδες 7)

γ) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM . (Μονάδες 6)

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_o^3 - x_o, 0)$. (Μονάδες 7)

Θέμα 33632 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$. (Μονάδες 12)

Θέμα 33633 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

- α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)
- β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 10)
- ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση. (Μονάδες 6)

Θέμα 33642 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 2x = f'(x) + x^2$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x) = f(x) - x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

ii. $f(x) = e^x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. (Μονάδες 7)

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1} < m < 2$. (Μονάδες 7)

Θέμα 33648 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln^2 x$ και $g(x) = \ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

α)

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f , C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f , C_g . (Μονάδες 4)

ii. Η ευθεία $x = \alpha$, $1 < \alpha < e$ τέμνει τις C_f , C_g στα σημεία A, B. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος AB γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 5)

Θέμα 33994 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta \mu x} \right) = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$. (Μονάδες 08)
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.
(Μονάδες 08)
- γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.
 - i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο $(0, g(0))$. (Μονάδες 04)
 - ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. (Μονάδες 05)

Θέμα 33995 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Μονάδες 10)
- β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1 - 1". (Μονάδες 09)

Θέμα 34437 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 2x$, $x > 0$ και $g(x) = e^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1. (Μονάδες 8)
- γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g . (Μονάδες 8)

Θέμα 34438 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής. (Μονάδες 8)

Θέμα 34439 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ και $g(x) = \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.
(Μονάδες 6)

Αν $h(x) = \frac{e^x}{1-e^x}, x \in \mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι '1-1'. (Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$. (Μονάδες 6)

Θέμα 34440 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

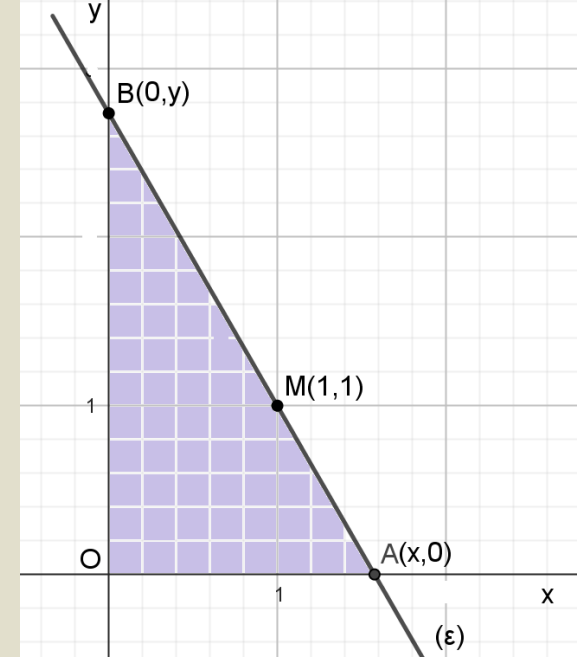
Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το $O(0,0)$, δίνεται το σημείο $M(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το M τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0)$, $x > 0$ και $B(0,y)$, $y > 0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x = 2$ το εμβαδό του τριγώνου OAB παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E στο σημείο $(3, E(3))$ και τα σημεία Γ , Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $K(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ) , και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)



Θέμα 34441 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι: $K(x) = 20x + \frac{2000}{x} + 1220$ ευρώ με $x > 0$.
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 3)

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος; (Μονάδες 5)

Θέμα 35172 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της. (Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 13)

Θέμα 35602 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ με $x \neq 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon'): x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 7)
- γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 10)

Θέμα 36787 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

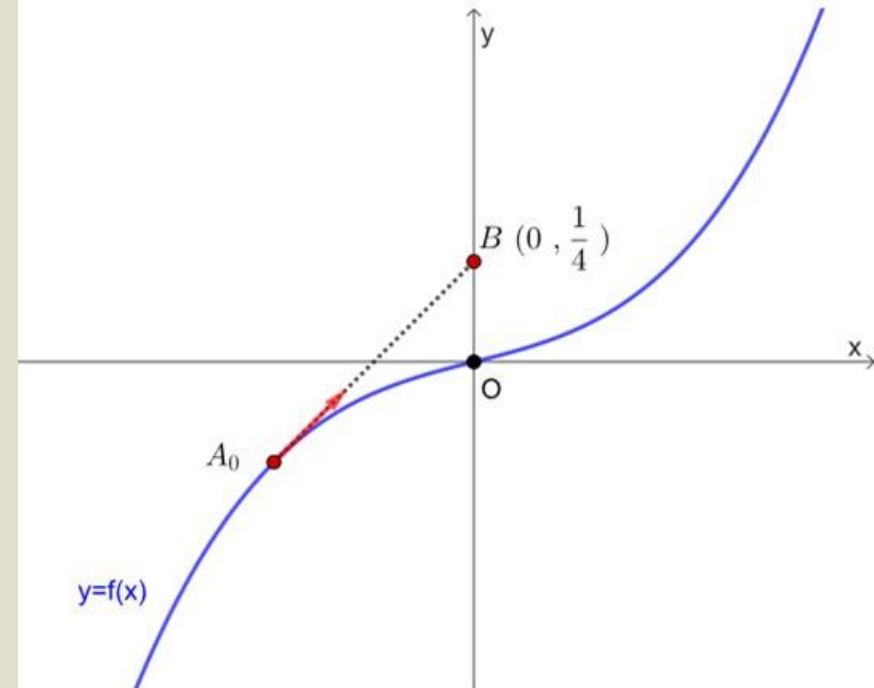
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$.

(Μονάδες 8)

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0 , οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0 .
(Μονάδες 8)
- ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_0 , είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_0 . (Μονάδες 9)



Θέμα 36814 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x , θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m , τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x , είναι: $K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$
(Μονάδες 08)
- β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 07)

Θέμα 36815 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + x^2 = 4 \text{ για κάθε } x \in [-2,2]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 09)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 04)

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f . Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1, \sqrt{3})$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το B . (Μονάδες 06)

Θέμα 36840 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h . Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.

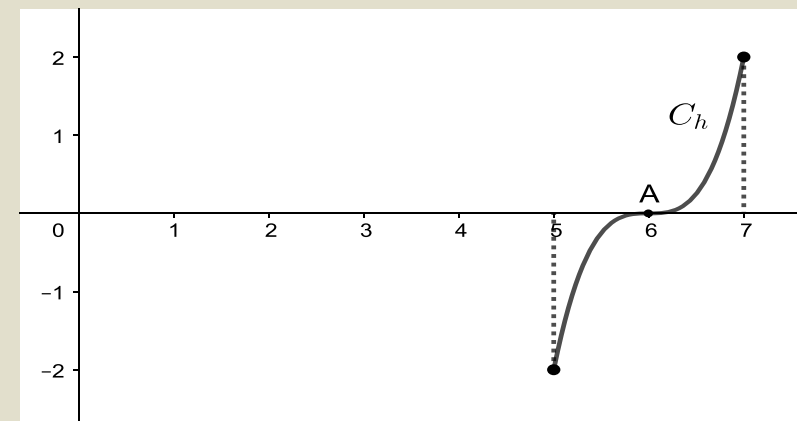
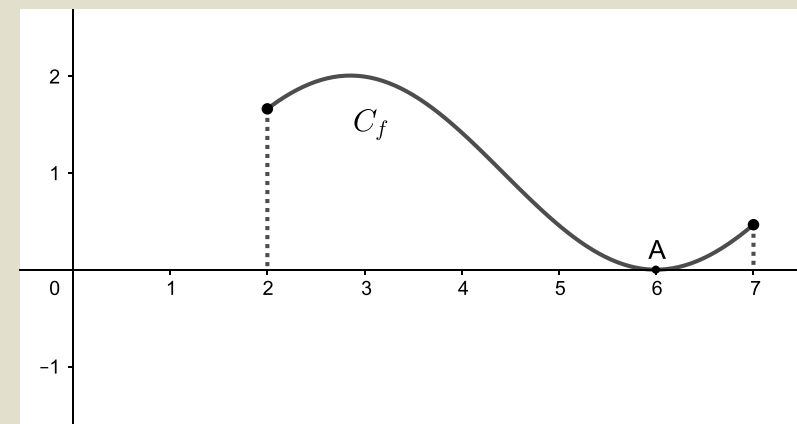
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 07)

ii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{h(x)}$ (Μονάδες 07)

iii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{x-6}$ (Μονάδες 05)



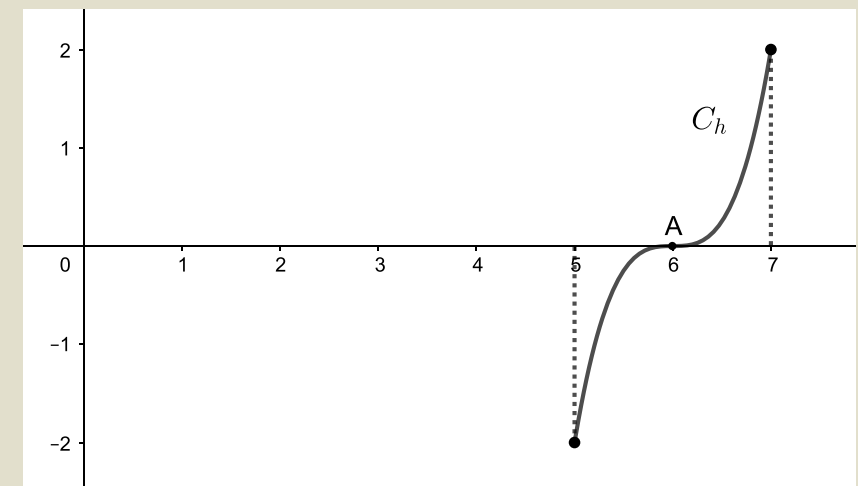
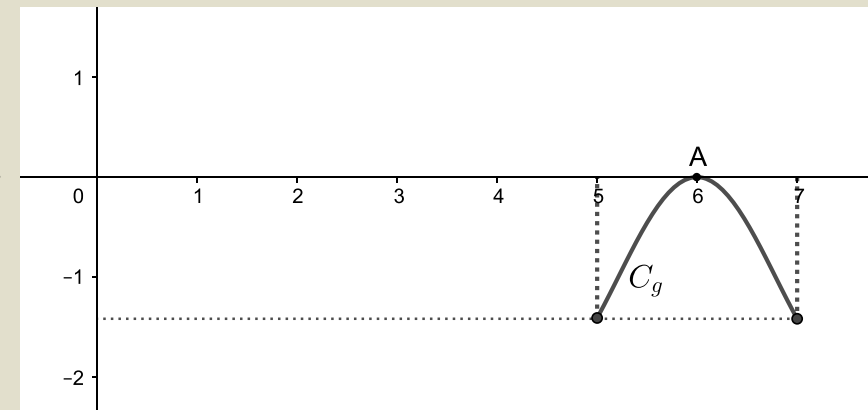
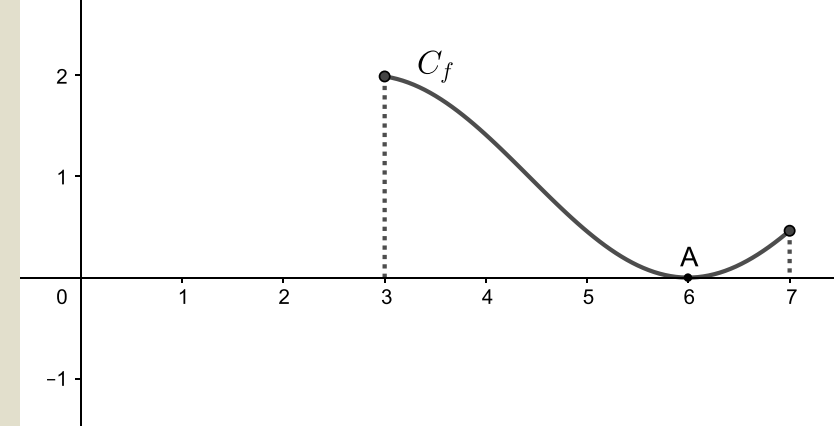
Θέμα 36842 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f , g και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f , g και h . (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

- i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)
- ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της. (Μονάδες 09)



Θέμα 36851 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

- α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)
- γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 11)

Θέμα 23215 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής, $f(0) = -1$ και $f(2) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$. (Μονάδες 5)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,2)$. (Μονάδες 5)

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 .
(Μονάδες 6)

Θέμα 33999 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x + 1)f'(x) \cdot \ln(x + 1) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, τότε:

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln(x + 1)$, $x > 0$ είναι σταθερή. (Μονάδες 08)

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x} \leq g(x) \leq \ln(x + 1) + \frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f . (Μονάδες 10)

Θέμα 34025 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$.

α)

- i. Να δείξετε ότι $f'(x) < 0$ με $x \in (1, +\infty)$ (Μονάδες 4)
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β)

- i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f . (Μονάδες 9)

Θέμα 34026 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - 2\ln x$, $x > 0$.

α) Να βρείτε:

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

ii. Το πρόσημο της f . (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$, έχει μέγιστη τιμή την

$g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2e}$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g . (Μονάδες 6)

Θέμα 36827 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1} = -f$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $h(x) = (g \circ f)(x)$.

Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα $[2, 8]$. (Μονάδες 8)

Θέμα 33816 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2 - x + 2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφαπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(1,2)$. (Μονάδες 8)

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g , να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y = x + 1$. (Μονάδες 9)

